

B. A. Korgyemskij

Piruettkörzövel

A LOGIKA VILÁGA

A sorozat kötetei

Philippe Boulanger: Ezeregy tudós éjszaka

Darvas Ferenc: Számcirkusz

Károlyi Zsuzsa: Csak logIQsan!

Károlyi Zsuzsa: Törd a fejed!

B. A. Korgyemszkij: A nyúl nem tanult matematikát

Dennis E. Shasha: Kiberrejtvények

Dennis E. Shasha: Dr. Ecco talányos kalandjai

Raymond Smullyan: A csúfolórigó nyomában

Raymond Smullyan: A hölgy vagy a tigris?

Raymond Smullyan: Alice Rejtvényországban

Raymond Smullyan: A tao hallgat

Raymond Smullyan: Emlékek, történetek, paradoxonok

Raymond Smullyan: Gödel nemteljességi tételei

Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?

Raymond Smullyan: Seherezáde rejtélye

Raymond Smullyan: Sherlock Holmes sakkrejtélyei

B. A. Korgyemskij

Piruettkörzövel

Matematikai feladványok nem csak iskolásoknak

Fordította Schultz György


TYPOTEX

A kötetben szereplő feladatok fordítása a következő kiadás alapján készült:

Математические за́втралки

Издательство Оникс, Москва, 2005

Hungarian translation © Schultz György, 2018

Hungarian edition © Typotex, Budapest, 2019

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

A magyar kiadást szakmailag ellenőrizte Fried Katalin

ISBN 978 963 493 068 6

ISSN 1787-3037

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu

és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók

és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Főszerkesztő: Horváth Balázs

Felelős szerkesztő: Széll Szilvia

Műszaki szerkesztő: Fried Katalin

Borítóterv: Faniszló Ádám

Készült a Kódex Könyvgyártó Kft. nyomdájában

Felelős vezető: Marosi Attila

Tartalom

1. A SZÁMOK ÉS ALAKZATOK KIS TITKAI	11
„...nem fogom titkolni...”	11
Szerelem első látásra	13
Kocka síklapokból	14
A kocka elkészült	15
Óriás és törpe	15
A háromszög átalakítása téglalappá	16
Mindenre képes... a tíz számjegy	16
Boldogulunk nulla nélkül is...	18
Két szórakoztató tétel	21
Fejtörő a segítségnyújtás témájára	21
Előkerülnek az elveszett számok	22
Növekszik és négyzetszám marad	23
Vajon lehetséges-e?	23
Hetet egy csapásra	24
Az előrajzoló feladata	25
A körző a tréfában és a munkában	26
Furcsa apróságok	27

Három nővér, egy szőnyeg és egy levél	29
128 – az elvarázslott szám	31
A varázslat ellillan.	31
Az egész számok egyedülálló hármasa	32
A számok közti összefüggések „befejezetlen szimfóniája” (tíz tételben)	32
Az „antik szépség” születése	34
A poliédermodellek kiterítése	35
Az oktaéder kiterítésének titka	36
Geometriai fejtörő	37
Püthagorasz gúlája	37
A számok is lehetnek különcök	38
„Csúnya” tetraéder készítése négyzet részeiből	40
Az űrhajós interjúja	40
Hogyan lett az üvegből gyémánt?	41
„Aritmetika”: a képességek fenőköve	43
Nem Rubik-kocka	43
Hogyan csinálja ugyanazt a fizikus és a matematikus?	44
A Möbius-szalag és a gyűrűk összekötése (tizenhárom kísérlet papírszalaggal)	44
MEGOLDÁSOK	49
 2. A TÁVOLI MÚLTBÓL	 75
Pitagorasz kör	75
A hetes szám istenadta privilégiumai	76
A maharadzsa végrendelete	79
Legendás feladat	82
„Adjatok egy fix pontot, és kimozdítom helyéről a Földet”	82
Meglepetések a diofantoszi egyenletekkel	83
Az „egy” mágikus ereje	85
Grúz kecskék és orosz juhok	87

Velencei tréfa (a 16. századból)	88
Régi kínai feladat	88
Tangram	89
Valaha így szoroztak Oroszországban	91
A szorzás indiai módszere	93
A csodálatos tündérrózsa	94
Korongok a táblán – Ovidius és Shakespeare szerint	95
Ez hogyan lehetséges?	96
Voltaire filozófiai találós kérdése (szabad átírásban)	96
Hogy is van ez?	96
Kereskedtek – vigadtak, összeszámolták – könnyeztek	97
Egyébként...	97
Emléktárgy Indiából	98
Majomcsapat (óindiai feladat)	100
Az 1729-es szám nevezetessé válik	100
Neves és névtelen számháromszögek	101
Alfabetika – rejtjelezett aritmetika	105
Geometriai klasszikusok	110
Akár a vitaminok!	112
A varázs érzete	112
Így történt... (három, múltba tekintő megjegyzés)	118
Precíz csók	120
MEGOLDÁSOK	123

3. SZOKATLAN A MEGSZOKOTTBAN	144
A naptár szeszélyei	144
„Összámok”	144
Vajon lehetséges-e...	145
Találjunk még számokat!	147
Szokatlan meghívás, és mégis...	147
Nevezetes számok	147
Szokatlan a megszokottban	148

Útvonal öt ponton át	148
Egy hatjegyű szám rejtett szépsége	148
Szomszédos négyzetek	149
Szeszélyes szomszédok (folytatás)	150
Egyenletesen változó mennyiségek grafikonja... . . .	150
A bűvös négyzetek varázslatos szépsége	155
Orosz rulett	156
Ritkaságok a prímszámok között	157
Szórakoztató prímszámcsapatok	159
Tökéletes számok	164
Matematizált jogtudomány	166
A vesztes Mike visszavágót óhajt	170
Még három rébusz	170
MEGOLDÁSOK	171
4. FEDEZZÜK FEL!	186
Garantált oszthatóság	186
A megismerés útja vonzó, de nem rózsákkal övezett . .	186
Hol kezdődik a „felfedezés”?	189
A pitagoraszai számhármakok egy gyors előállítás . .	191
Rajta, rajta!	192
Figyelemre méltó kvartettek	194
Három sugár egy „fogatban”	194
Egy híján négyzetszám	195
Három különböző feladat nem várt rokonsága	196
Csodálatos négyzetszámok	198
Különös átfogók	201
Három középérték két fényképe	203
A harmonikus sorozat és a zenei hangközök	206
A sor számokból áll, de maga a sor nem szám	208
Egy fejtörő – négy „felfedezés”	209
MEGOLDÁSOK	214

5. SZEMTŐL SZEMBEN A MATEMATIKÁVAL

- 17 KIHÍVÁS	229
1. feladat	229
2. feladat	230
3. feladat	231
4. feladat	231
5. feladat	233
6. feladat	234
7. feladat	234
8. feladat	235
9. feladat	236
10. feladat	236
11. feladat	237
12. feladat	238
13. feladat	239
14. feladat	240
15. feladat	240
16. feladat	241
17. feladat	242

1. A SZÁMOK ÉS ALAKZATOK KIS TITKAI

A matematika az aritmetikából és a geometriából egyidejűleg született.

A. D. Alekszandrov¹

Végtelen sok nem szembeszökő számtani és geometriai összefüggés van, amelyek elegendő mértékben magukba szívták „a hideg számok hevét” és a geometriai absztrakciók szépségét. A természetkutató-matematikos fürkésző tekintete általában észreveszi ezeket.

„...nem fogom titkolni...”²

1. A 12-nek és a fordítottjának, 21-nek a titka ismert: e számok négyzetei (144 és 441) szintén egymás fordítottjai. Keresünk még egy ilyen tulajdonságú számpárt!

2. Ha az n^2 négyzetszám 25-re végződik, például 625, akkor hátulról a harmadik számjegye feltétlenül páros, de nem 4, és nem 8. Bizonyítsuk be!

3. E két képrejtvény alapján

$$(\bigcirc \square)^{\square} = \triangle \parallel \square \square$$

$$(\triangle \triangle)^{\square} = \triangle \square \square \triangle$$

szinte magától értetődő a következő két kérdés:

¹ Alekszandr Danyilovics Alekszandrov (1912–1999) orosz matematikus.

² Az idézett szöveg Pjotr Iljics Csajkovszkij *Anyegin* című operájában hangzik el, Gremin herceg áriájában.

a) Egy kétjegyű szám hányadik hatványának állhat ugyanaz a számjegy az utolsó három helyi értéken?

b) Egy kétjegyű, azonos számjegyekből álló szám hányadik hatványa ugyanannyi balról jobbra, mint jobbról balra olvasva, azaz tükör- vagy palindromszám?

4. A „nincs szabály kivétel nélkül” szabály nemcsak az emberek esetében, de néha az egész számok és a geometriai alakzatok körében is igaz.

Próbáljuk meg előállítani a természetes számokat két négyzetszám különbségeként – így nyilvánvalóvá válik mind a „szabály”, mind a „kivételek”.

$1 = 1^2 - 0^2$	2	$3 = 2^2 - 1^2$
$4 = 2^2 - 0^2$	$5 = 3^2 - 2^2$	6
$7 = 4^2 - 3^2$	$8 = 3^2 - 1^2$	$9 = 5^2 - 4^2$
10	$11 = 6^2 - 5^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
⋮		

Egy kis figyelmes áttekintés után adódik a feltevés: a $2(2n-1)$ alakú páros számok ($n \in \mathbb{N}$) kivételével minden természetes szám előállítható két négyzetszám különbségeként.

Páros szám négyzete páros, páratlané páratlan. Egy páros és egy páratlan négyzetszám különbsége páratlan. Két páros szám négyzetének különbsége osztható 4-gyel, mert mindkettő négyzete osztható 4-gyel. Két páratlan szám négyzete egyaránt 1 maradékot ad 4-gyel osztva, a különbségük tehát osztható 4-gyel. Így két négyzetszám különbsége nem adhat 2-t maradékkul 4-gyel osztva.

Minden más természetes szám felírható két négyzetszám különbségeként. Ha a szám osztható 4-gyel, azaz $4n$ alakú,

akkor $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$, ha pedig páratlan, azaz $2n+1$ alakú, akkor $2n-1 = n^2 - (n-1)^2$.

Győződjünk meg róla! Valami titokzatos most világgossá vált.

Figyelembe véve azonban Byron különös aforizmáját, amely szerint „a tudomány egyes tudatlanságokat másokra cserél”, folytatjuk a természetes számok négyzetei különbségének a megfigyelését:

$$\begin{array}{lll} 2^2 - 0^2 = 2 \cdot 2 & 3^2 - 0^2 = 3 \cdot 3 & 4^2 - 1^2 = 3 \cdot 5 \\ 5^2 - 2^2 = 3 \cdot 7 & 6^2 - 1^2 = 5 \cdot 7 & 7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11 \\ 8^2 - 3^2 = 5 \cdot 11 & 9^2 - 2^2 = 7 \cdot 11 & \dots \end{array}$$

Vegyük észre: az egyenlőségek jobb oldalán álló mindkét tényező prímszám. Így jutottunk el egy további „amatőr” hipotézishez: *Bármely 1-nél nagyobb x természetes számhoz található olyan y természetes szám, amelyre $x^2 - y^2 = p_1 \cdot p_2$, ahol p_1 és p_2 prímszám.*

Egy további megközelítése is van ennek a hipotézisnek.

Legyen $x - y = p_1$ és $x + y = p_2$. Ekkor $x = \frac{p_1 + p_2}{2}$, azaz *elképzeltető-e, hogy bármely 1-nél nagyobb x természetes szám két prím átlaga?*

Szerelem első látásra

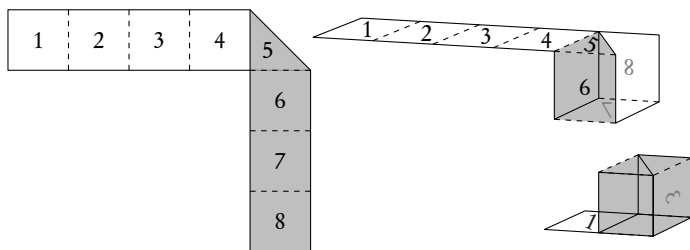
A matematikában – a kitűzött feladatra vetett pillantás után – így jutunk azonnali helyes következtetésre. Ezt természetesen csak a számokról és alakzatokról előzetesen szerzett ismeretek sokasága teszi lehetővé.

Tegyük próbára magunkat a „szerelem első látásra” kihívásának az alábbi feladatok esetében: merjünk azonnali választ adni, majd támasszuk alá válaszunk helyességét!

1. Melyik négyzetszám az 1992, 40 835, 6887, 5348, 783 számok közül?
2. Milyen számjegyet kell balról hozzáírni a 425-höz, illetve a 845-höz, hogy négyzetszámot kapjunk?
3. Két háromszög oldalainak hosszúsága 5, 5, 6 és 5, 5, 8. Ránézésre állapítsuk meg, egyenlő területűek-e (anélkül, hogy ezt kiszámítanánk)!

Kocka síklapokból

Egy egyik oldalán fehér, másikon színes papírlapból téglalap alakú szalagot vágunk ki, amelynek hossza a szélességének a nyolcszorosa. A szalagot szaggatott vonalakkal nyolc egyenlő négyzetre osztjuk, az ötödik négyzetet az átlója mentén behajtogatjuk (lásd az ábrát).



Ezt a hajtást megtartva hajlítsuk be a szalagot a szaggatott vonalak mentén is, majd zárjuk a négyzeteket úgy, hogy azok kockát alkossanak, amelynek élhossza megegyezik a szalag szélességével. A négyzet hat lapja kívülről színes. A keletkeztetett kocka első és nyolcadik négyzetét ragasszuk össze, így a kocka nem fog szétbomlani.

Jó kis móka ez kisebbeknek!

A kocka elkészült

Most képzeletben írjuk az 1-től 8-ig terjedő egész számokat a kocka csúcsaihoz úgy, hogy a számok összege a hat lap mindegyikén ugyanannyi legyen!

Óriás és törpe

Az óriás most a következő szám:

1 639 344 262 295 081 967 213 114 754 098 360 655 737 704 918 032 787.

Ez a szám 52 számjegyből áll.

– Na és? – gondolhatja az olvasó. – Nem nehéz akármilyen sok számjegyből álló számot felírni.

Nem erről van szó. Ez az óriás különleges tulajdonsággal rendelkezik. Minden fáradság nélkül meg lehet szorozni 71-gyel: változatlanul lemásoljuk ennek a számóriásnak az összes számjegyét, a szám elé (balról) 1-est, a végére (jobbról) 7-est írunk, és megkapjuk a szorzatot. (Ellenőrizzük!)

Ennek az óriásnak a legkisebb (törpe) rokona a 8. Ha 86-tal kívánjuk megszorozni, elé 6-ot, a végére 8-at írunk. Valóban: $8 \cdot 86 = 688$.

Vajon sok hasonló, a kétjegyű szorzókkal szemben ilyen figyelemre méltó tulajdonsággal rendelkező szám van? Úgy látszik, ezt még senki sem tisztázta.

Nemrégiben találkoztam egy további ilyen számmal. Ez a 41 096, amelyet megszorozva egy bizonyos $\overline{ab}$ kétjegyű számmal (itt a és b számjegyeket jelentenek), az eredmény, mint a korábbi esetekben: $41\,096 \cdot \overline{ab} = \overline{b\,410\,96a}$, azaz úgy kapjuk a szorzatot, hogy a szorzandó elé (az egyesek helyi értéke-

re) kerül a szorzó tízes számjegye, a legnagyobb helyi értékre pedig a szorzó egyes számjegye.

Határozzuk meg az $\overline{ab}$ kétjegyű szám a és b számjegyet!

A háromszög átalakítása téglalappá

Rajzoljunk papírlapra egy tetszőleges háromszöget, és mutassuk meg, hogy két egyenes vonalú vágással három olyan részre lehet osztani, amelyekből téglalap állítható össze!

Mindenre képes... a tíz számjegy

*A számok nem irányítják a világot,
de megmutatják felépítését.*

J. W. Goethe

1. Az 1 előállítható két olyan tört összegeként, amelyekben a tíz számjegy mindegyike pontosan egyszer szerepel:

$$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1. \text{ Hasonló módon előállítható } 100 \text{ is. Hogyan?}$$

2. Érdekes összefüggés alkotható három tízjegyű számból, amelyek mindegyike különböző számjegyeket tartalmaz: $9\ 876\ 543\ 210 - 0\ 123\ 456\ 789 = 9\ 753\ 086\ 421$, ezek közül az első, a $9\ 876\ 543\ 210$, a lehető legnagyobb számjegyeinek bármilyen felcserélésével kisebb számot kapunk. Igaz ez?

Ha e szám számjegyeinek összes nem 0 számjeggyel kezdődő permutációját³ képezzük, megkapjuk az összes különböző számjegyekkel felírható tízjegyű számot. Az ilyen számok

³ Permutáció: sorrend. Itt: a számjegyek felcserélésével kapható összes, nem 0 számjeggyel kezdődő szám.

egy több mint hárommillió elemű halmazt alkotnak. Nevezük ezt a halmazt Φ -nek.

A Φ halmazban legalább 47 négyzetszám (n^2) van. Nyilván van köztük egy legkisebb ($1\,026\,753\,849 = 32\,043^2$). Egy számítógépes program az $n \in [31\,000; 65\,637]$ intervallumban 44 csupa különböző számjegyből álló tízjegyű négyzetszámot talált.

Én további hármat ismerek a $65\,637 \leq n \leq 99\,100$ intervallumban. Egyet közülük megadok: $9\,814\,072\,356 = 99\,066^2$, nyilván ez a legnagyobb a Φ halmazban. A maradék kettő megkeresését az olvasóra bízom.

3. Egyszer Harbinban,⁴ az utcán tanúja voltam, hogy egy iskolás gyerekekkel körülvett vak kínai hibátlanul kitalálta néhány szám összegének eltitkolt számjegyét. A vak felkérte a gyerekeket, hogy mindegyikük adjon össze két vagy három tetszőleges számot, de kikötötte, hogy a számokban a tíz számjegy mindegyike pontosan egyszer szerepeljen. Észrevettem, hogy az egyik fiú a következő összeadást írta fel: $63\,108 + 954 + 72 = 64\,134$.

A számok összeadása után meg kellett nevezni (valamelyik kivételével) az összeg számjegyeit tetszőleges sorrendben.

A kínai azonnal megnevezte az összeg eltitkolt számjegyét.

Jöjünk rá a trükk titkára!

4. Íme egy igazi kuriózum: a tíz számjegy két szabályos sorozatot alkotott: $4\,3\,2\,1\,0$ és $9\,8\,7\,6\,5$, majd a második sorozat „fésűszerűen” összecsúszott az elsővel. A keletkezett 4938271605 számot Kolja 2-vel szorozta, és... meglepődött. Mi lepte meg?

⁴ Harbin: észak-kínai nagyváros.

5. Létezik egy kétjegyű szám, amelynek négyzete és köbe együtt egyszer tartalmazza a tíz számjegy mindegyikét.

Számítógépen kiszámíthatjuk az összes „gyanús” szám négyzetét és köbét. Ilyen szám sok van, és ez egy meglehetősen unalmas „szórakozás”. A megoldást akkor tekinthetjük szépnek, ha előzetesen a „jelöltek” számát indokoltan a lehető legkevesebbre csökkentjük. Találjuk meg ezt a számot!

Boldogulunk nulla nélkül is...

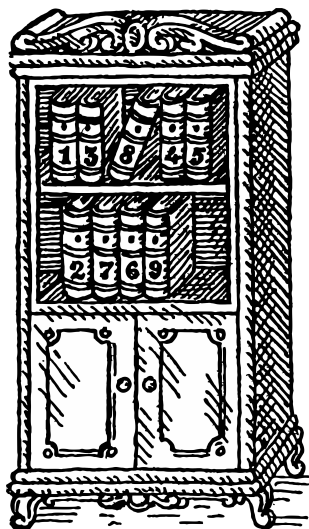
...csak lehetőleg ne úgy, mint ahogy Edvard Grieg (1843–1907), a nagy norvég zeneszerző tette az iskolás éveiben. Önéletrajzában meséli el, hogy amikor egy szorzást kellett elvégeznie, a feladat gyorsabb végrehajtása érdekében figyelmen kívül hagyott minden nullát, ami a műveletvégzés során felbukkant. „Teljes kudarcot vallottam. Ezek után – írja öngúnnyal Grieg – megtanultam, hogy az összes nullát voncsolnom kell magam után. Nem szabadulsz tőlük.”

Mi más helyzetben vagyunk: a fegyvertárunkban egyszerűen nincs nulla.

1. A fennmaradó kilenc számjegyből kilencjegyű számot kell képezni úgy, hogy a háromjegyű a szám, amelyet a szám első három számjegye alkot, egyharmada legyen a b számnak, amelyet a szám utolsó három számjegye alkot, a c szám pedig, amelyet a középső három számjegy alkot, egyenlő legyen a b és a a számok különbségével.

2. Kuriózum: $987\ 654\ 321 - 123\ 456\ 789 = 864\ 197\ 532$. Mindhárom számban mind a 9 számjegy szerepel, és mindegyik egyszer.

3. Egy kilenckötetes kiadvány köteteit a könyvszekrény két polcán helyeztem el, de nem a kötetek számozása szerinti sorrendben.



Iskolás unokám, miután vetett egy pillantást a könyvekre, megállapította:

– A könyvek gerincén lévő számok törtet alkotnak: $\frac{13\ 845}{2769}$, ennek értéke pontosan 5.

Ezek után unokám a könyvszekrényhez lépve a felső polcon a 8. kötetet az utolsó helyre tette, az alsó polcon pedig ebben a sorrendben helyezte el őket: 6., 7., 2., 9, majd közölte, hogy a könyvek gerincén lévő számok a $\frac{13\ 458}{6729}$ törtet alkot-

ják, amelynek értéke 2. Végül levette mind a kilenc kötetet a polcokról, és a következő váratlan feladatot adta:

– Keresd meg a kilenc kötet további hat olyan elrendezését, amelyben öt kötet van a felső, négy pedig az alsó polcon, és a keletkező törtek értéke pontosan 3, 4, 6, 7, 8 és 9!

Az olvasó segítségét kérem az ilyen elrendezések megtalálásához.

4. Nyolc darab „+” jelet beszúrva az 1 2 3 4 5 6 7 8 9 és a 9 8 7 6 5 4 3 2 1 számjegyek közé, eredményként 45-öt kapunk. Ha nemcsak „+”, de „–” jeleket is használhatunk, feleannyi „+” és „–” jel alkalmazásával megkaphatjuk ugyanezt az összeget

(45-öt). Közben a számjegyeket sorrendjük megváltoztatása nélkül két- és háromjegyű számokká egyesíthetjük. Hogyan?

5. Egy fiatal matematikusnő – állítása szerint – megtalálta az $\overline{ab \cdot cde} = \overline{fghk}$ és $\alpha \cdot \overline{\beta\gamma\delta\epsilon} = \overline{\varphi\varrho\eta\psi}$ egyenletek összes megoldását: mindkét egyenletben kilenc számjegy szerepel, és a nulla nincs közöttük.

Két megoldást közlünk az általa talált összesen kilenc közül: $39 \cdot 186 = 7254$ és $4 \cdot 1738 = 6952$.

A matematikusnő további hét megoldását az e fejezet végén található „Megoldások” című részben ismertetjük. Feltételezem, az olvasó szívesen keresne maga is megoldásokat.

6. Valaki azt állítja, hogy 1-től 1000-ig bármely természetes szám – a 821, 827, 831, 883, 887, 911, 929 és a 941 kivételével – kifejezhető számtani műveletekkel öt számjegy (ezek: 2, 3, 4, 5, 6) mindegyikét csak egyszer használva.

Például: $21 = 4 \cdot (5 + 6) - 23$; $914 = 26 \cdot 35 + 4$; $987 = 5^4 + 362$.

7. Valami különös dolog történik, ha az 12 345 679 számot $1 \cdot 9 = 9$ -cel, $2 \cdot 9 = 18$ -cal, ..., $9 \cdot 9 = 81$ -gyel szorozzuk. Vajon mi lehet az?

8. A befejező kuriózum:

$$\sqrt{12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321} = 111\ 111\ 111.$$



Az összes állítás ellenőrzését az olvasóra bízuk.