Egy négyzetszám utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet, ezért egy négyzetszám kétszeresének 0, 2 vagy 8 az utolsó jegye. Az egyenlőség két oldalát figyelve csak az a lehetőség marad, hogy m^2 is, $2n^2$ is 0-ra végződik. Ez azt jelenti, hogy az m és n számok mindegyike osztható 5-tel, ami ellentmond az $(m, n) = 1$ elvárásnak. Tehát hibás volt a kiinduló feltevés, ezért $\sqrt{2}$ irracionális.

Ajánlott feladatok

4. Bizonyítsuk be, hogy a $4k - 1$ alakú prímek száma végtelen! (Kövessük az euklideszi gondolatmenetet!)

5. Mutassuk meg, hogy van száz egymást követő összetett szám! (Eukleidész szerint bármely n-re van n darab egymást követő összetett szám.)

6. Van-e négyzetszám a tökéletes számok között?

7. Mutassuk meg, hogy az $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ szám irracionális!

8. A racionális számok halmaza mindenütt sűrű a számegyenesen, azaz bármely $0 < x < y$ esetén van olyan m és n egész szám, melyekre $x < \frac{m}{n} < y$ teljesül.

Milyen számhalmazra lesz a hányadosok halmaza mindenütt sűrű? Mit mondhatunk a négyzetszámokból képzett törtekről? Bizonyítsuk vagy cáfoljuk a következő állítást!

Bármely $0 < x < y$ számhoz található két olyan négyzetszám, m^2 és n^2, melyek hányadosa x és y között van: $x < \frac{m^2}{n^2} < y$.