

Gabriel Weinreich
GEOMETRIA I VEKTOROK

Gabriel Weinreich
GEOMETRIAI VEKTOROK

A könyv megjelenését támogatta:
a Magyar Tudományos Akadémia



Gabriel Weinreich: *Geometrical Vectors*

© 1998 by The University of Chicago. All rights reserved.

Hungarian edition published by arrangement with Agentia literara LIVIA STOIA

Hungarian translation © Bokor Nándor, 2018

Hungarian edition © Typotex, Budapest, 2018

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 008 2

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Gerner József

A borítót készítette: Szalay Éva

Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában

Felelős vezető: Kajtor Bálint

Tartalom

Előszó	9
1. Prológus: Miről szól ez a könyv?	11
1.1. Bevezetés	11
1.2. Hol kezdjük?	12
1.3. Mi nem vektor?	13
1.4. Mik a hagyományos vektorok?	15
1.5. Van-e a vektoroknak helye?	16
1.6. Koordinátatranszformációk, illetve koordinátarendszer-torzu- lások	18
1.7. Miért fontos a topologikus invariancia?	19
FELADATOK	20
2. Vektortípusok és vektorműveletek	21
2.1. Mi a probléma?	21
2.2. Paklik	22
2.3. A matematikai objektumok mérete	24
2.4. Vonalak és síkok tájolása	25
2.5. Nyilak és paklik algebrája	26
2.6. A skaláris szorzás	29
FELADATOK	30
3. Újabb műveletek, újabb vektorok	33
3.1. Egy újfajta szorzás	33
3.2. Nyilak keresztszorozása	34
3.3. Poláris és axiális irányítottságnemek	35
3.4. A poláris és axiális irányítottságok algebrája	37
3.5. Poláris és axiális skalárok	39
3.6. A negyedik és utolsó vektor: a kéve	40

3.7. A rajzszőgek és kékék algebrája	41
FELADATOK	44
4. Kiegészítjük az állatseregletet	45
4.1. Ismétlés: Miért kell az invariancia?	45
4.2. Mi hiányzik még?	47
4.3. A maradék keresztszorítások	47
4.4. További skaláris szorzatok: skalársűrűségek és -kapacitások	49
4.5. A terminológia formalizálása	51
4.6. A „ko-” és a „kontra-” geometriai jelentése	53
4.7. Skalársűrűséggel és -kapacitással való szorzás	54
FELADATOK	55
5. Mezők és a geometriai vektoranalízis	57
5.1. Mezők	57
5.2. A gradiens	59
5.3. A rotáció	60
5.4. A divergencia	63
5.5. Az inverz műveletek	65
5.6. A differenciáloperátorok jelentése	66
FELADATOK	67
6. Koordináták és komponensek	69
6.1. Koordináta-rendszerek	69
6.2. A skalárkapacitás és -sűrűség bázisai	72
6.3. A nyíl- és a paklibázis	73
6.4. Pakli-nyíl skaláris szorzat, komponensekkel felírva	75
6.5. Miben különböznek a koordináta-rendszerek?	75
6.6. Csak úgy magunk között: hogy kell ezt elképzelni?	77
FELADATOK	78
7. A nagy algebraizációs szabály	81
7.1. Megfogalmazzuk a szabályt	81
7.2. A maradék bázisok	82
7.3. Keresztszorítások komponensekkel kifejezve	84
7.4. A bázisok hermafrodita irányítottságneve	85
7.5. A gradiens kiszámítása	86
7.6. A rotáció kiszámítása	87
7.7. Végül a divergencia	89
FELADATOK	90

8. Ég veled, Gumivilág!	93
8.1. A mérések szükségessége	93
8.2. Példa: az elektromágneses mező	93
8.3. Mögöttes Descartes-féle koordináta-rendszer	95
8.4. Illegális műveletek legalizálása; a Laplace-operátor	96
8.5. A Nabla-operátor	99
8.6. Ortogonális rendszerek	99
8.7. A metrika	102
FELADATOK	103
9. Utószó: Hogyan tovább?	105
9.1. Néhány fennmaradó probléma	105
9.2. Dimenziószám	105
9.3. Görbült terek	107
9.4. Indefinit metrika	107
9.5. A tenzoranalízis természete	108
9.6. Zárszó	109
Index	111

Előszó

A Michigani Egyetem végzőseinek és doktoranduszainak éveig oktattam a Matematikai módszerek a fizikában c. tárgyat. Eközben meggyőződésemmé vált, hogy a vektoranalízis területén a meglevő tankönyvek nem nyújtanak eleget: sok közülük egyszerűen csak elismétli, amit a diákok korábbi tanulmányaikból amúgy is tudnak, és kevés betekintést nyújtanak – ha nyújtanak egyáltalán – a téma alapvetően geometriai szerkezetébe. Ezért egy idő után az óráimon nem a tankönyvet, hanem a saját gondolatmenetemet követtem, sőt néhány éve még nem hivatalos jegyzeteket is szétosztottam, „Geometriai vektorok” címmel.

Mind a kollégák, mind a diákjaim lelkesedéssel fogadták ezeket a jegyzeteket, így természetesen adódott a gondolat, hogy érdemes volna publikálható formában újraírnom az anyagot. Azt azonban a kezdetektől világosan láttam, hogy az eredményül kapott könyvre csak akkor lesz igazán kereslet, ha elég alacsony az ára ahhoz, hogy a diákok egy használatban levő tankönyv *mellé*, kiegészítésként meg tudják venni. Beszéltem szakértőkkel, és kiderült, hogy a cél valóban megvalósítható, ha kamerakész kópiámból papírkötésű formátumban készül a könyv. Így aztán munkához láttam; a hároméves munka gyümölcsét tartja most kezében az olvasó.

Mikor elterveztem, hogy megírom a könyvet, el kellett döntenem, hogy a címe „Geometriai vektorok” legyen-e, és ennek megfelelően korlátozzam a könyv által tárgyalt területet, vagy pedig válasszam a „Geometriai vektorok és tenzorok” címet, és mindkét témát tárgyaljam, vállalva az ezzel járó kétszeres terjedelmet. Végül az előbbi mellett döntöttem, de nagy szomorúsággal, hiszen a tenzoranalízis is gyönyörű terület, és alapszintű tárgyalása semmivel sem igényel többet a vektoranalízisénél. Ugyanakkor a fizikusokban jóval kisebb a gyakorlati igény a tenzorok, mint a mindenütt használatos vektorok megértésére; és félttem, hogy az elkerülhetetlenül magasabb ár esetleg pont annak az olvasóközönségnek tenné elérhetetlenné a könyvet, akiknek pedig elsősorban szánom.

Olyan sok személynek tartozom óriási hálával e munka kapcsán, hogy csak általánosságban fejezhetem ki nekik köszönetemet. Mély és szívből jövő hálámat fejezem tehát ki először is a diákjaimnak, amiért folyamatosan kérdésekkel ostromoltak; másodszor a tanárainknak, akik ugyanerre tanítottak engem is; végül, de távolról sem utolsósorban pedig számtalan kollégámnak (köztük több névtelen bírálónak), akikkel beszélgetve mélyebben megértettem ezt a területet. Őszintén remélem, hogy ez a mélyebb megértés most másoknak is hasznára válhat.

Gabriel Weinreich
Ann Arbor, 1997. december

1. fejezet

Prológus: Miről szól ez a könyv?

1.1. Bevezetés

Háromdimenziós euklideszi térben élünk, vagy legalábbis általában így gondolkodunk. Igaz, hogy a speciális relativitáselmélet arra készítet bennünket, hogy az időt is hozzáadjuk, mint negyedik dimenziót, az általános relativitáselmélet szerint pedig görbült térként kell a világunkra tekintenünk, amelyben nem feltétlenül teljesül az a törvény, hogy minden háromszög belső szögeinek összege 180° , de ezzel együtt még mindig a „normális”, háromdimenziós euklideszi tér az, ahol az intuíciónk végső soron él, lélegzik, létezik: egyszóval ez az egyetlen fajta tér, amelyet igazán *magunk elé tudunk képzelni*.

Van tehát értelme annak, hogy a vektorokkal kapcsolatos vizsgálódásaink alatt erre a fajta térre összpontosítsunk, különösen mivel a háromdimenziós vektoroknak vannak olyan sajátosságai – például a keresztszorzat –, amelyeknek nem létezik pontos megfelelője más dimenziószámú terekben. Itt most nem olyan aspektusokra utalok, amelyek velünk, emberekkel – és azzal, hogy mit vagyunk képesek megfigyelni vagy elképzelni – kapcsolatosak, hanem olyanokra, amelyek a tér matematikai természetéből fakadnak. (Ez természetesen nem jelenti azt, hogy az ilyen sajátosságokat ne „általánosíthatnánk” kettő, négy vagy N dimenzióra. Az ilyen általánosításoknak azonban mindig ára van, amennyiben a kérdéses fogalomnak legalábbis néhány tulajdonságáról le kell mondanunk.) Az olvasó tapasztalni fogja, hogy bár a könyv az intuíciónk számára ismerős háromdimenziós, görbületlen euklideszi térre összpontosít, mégis megfelelően szilárd alapot ad ahhoz, hogy más típusú terekre is elkezdhessük az általánosítást (ld. 9. fejezet).

1.2. Hol kezdjük?

A könyvben újra és újra utalni fogok a vektoranalízis „hagyományos” tárgyalására, amelyben a vektorokat mindig nyilak jelzik, a vektorműveleteket pedig, mély geometriai tartalmuk ellenére, általában a Descartes-komponenseken végzett algebrai (vagy differenciál-) műveletekkel definiálják. Feltételezem, hogy az olvasó – nem csak egy elsőévesfizika-kurzuson, hanem talán még egyik-másik „haladó” kurzuson is – találkozott már ezzel a szemléletmóddal, most mégis összefoglalom a legfontosabb idetartozó műveleteket és képleteket, mielőtt továbbmennék.

Összeadás: Egy $\mathbf{A}$ és egy $\mathbf{B}$ vektor összeadása geometriai módon a „paralelogrammaszabály” alapján történik, ami szerint ugyanabba a pontba kell vinni a két nyíl elejét, meg kell rajzolni a teljes paralelogrammát, és az új $\mathbf{C}$ vektort ($\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összegét) a közös kiindulóponttól az átellenes csúcspontig kell rajzolni. Algebrailag $\mathbf{C}$ komponenseit úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ megfelelő komponenseit:

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x, \\ C_y &= A_y + B_y, \\ C_z &= A_z + B_z. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Skalárral való szorzás: A nyíl hosszát megszorozzuk a skalárral, ha pedig a skalár negatív, a nyíl irányát megfordítjuk. Algebrailag: a vektor minden komponensét megszorozzuk a skalárral.

Két vektor skaláris szorzata: A két nyíl hosszát összeszorozzuk, és az egészet megszorozzuk a két nyíl által bezárt szög koszinuszával. Komponensekkel kifejezve:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{1.2.2}$$

Két vektor vektoriális szorzata („keresztsszorzat”): Ha adott két vektor, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, a keresztsszorzatuk egy olyan vektor, amelynek a nagysága a két vektor által kifeszített paralelogramma területe, az egyenese $\mathbf{A}$ -ra és $\mathbf{B}$ -re is merőleges, irányát pedig a jobbkéz-szabály¹ határozza meg. Komponensekkel felírva:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

¹A jobbkéz-szabály pontos definíciója a 3. fejezetben szerepel. (A ford.)

Differenciáloperátorok mezőkön: Általában három ilyen operátort – a gradienst, a divergenciát és a rotációt – szokás komponensekkel definiálni, az alábbi módon:

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} \Phi)_x &= \partial \Phi / \partial x, \\(\operatorname{grad} \Phi)_y &= \partial \Phi / \partial y, \\(\operatorname{grad} \Phi)_z &= \partial \Phi / \partial z;\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \partial S_x / \partial x + \partial S_y / \partial y + \partial S_z / \partial z;\tag{1.2.5}$$

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{F})_x &= \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z, \\(\operatorname{rot} \mathbf{F})_y &= \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x, \\(\operatorname{rot} \mathbf{F})_z &= \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y.\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

Geometriai definiálásuk alig vagy egyáltalán nem fordul elő.

A fentiekkel ellentétben ebben a könyvben kifejezetten törekszem az algebrai műveletektől, ameddig csak lehet, távol tartani magam. Nem azért, mintha elvben bármi baj lenne velük, hanem mert nagyon elhomályosítják a vektorokkal kapcsolatos összes fogalom alapvetően geometriai természetét, holott ezek számunkra – az emberi intuíció sajátosságai miatt – sokkal könnyebben érthetőek. Sőt mi több, megpróbálom, legalábbis kezdetben, az összes definíciót és műveletet nem csupán *geometriailag*, hanem egyenesen *topológiailag* megfogalmazni, azaz olyan módon, ami nem igényel számszerű távolság- vagy szögméréseket. Úgy is mondhatnám, hogy olyan relációkat keresek, amelyek akkor is érvényben maradnak, amikor a teret eltorzítjuk.

Első meglepetésként, amellyel a módszerem együtt jár, ki fog derülni, hogy – szemben a „hagyományos” képpel – négy különböző fajtájú vektort kell majd elképzelnünk, és ezek közül csak az egyiket érdemes nyíllal jelölni. Első látásra ez szükségtelen bonyolításnak tűnhet, de rá fogunk jönni, hogy ennek köszönhetően lényegesen jobban ki tudjuk majd használni geometriai intuíciónkat a téma megértéséhez. Erre a gondolatra az 1.7. szakaszban még visszatérek.

Kezdjük tehát az elején!

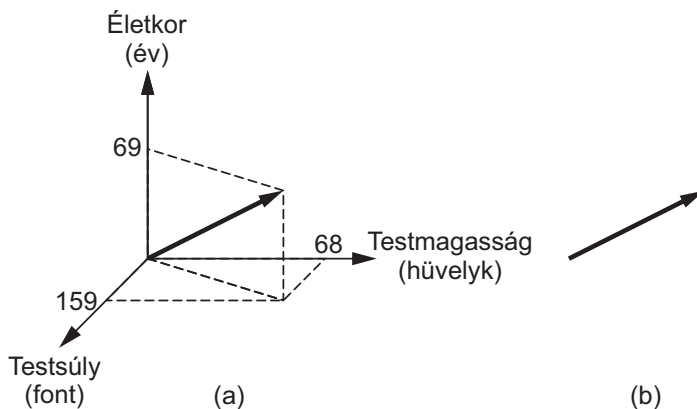
1.3. Mi nem vektor?

Az elemi fizikában gyakran felbukkan az a definíció, hogy a „vektor” *olyan valami, ami nagysággal és iránnyal is rendelkezik*. Ha ezt szó szerint vennénk, akkor egy gépkocsi is idetartozna – elvégre az is rendelkezik nagysággal és

iránnyal is; és bár természetesen egyetlen értelmes ember sem követné el ezt a hibát, a példa rámutat, hogy a fenti definíció tartalmatlan. Más szóval a gond nem az, hogy bárki összetévesztene egy gépkocsit egy vektorral, hanem az, hogy ezzel még egyáltalán nem tettük világossá a vektor alaptulajdonságait.

Egy jóval csalókébb definíció – abban az értelemben csalókébb, hogy ez már nem csak vicc, ebben már komoly félígazság is rejlik – a következő: *egy vektor három szám halmaza, és ezeket a számokat komponenseknek hívjuk.* Vagy kicsit formálisabban: *egy vektor olyan számok halmaza, amelyek egyetlen indexet hordoznak, és ez az index 1-től az adott tér dimenziószámáig fut.* Azért nevezem ezt „félígazságnak”, mert valóban léteznek területek, különösen amelyek a mátrixalgebrát alkalmazzák, ahol egy ilyen jelölésrendszer kényelmesen és jogosan használható. Ugyanakkor az így definiált vektorfogalom nem ad számot néhány olyan alapvető tulajdonságról, amelyeket rendszerint szeretünk magától értetődőnek venni.

Tekintsünk például egy „vektort”, amely egy személyt próbál leírni úgy, hogy három komponense az illető életkorát, magasságát és testsúlyát jelenti. Az 1.1a ábra egy ilyen konstrukción ábrázolja a könyv szerzőjét (a könyv írásának idején). Látunk itt három megfelelően feliratozott tengelyt, valamint egy nyilat, ami a kész „vektort” jelképezi. Ha azonban letöröljük a három tengelyt, és csak a nyilat hagyjuk meg, ahogy az 1.1b ábra mutatja, a nyíl teljesen értelmetlenné válik. Semmi rendkívüli nem történik abban az irányban, amerre a nyíl mutat, és a mérete sem jelent semmit.



1.1. ábra. Egy „vektor”, amelynek csak a komponensei léteznek