Gráfelméleti feladatok

Az informatika elmélete

A sorozat kötetei:
Rónyai–Ivanyos–Szabó: Algoritmusok
Bach Iván: Formális nyelvek
Katona–Recski–Szabó: A számítástudomány alapjai
Buttyán–Vajda: Kriptográfia és alkalmazásai
Jordán–Recski–Szeszlér: Rendszeroptimalizálás
Szeredi–Lukácsy–Benkő: A szemantikus világháló elmélete és gyakorlata
Györfi–Győri–Vajda: Információ- és kódelmélet

FRIEDL KATALIN — RECSKI ANDRÁS — SIMONYI GÁBOR

GRÁFELMÉLETI FELADATOK

TYPOTEX

Budapest, 2006

Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok irodája által lebonyolított Tankönyv-támogatási Program keretében jelent meg.

ISBN 963 9664 01 4
ISSN 1787-3045

Témakör: *elméleti informatika*

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa
Felelős szerkesztő: Domina Katalin
Tördelte: Gerner József
Borítóterv: Tóth Norbert
Terjedelem: 20,82 (A/5 ív)
Készítette a Kaloprint Kft. nyomdája, Kalocsa

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a példatár körülbelül félezer gráfelméleti feladatot tartalmaz részletes megoldásokkal.

A gráfelmélet egyre fontosabb szerepet játszik mind a matematikában, mind annak műszaki (és közgazdasági, biológiai, egyéb) alkalmazásaiban. A matematikusképzésen kívül az informatikus és a villamosmérnök hallgatók programjában is egyre több egyetemen szerepel. Számos tankönyv és monográfia áll rendelkezésre mind a gráfelmélet alapvető ismereteinek elsajátításához, mind egy-egy területének mélyebb kutatásához.

A matematika egyes ágainak valódi megismerése elképzelhetetlen sok-sok feladat megoldása nélkül. A műszaki felsőoktatásban rengeteg példatár segíti az analízis és a valószínűségszámítás gyakorlását, kevés olyan feladatgyűjtemény állt azonban rendelkezésre, mely a gráfelméletnek az alkalmazásokban fontos ágaihoz nagyszámú gyakorló példát tartalmazna.

Ebben a kötetben olyan feladatokat válogattunk össze, melyek nagy része nem nehezebb a BSc hallgatók zárthelyi dolgozataiban szereplőknél, és olyan részletességgel írtuk le a megoldásokat, ahogy azokat a zárthelyik javításakor elvárjuk. Természetesen találhatóak nehezebb, gondolkodtatóbb feladatok is. Ilyenekből inkább csak ízelítőként vettünk be néhányat, kiváltképp a színezésekről szóló fejezetben.

Az igazán nehéz feladatok iránt érdeklődőknek külön is felhívjuk a figyelmét Lovász László immár klasszikusnak számító *Kombinatorikai problémák és feladatok* című könyvére. Az ott szereplő egyszerűbb feladatok némelyike a jelen feladatgyűjteményben is megtalálható. Szintén vettünk át néhány feladatot vagy feladatötletet az ELTE és a Szegedi Tudományegyetem matematikus és matematika tanár szakos hallgatói számára korábban készült, Elekes Györgytől, illetve Hajnal Pétertől származó példatárakból. További feladatgyűjteményeket is megemlítünk az irodalomjegyzékben, az érdeklődő olvasó ezeket is haszonnal forgathatja. Kiváltképp ez a helyzet, ha a leszámlálási kérdéseket vagy a gráfelmélet olyan területeit (pl. extremális gráfelmélet, Ramsey-tételkör, végtelen gráfok) kívánja tanulmányozni, melyek a jelen kötetben nem szerepelnek. Feladatgyűjtemények mellett az irodalomjegyzék néhány olyan gráfelmélettel foglalkozó könyvet sorol fel, melyek segíthetik az olvasó további tájékozódását.

Ez a kötet elsősorban a BME mérnökinformatikus és villamosmérnök BSc programjában oktatott gráfelméleti fejezetekre koncentrál, felépítésében nagyrészt Katona Gyula Y., Recski András és Szabó Csaba *A számítástudomány alapjai* című könyvének 2. fejezetét követi. A kötet végén jelölésjegyzék és a hivatkozott tételek felsorolása található. Ezek remélhetőleg megkönnyítik az olvasó munkáját, azonban nem pótolják a tankönyvet, ahol az eredmények a szükséges definíciók után, logikai sorrendben, jórészt bizonyításokkal következnek.

Mindhárman mintegy másfél évtizede oktatunk gráfelméletet a BME-n. Ezalatt természetesen tanszékünk többi (volt és jelenlegi) oktatójától és sok ezer diákunktól is rengeteg hasznos észrevételt kaptunk, amelyekért ezúton mondunk köszönetet. Külön is ki kell emelnünk

- Fogaras Dániel és Tapolcai János volt doktoránsainkat, akik a 2. és 3., illetve az 1. fejezet elkészítésében jelentős szerepet játszottak,
- Andrásfai Béla, Csákány Rita, Fleiner Tamás, Jordán Tibor, Katona Gyula Y., Sali Attila, Serény György, Szeszlér Dávid, Vesztergombi Katalin és Wiener Gábor volt, illetve jelenlegi tanszéki kollégáinkat, akik bevezető gráfelméleti kurzusok előadóiként számtalan zárthelyi- és vizsgapéldasort készítettek (melyekből bőségesen szerepeltetünk feladatokat),
- valamint azokat a volt hallgatóinkat (részben jelenlegi kollégáinkat), akik gyakorlatvezetőként rengeteget segítettek a feladatsorok összeállításában, csiszolgatásában, így különösen a következőket: Bíró Péter, Csima Judit, Faragó Gergely, Felszeghy Bálint, Harcos Gergely, Hoffmann György, Horváth Miklós, Jordán Árpád, Katona Zsolt, Koblinger Egmont, Laczay Bálint, Mann Zoltán, Marx Dániel, Megyeri Csaba, Németh András, Németh Attila, Németh Zoltán, Ónody Sándor, Orbán András, Patakfalvi Zsolt, Pintér Márta, Rácz Balázs, Radics Norbert, Richlik György, Ruszinkó Miklós, Salamon Gábor, Schlotter Ildikó, Szabó Jácint, Szabó Réka, Szegő László, Szigeti Zoltán, Sziklai Péter, Szkaliczki Tibor, Tóth Géza, Urbán Péter, Visontai Mirkó.

Végül, de nem utolsósorban, ki kell emelnünk T. Sós Vera és Lovász László szerepét, akiktől nemcsak gráfelméletet, hanem a tárgy szeretetét is tanultuk.

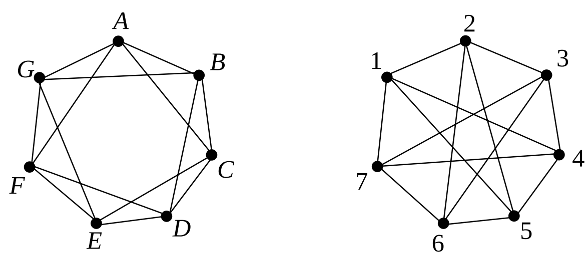
I. rész
FELADATOK

1. fejezet

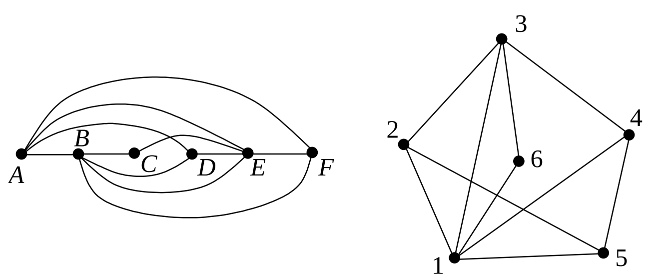
Gráfelméleti alapfogalmak

1.1. Izomorfizmus

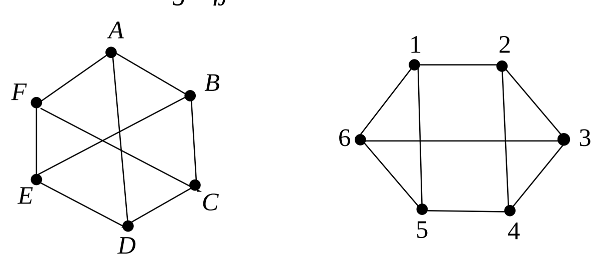
1. *Izomorfak-e az alábbi ábra gráfjai?*



2. *Izomorfak-e az alábbi ábra gráfjai?*



3. *Izomorfak-e az alábbi ábra gráfjai?*



4. *Hány darab olyan, páronként nemizomorf,* 6 *pontú, összefüggő egyszerű gráf létezik, melyben pontosan három darab elsőfokú pont van?*

5. *Rajzolja fel az összes nemizomorf* 3 *pontú,* 4 *pontú és* 5 *pontú fát!*

6. *Rajzolja fel az összes olyan nemizomorf* 7 *pontú fát, amelyben van negyedfokú pont?*

7. *Legyen $k \geq 7$. Hány darab olyan, páronként nemizomorf, k pontú fa van, amely tartalmaz $(k-3)$-adfokú pontot?*

8. *Hány darab olyan, páronként nemizomorf,* 7 *pontú fa van, amelyben van pontosan harmadfokú pont?*

9. *Igaz-e, hogy ha T_1 és T_2 két olyan n szögpontú fa, amelyekben csak elsőfokú és k-adfokú pontok vannak, akkor T_1 és T_2 izomorfak?*

10. *Igaz-e, hogy ha egy gráf izomorf a komplementerével, akkor minden pontjának foka páros?*

11. *Mely fák izomorfak saját komplementerükkel?*

12. *Legyen p egy páratlan pozitív egész és G egy p pontú gráf, ami izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy G-ben van $(p-1)/2$ fokú pont!*

13. *Bizonyítsuk be, hogy minden G egyszerű gráfra, mely izomorf a komplementerével, teljesül, hogy csúcsainak száma $4k$ vagy $4k+1$ alakú, ahol k egész szám.*

14. *G páros gráf és izomorf a komplementerével. Mi lehet ez a G?*

1.2. Fokszámsorozatok

15. *Van-e olyan egyszerű, összefüggő, nem páros gráf, amelyben a fokszámok:* 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6*?*

16. *Van-e olyan egyszerű, összefüggő, nem páros gráf, amelyben a fokszámok:* 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5*?*

17. *Hány olyan egyszerű gráf van, melynek fokszámai rendre:* 2, 3, 3, 4, 6, 6, 6*?*

18. *Hány olyan egyszerű gráf van, melynek fokszámai rendre:* 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7*?*

19. *Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámai rendre:* 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7*?*

20. *Egy $n > 1$ csúcsú fa fokszámai $(n-1)$-félék. Mekkora lehet n értéke?*

21. *Bizonyítsuk be, hogy minden* 2*-nél nagyobb páros n-re van n csúcsú egyszerű, összefüggő,* 3*-reguláris gráf!*

22. *Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re van olyan egyszerű, összefüggő,* 2*n csúcsú gráf, melynek minden $1 \leq k \leq n$ esetén pontosan két k fokszámú csúcsa van!*

1.3. Fák

23. *Bizonyítsuk be, hogy egy fában a pontok és az élek számának szorzata páros!*

24. *Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$.*

25. *Legfeljebb hány tizedfokú pontja lehet egy 100 pontú fának?*

26. *Hány pontja van a T fának, ha éleinek száma pontosan tizenötöde a komplementerében lévő élek számának?*

27. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T fa elsőfokú pontjainak száma legalább akkora, mint $\Delta(T)$, azaz a T-beli maximális fokszám.*

28. *Az n hosszúságú* 0–1 *sorozatok legyenek egy gráf pontjai és két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátában tér el. Legalább hány élt kell ebből a gráfból elhagyni, hogy körmentessé váljon?*

29. *Jelöljünk ki egy fában* 4 *elsőfokú pontot. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve.*

30. *Mely fákra igaz, hogy bármely két elsőfokú pont távolsága ugyanannyi? (Két pont távolságán a köztük lévő legrövidebb út éleinek a számát értjük.)*

31. *Legfeljebb hány két élből álló út lehet egy fában?*

32. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.*

33. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő?*

1.4. Cayley-tétel, Prüfer-kód

34. *Egy n csúcsú fa Prüfer-kódja $n-1$ azonos számjegyből áll. Mi a fa, amit kódol és mi ez a szám? (Egy n csúcsú fa Prüfer-kódjába beleértjük annak $(n-1)$-edik elemét is.)*

35. *Egy F fa Prüfer-kódja csupa különböző számból áll. Hogyan jellemezhetjük F-et?*

36. *Válasszuk meg x értékét úgy, hogy az alábbi sorozat egy olyan fa Prüfer-kódja legyen, amelyben minden pont fokszáma páratlan szám. Adjuk is meg ezt a fát! A sorozat:* 1, 1, 5, x, 6, 6, 8.

37. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton amely nem csillag?*

38. *Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, amelynek legalább három elsőfokú csúcsa van?*

39. *Hány olyan fa van az $1,2,\ldots,n$ pontokon, amelyben az 1-es csúcs elsőfokú?*

40. *Adott négy darab egyenként ötcsúcsú fa négy páronként diszjunkt csúcshalmazon. A négy fában szereplő összesen 20 csúcs összekötésével hány különböző módon egészíthető ki ez a négy fa egyetlen fává, ha a csúcsokat címkézettnek tekintjük?*

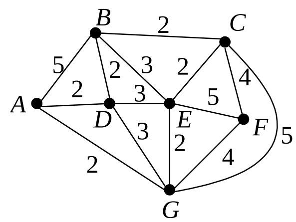
1.5. Minimális súlyú feszítőfa

41. *Az $n \times n$ méretű négyzetrács vonalrendszeréből rajzoljunk be annyit, hogy a négyzetrács bármely pontjából bármely pontjába el lehessen jutni a berajzolt szakaszok mentén. Számítsuk ki a berajzolt szakaszok összhosszának lehetséges minimumát!*

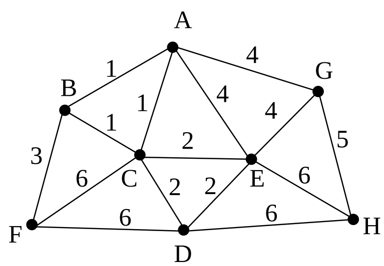
42. *Legyenek egy gráf $e_1, e_2, \ldots$ élei egymástól függetlenül rendre $p_1, p_2, \ldots$ valószínűséggel meghibásodó telefonvonalak. Hogyan adható meg egy olyan fe-*

szítőfa, amelynek a legnagyobb a megbízhatósága (tehát amelyre maximális annak a valószínűsége, hogy egyik él sem hibásodik meg).

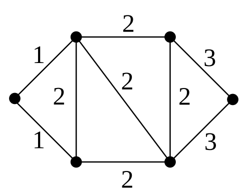
43. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az alábbi ábrán látható gráfnak és mennyi egy ilyennek a súlya?*



44. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?*



45. *Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?*



46. *Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan* 2000 *élű és* 2000 *csúcsú egyszerű összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a* 2000 *él közül adható egynek* 2 *egységnyi,* 1999*-nek pedig* 1 *egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)*

47. *Hány minimális súlyú feszítőfája van annak az* 1000 *csúcsú teljes gráfnak, amelyben egy háromszög éleinek súlya* 1*, minden más él súlya* 2*? (A pontokat címkézettnek tekintjük)*

1.6. Összefüggőség

48. *Igaz-e a következő állítás? Ha egy* $2n$ *pontú egyszerű G gráfban minden pont foka legalább n, akkor G összefüggő.*

49. *Lehet-e egy gráfnak minden pontja elvágó pont?*

50. *Igazoljuk, hogy ha egy G gráf összefüggő, akkor pontjainak van olyan* $(p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ *sorrendje, hogy tetszőleges k-ra* $G - \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ *összefüggő!*

51. *Létezik-e olyan, legalább* 3 *pontot tartalmazó összefüggő gráf, amelyből bármely pontpárt törölve nem összefüggő gráfot kapunk?*

1.7. Irányított gráfok

► DEFINÍCIÓ: Egy irányított gráfot **egyszerű**nek mondunk, ha nincsenek benne hurokélek, párhuzamos élek, továbbá egy él megfordítottja sem szerepel benne.

52. *Rajzoljuk fel az összes olyan, páronként nemizomorf,* 3 *pontú és* 4 *élű hurokmentes irányított gráfot, melynek van olyan pontja, amelynek kifoka is, befoka is* 2.

53. *Hány páronként nemizomorf,* 4 *pontú és* 3 *élű, egyszerű irányított gráf létezik?*

54. *Egy* 9 *tagú társaságban mindenki átad öt általa kiválasztott embernek* 100-100 *forintot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze!*

55. *Hány k élű egyszerű irányított gráf adható meg n címkézett ponton?*

56. *Hányféleképpen húzhatunk be n irányított élt n címkézett pont közé úgy, hogy pontosan egy darab*
    (a) *n élű irányított kör;*
    (b) *n élű kör keletkezzék?*

57. *Mutassuk meg, hogy egy hurokmentes irányított gráf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört.*

1.8. Vegyes feladatok

58. *Hányféleképpen húzhatunk be* 1768 *élt az előre megszámozott* 1, 2, 3, ..., 59, 60 *pontok közé úgy, hogy egyszerű gráfot kapjunk?*

59. *Egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább k. Mutassuk meg, hogy létezik benne legalább $k-1$ élű út!*

60. *Hány kettő hosszú út van $K_{m,n}$-ben?*

61. *Egy összefüggő gráfban minden út hossza legfeljebb k. Bizonyítsuk be, hogy ha van két k hosszú út, akkor azok nem lehetnek pontdiszjunktak!*

62. *A G irányított gráfot a $V(G) = \{1,2,\ldots,k\}$ ponthalmazon úgy definiáljuk, hogy pontosan akkor vezessen irányított él i-ből j-be, ha $i < j$. Az (i,j) él hossza legyen i és j legnagyobb közös osztója. Határozzuk meg a legrövidebb és leghosszabb irányított utat 1-ből k-ba!*

63. *A G irányított gráfot a $V(G) = \{1,2,\ldots,k\}$ ponthalmazon úgy definiáljuk, hogy pontosan akkor vezessen irányított él i-ből j-be, ha $i < j$. Az (i,j) él hossza legyen i és j legkisebb közös többszöröse. Határozzuk meg a legrövidebb és leghosszabb irányított utat 1-ből k-ba!*

64. *Legyen egy n csúcsú gráf fokszámainak összege $2n$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf tartalmaz kört.*

65. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráf minden csúcsának fokszáma páros, akkor éleinek halmaza körökre particionálható, azaz kijelölhető a gráfban valahány kör úgy, hogy minden él pontosan egyben szerepeljen!*

66. *Legyen G egy olyan gráf, amelyben a páratlan fokú csúcsok száma $2k$. Igazoljuk, hogy G élhalmaza particionálható körökre és pontosan k útra, azaz megadható G-ben néhány kör és k út úgy, hogy bármely él pontosan egyben szerepeljen közülük.*

67. *Bizonyítsuk be, hogy bármely, legalább ötpontú gráfban vagy a komplementerében van kör!*

68. *Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma* 3*-mal egyenlő és a legrövidebb kör hossza pontosan* 4*.*

69. *Legyen G egy olyan $3k \geq 6$ csúcsú gráf, melynek fokszámai rendre:* $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots 1, 2, 3$. *Bizonyítsuk be, hogy G-ben van kör! Adjunk meg valamely k-ra két összefüggő, a feltételeket kielégítő, nemizomorf gráfot, ha vannak ilyenek!*

70. *Egy* 4*-reguláris gráfból töröljük egy fa éleit. Bizonyítsuk be, hogy a megmaradó gráf legalább két kört tartalmaz!*

71. *Legyen G egy hatpontú egyszerű gráf, melyben minden pont foka legalább négy. Bizonyítsuk be, hogy bármely négy pontja (alkalmas sorrendben) egy kört alkot.*

72. *Egy egyszerű páros gráfban minden pont foka legalább* 4*. Bizonyítsuk be, hogy van a gráfban olyan kör, melynek hossza legalább* 8*.*

73. *Egy 10 pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 7. Bizonyítsuk be, hogy bármely három pontnak van közös szomszédja!*

74. *Legyen egy G gráfban a minimális és maximális fokszám δ, illetve Δ, a csúcsok és élek száma pedig n, illetve e. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\delta \leq 2 \cdot \frac{e}{n} \leq \Delta$$