

Nágel Árpád

Folytonos dinamikai rendszerek

Nágel Árpád

Folytonos dinamikai rendszerek

Feladatgyűjtemény

A mű elektronikus kiadása a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz. projekt keretén belül készült.

© Nágel Árpád, Typotex, Budapest, 2019
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 076 1

Szakmai lektor: Kiss Márton

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős vezető: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
Műszaki szerkesztő: Nagy Tamás
A borítót készítette: Szalay Éva

TARTALOM

Előszó	7
I. rész Lineáris rendszerek.....	9
I.1. Elméleti bevezető	11
I.2. Feladatok.....	17
II. rész Nemlineáris rendszerek	23
II.1. Elméleti bevezető	25
II.2. Feladatok.....	47
III. rész Kétdimenziós autonóm periodikus rendszerek.....	63
III.1. Elméleti bevezető	65
III.2. Feladatok.....	73
IV. rész Lokális és globális vizsgálatok	83
IV.1. Elméleti bevezető	85
IV.2. Feladatok.....	91
V. rész Globális vizsgálatok	97
V.1. Elméleti bevezető	99
V.2. Feladatok.....	125
VI. rész Megoldások	133
VI.1. Megoldások – I. rész.....	135
VI.2. Megoldások – II. rész	153
VI.3. Megoldások – III. rész.....	233
VI.4. Megoldások – IV. rész.....	261
VI.5. Megoldások – V. rész	301
Irodalomjegyzék	363

ELŐSZÓ

A feladatgyűjtemény célja, hogy a témakör iránt érdeklődő egyetemi hallgatók részére bőséges gyakorlási lehetőséget adjon a differenciálegyenletek stabilitáselmélet témaköréből. Ezen a speciális területen igen kevés a magyar nyelven elérhető példatár. Ezek számát igyekeznek gyarapítani ez a feladatgyűjtemény is. Az *első részben* lineáris rendszerekkel kapcsolatos feladatok kaptak helyet két és három dimenzióban. Itt stabilis, instabilis és centrális alterekre vonatkozó példák szerepelnek. A *második rész* részletesen foglalkozik a klasszikus linearizációs és a Ljapunov-féle direkt módszerrel, Hamilton-rendszerekkel, valamint nemlineáris rendszerek globális fázisképével. A *harmadik rész* periodikus megoldások létezésével, Poincaré-féle stabilitással és indexelmélettel foglalkozik. A *negyedik részben* szerepelnek a stabilis, instabilis, illetve centrális sokasági tételekkel, valamint a homoklinikus és heteroklinikus pályák megadásával kapcsolatos példák is. Az utolsó, *ötödik részben* rendszerek közötti topologikus ekvivalenciákról esik szó. Egy-két példa erejéig itt kitérünk ω -határhalmazokkal, vonzó halmazokkal kapcsolatos feladatokra, Poincaré-leképezésre és a Floquet-elméletre is. A fejezet végén részletesen beszélünk trajektóriák végtelenben való viselkedéséről.

A témakörrel való ismerkedést könnyíti, hogy szinte kivétel nélkül minden feladatnak a teljes, részletes megoldását is megadjuk. Sok helyen a megoldást ábrával is illusztráltuk. A közel 280 feladat megoldásait több mint 100 ábra segíti. A feladatok könnyebb megértése végett, a kitűzésük előtt, lényegre törő elméleti összefoglalót adunk. Itt felsoroljuk a témakör alapvető definícióit és a fontosabb állításokat, bizonyításukat, valamint az ezek közötti összefüggéseket. A feladatok változó nehézségűek. Megtalálhatók egyszerűbb alapfeladatok és gondolkod-

tatóbb problémák egyaránt. A nehezebb feladatokat *-gal jelöltük meg. Noha mára a differenciálegyenletek megoldására, a megoldások *kvalitatív* vizsgálatára számtalan kitűnő programcsomag (Maple, Mathematica, Matlab stb.) áll az érdeklődők rendelkezésére, a kapott eredmények értelmezéséhez a fogalmak biztos ismerete szükséges. Ezért is tartja a szerző fontosnak és hiánypótlónak ezt a példátartat. A feladatok összeállításánál az Irodalomjegyzékben felsorolt könyvekre erősen támaszkodtunk. Az ábrák Maple és GeoGebra programcsomaggal készültek.

A szerző köszönetet mond a családjának, akik eltűrték (sőt időnként érdeklődve nézték), hogy sokszor a takarítás, a főzés, a kerti munkálatok és például a mosogatás helyett különféle fázisgörbékkel foglalkozhatott. Köszönet illeti a jegyzet lektorát, Kiss Márton egyetemi docenst, aki mindenre kiterjedő figyelemmel igyekezett javítani az érthetőségen, és segítette kigyomlálni a könyv hibáit.

Péteri, 2019. nyár

Nágel Árpád

I. RÉSZ

LINEÁRIS RENDSZEREK

I.1. Elméleti bevezető

A továbbiakban tekintsük az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) \quad (1.1.)$$

állandó együtthatós, homogén lineáris n -ed rendű differenciálegyenlet-rendszert. Jelölje az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit multiplicitással $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ és jelölje $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ azt a bázist az n -dimenziós euklideszi térben, amely a mátrix Jordan-normálformáját adja. Ismeretes, hogy ha a sajátértékek valósak és különbözőek, akkor ezek éppen a megfelelő sajátvektorok. Ha vannak komplex konjugált sajátértékpárok is, akkor az ezeknek megfelelő komplex sajátvektor valós és képzetes része lesz a megfelelő bázisban. Többszörös sajátértékek esetén, ha a sajátaltér dimenziója kisebb, mint a sajátérték multiplicitása, akkor az általánosított sajátvektorok kerülnek a bázisba. Ezen bázis segítségével lehet definiálni az (1.1.) rendszer stabilis, instabilis és centrális alterét.

1.1. definíció: Legyen $\{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{A}$ mátrix valós Jordan-normálalakját meghatározó egy bázis. Jelölje λ_k azt a sajátértéket, amelyhez az $\underline{s}_k$ bázisvektor tartozik. Ez esetben az

$$E_s(\underline{A}) = \langle \{\underline{s}_k : \operatorname{Re} \lambda_k < 0\} \rangle,$$

$$E_u(\underline{A}) = \langle \{\underline{s}_k : \operatorname{Re} \lambda_k > 0\} \rangle,$$

$$E_c(\underline{A}) = \langle \{\underline{s}_k : \operatorname{Re} \lambda_k = 0\} \rangle$$

altereket az (1.1.) rendszer stabilis, instabilis, illetve centrális alterének nevezzük.

(Itt a $\langle \cdot \rangle$ a megfelelő vektorok által kifeszített alteret jelöli.)

1.2. megjegyzés: Ismeretes, hogy

- a) a fenti alterek invariánsak $\underline{A}$ -ra, azaz $A(E_i) \subset E_i$ ($i = s, u, c$), és a direkt összegük az egész $\mathbb{R}^n$ tér,
- b) az $E_s(\underline{A})$, $E_u(\underline{A})$, ill. az $E_c(\underline{A})$ alterek invariánsak az (1.1.) rendszerre, azaz ha $t \rightarrow \underline{x}(t)$ az (1.1.) megoldása és $\underline{x}(0) \in E_s(\underline{A})$, $E_u(\underline{A})$, ill. $E_c(\underline{A})$, akkor $\underline{x}(t) \in E_s(\underline{A})$, $E_u(\underline{A})$, ill. $E_c(\underline{A})$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re,
- c) minden $\underline{x}_0 \in E_s(\underline{A})$ ($E_u(\underline{A})$) esetén $e^{\underline{A}t} \underline{x}_0 \rightarrow \underline{0}$, ha $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), sőt a konvergencia exponenciális sebességű, azaz $\underline{x}_0 \in E_s(\underline{A})$ esetén van olyan $K, \alpha > 0$, hogy $|e^{\underline{A}t} \underline{x}_0| \leq K e^{-\alpha t} |\underline{x}_0|$, ha $t \geq 0$. ($\underline{x}_0 \in E_u(\underline{A})$ esetén van olyan $L, \beta > 0$, hogy $|e^{\underline{A}t} \underline{x}_0| \leq L e^{\beta t} |\underline{x}_0|$, ha $t \leq 0$.)

Ha $\underline{A}$ speciálisan 2×2 -es mátrix, azaz a (1.1.) speciálisan kétdimenziós rendszer, akkor az invariáns alterekkel való jellemzés tovább finomítható.

1.3. definíció: Legyenek az $\underline{A}$ 2×2 -es mátrix sajátértékei λ_1 és λ_2 .

Azt mondjuk, hogy az $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t)$ rendszer egyensúlyi helyzete

- stabilis csomó, ha $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$,
- instabilis csomó, ha $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$,
- elfajult stabilis csomó, ha $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós,
- elfajult instabilis csomó, ha $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, és a hozzájuk tartozó sajátaltér egydimenziós,
- nyereg, ha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$,
- stabilis fókusz, ha λ_1, λ_2 nem valósak, és $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$,
- instabilis fókusz, ha λ_1, λ_2 nem valósak, és $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$,
- centrum v. örvénypont, ha $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = 0$, azaz λ_1 és λ_2 tiszta képzetesek.

Ha az $\underline{A}$ mátrix determinánsa 0, akkor az origó nem izolált egyensúlyi helyzet.

Ezen négy elfajult eset a következő:

1. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont,
2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$, akkor végtelen sok stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi pont,
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, és a hozzá tartozó sajátaltér kétdimenziós, akkor minden pont egyensúlyi pont,
4. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, és a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós, akkor végtelen sok instabilis egyensúlyi pont van.