

Kovács Sándor

Differenciaegyenletek

Kovács Sándor

Differenciaegyenletek



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Regionális
Fejlesztési Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

SZÉCHENYI 2020

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

© Kovács Sándor, Typotex, Budapest, 2020
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta: György Szilvia

ISBN 978 963 493 099 0

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa

A borítót készítette: Szalay Éva

Nyomta és kötötte: László András és Társa Nyomdaipari Bt.

Felelős vezető: László András

Tartalom

Előszó	9
Jelölések	11
1. Diszkrét kalkulus	13
1.1. A differencia-, az eltolás- és az identitásoperátor	15
1.2. A faktoriálisfüggvény	32
1.3. Az összegzőoperátor	39
1.4. Klasszikus tételek diszkrét változata	52
1.5. Generátorfüggvények	64
1.6. Az annihilátor-módszer	85
1.7. A Laurent-transzformáció	90
2. Differenciaegyenletek	103
2.1. Differenciaegyenletre vezető feladatok	103
2.1.1. Lakáskölcsön visszafizetése	103
2.1.2. Fibonacci feladata	104
2.1.3. Kamatos kamat	105
2.1.4. Radiokarbonos kormeghatározás	105
2.1.5. Hanoi tornyai	106
2.1.6. Kombinatorikus geometria	107
2.1.7. Differenciálegyenletek hatványsoros megoldása	107
2.1.8. A Collatz-feladat	109
2.1.9. Csebisev-polinomok	110
2.1.10. Paraméteres integrálok kiszámítása rekurzióval	110
2.1.11. Differenciálegyenletek megoldásának közelítése	111

2.1.12. Populációgenetika	111
2.1.13. Csatornaforgalom	112
2.2. Alapfogalmak	112
2.2.1. A differenciaegyenlet fogalma	112
2.2.2. Diszkrét dinamikai rendszerek	121
3. Lineáris differenciaegyenletek	145
3.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek	145
3.2. Alkalmazások	161
3.2.1. Egy növekedési modell	161
3.2.2. Az infláció „bér-ár-spirál”-modellje	162
3.2.3. Lakáskölcsön visszafizetése	163
3.2.4. Kamatos kamat és diszkontált jelenérték	167
3.2.5. Változó kamatlábak	168
3.2.6. Sertés piac	169
3.2.7. Áramkör működése	171
3.3. Másodrendű lineáris differenciaegyenletek	172
3.3.1. Változó együtthatójú egyenletek	172
3.3.2. Állandó együtthatós egyenletek	182
3.4. Alkalmazások	211
3.4.1. Samuelson akcelerációs modellje	211
3.4.2. Hicks modellje	216
3.4.3. A Fibonacci-sorozat	218
3.4.4. A tönkremenési probléma	224
3.5. Magasabb rendű lineáris differenciaegyenletek	226
3.5.1. Változó együtthatójú egyenletek	226
3.5.2. Állandó együtthatójú egyenletek	237
3.6. Lineáris differenciaegyenlet-rendszerek	245
3.6.1. Változó együtthatójú egyenletek	245
3.6.2. Állandó együtthatójú egyenletek	265
4. Speciális nemlineáris differenciaegyenletek	275
4.1. A Riccati-féle differenciaegyenlet	277
4.2. Az általánosított Riccati-féle differenciaegyenlet	282
4.3. Homogén differenciaegyenletek	283

4.4. Egy logaritmikus differenciaegyenlet	284
4.5. Gyökkeresés	285
5. Stabilitás	287
5.1. A stabilitás fogalma	287
5.2. Stabilitás speciális esetekben	298
5.2.1. Lineáris differenciaegyenletek	298
5.2.1.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek	298
5.2.2. Másodrendű lineáris differenciaegyenletek	299
5.2.3. Lineáris differenciaegyenlet-rendszerek	303
5.2.3.1. Változó együtthatójú egyenletek	303
5.2.3.2. Állandó együtthatójú egyenletek	310
5.2.4. Nemlineáris differenciaegyenletek	314
5.3. Alkalmazások	324
5.3.1. A piaci egyensúly (a kereslet-kínálat pókhálómodellje)	324
5.3.2. Sertéspiac	327
5.3.3. Goodwin piacmodellje	327
5.3.4. Samuelson akcelerációs modellje	329
Függelék	330
A függelék. Binomiális együtthatók	331
B függelék. Hatványösszegek	350
C függelék. Hatványsorok	360
D függelék. Mátrixok spektruma	370
E függelék. Mátrixok hatványozása	389
E/1. Mátrixhatvány kiszámítása interpolációval	389
E/2. Mátrixhatvány kiszámítása vonalintegrállal	394
F függelék. Metrikus és normált terek	396
F/1. Metrikus terek	396
F/2. Normált terek	405
G függelék. Fixponttételek	419
H függelék. Laurent-transzformációs táblázat	442
Irodalomjegyzék	447

Előszó

Rég letűntek azok az idők, amikor a matematikusok olyan módszerek és technikák kifejlesztésével foglalkoztak, amelyek segítségével kezdetiérték-feladatok megoldásait kívánták közelítőleg vagy teljesen pontosan meghatározni. Hosszú idő után kiderült, hogy csak igen csekély esetben lehet a megoldást „zárt alakban” megadni, továbbá a számítástechnika időközben bekövetkezett rohamos fejlődése lehetővé tette bizonyos megoldások közelítő meghatározását. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a számítások mögötti elméleti háttér megismerése haszontalan időtöltés volna, már csak azért sem, mert sok esetben a gépesített számítások nem tükrözik hűen a megoldások globális viselkedését. A természet- és műszaki tudományokban, sőt a közgazdaságtudományban is egyre gyakrabban foglalkoznak diszkrét idejű modellek kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatával: a modellezendő jelenség kapcsán differenciaegyenletet, illetve diszkrét dinamikai rendszereket vizsgálnak. Ezután rendszerint egy határátmenet segítségével a diszkrét modellt differenciálegyenletté alakítják. Ennek a – különösképpen a fizikában, illetve a társadalomtudományokban kedvelt – eljárásnak megvan az az előnye, hogy a differenciálegyenletek, illetve a differenciálható dinamikai rendszerek hatalmas eszköztárát használja. A hátránya viszont az, hogy a numerikus kiértékelés kapcsán a folytonos modell helyett ismét annak diszkrét változatát kell vizsgálni, ami különösen a nemlineáris jelenségek tekintetében újabb feladatok megoldásával jár. Ezen okból kifolyólag egyre inkább erősödik az a tendencia, miszerint a felállított diszkrét modellt közvetlenül a differenciaegyenletek, illetve a diszkrét dinamikai rendszerek eszköztárával vizsgáljuk. Ez a módszer azonban csak akkor kifizetődő, ha a differenciaegyenletek, illetve a diszkrét dinamikai rendszerek eszköztára elegendően jól van fejlesztve.

Könyvünk egyrészt azokon az előadásokon alapul, amelyeket a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán tartottunk éveken át a Dinamikus modellek a közgazdaságtanban elnevezésű tárgy keretében közgazdasági elemző mesterszakos hallgatóknak,

másrészt pedig a mérnök-doktorandusz képzésben részt vevő hallgatóknak tartott kurzusokon.

A könyv felépítése önmagában olvasható-tanulható egészet alkot, amely elsősorban programtervező informatikus és alkalmazott matematikus hallgatóknak készült, de haszonnal forgathatják fizikus-, közgazdász-, illetve mérnökhallgatók is, akik megalapozott „elméleti” tudás birtokában szeretnének a gyakorlatban felmerülő problémák megoldásához segítséget kapni. Célunk, hogy a hallgatók képesek legyenek az előadásokon megszerzett ismereteiket a gyakorlatban alkalmazni és az ebben a témában fellelhető szakirodalmat megérteni.

Feltételezzük a bevezető matematikai kurzusok anyagának ismeretét, de azokra nem minden esetben építünk. Bizonyos – szükségesnek vélt – ismereteket a Függelékben dolgoztunk fel (ezek előzetes tanulmányozását az egyes fejezetekben való elmélyülés előtt kifejezetten ajánljuk), amelyekre aztán hivatkozás is történik, bizonyos alapvető ismeretek tekintetében pedig az irodalomjegyzékben lévő kitűnő szakkönyvekre, illetve monográfiákra utalunk (szögletes zárójelbe tett számokkal).

Köszönetünket fejezzük ki György Szilviának a kézirat igen alapos és gondos lektorálásáért, továbbá értékes megjegyzéseieiért.

Budapest, 2020. nyár

Kovács Sándor

Jelölések

$:=$	definiáló egyenlőség
$:\Longleftrightarrow$	definiáló ekvivalencia
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{N}$	$:= \mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$, a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$, a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbb{K}$	az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyik
$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$f(x), f_x$	az f függvény $x \in \mathcal{D}_f$ helyen felvett értéke
$f : A \rightarrow B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény ($\mathcal{D}_f = A$)
$f \in A \rightarrow B$	azoknak az f függvényeknek a halmaza, amelyekre $\mathcal{D}_f \subset A, \mathcal{R}_f \subset B$
$f _H$	az f függvénynek a H halmazra való leszűkítése
$f[H]$	a H halmaz f függvény szerinti képe
$f^{-1}[H]$	a H halmaz f függvény szerinti ősképe
$\text{Fix}(f)$	az f leképezés fixpontjainak halmaza
$\text{Per}_p(f)$	az f leképezés p -periodikus pontjainak halmaza
$\mathfrak{C}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{C}^r(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, r -szer folytonosan differenciálható függvények halmaza ($r \in \mathbb{N}$)
$\mathfrak{D}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, deriválható függvények halmaza
d.e.	differenciaegyenlet
d.e.r.	differenciaegyenlet-rendszer
k.é.f.	kezdetiérték-feladat
p.é.f.	peremérték-feladat
□	megjegyzés, ill. tétel vége
◇	példa, ill. definíció vége
■	útmutatás, bizonyítás vége

Görög betűk

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ, ϱ	ró
B	β	béta	K	$\kappa, \varkappa$	kappa	Σ	σ, ς	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε, ϵ	epszilon	N	ν	nű	Φ	ϕ, φ	fi
Z	ζ	(d)zéta	Ξ	ξ	kszi	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszi
Θ	θ, ϑ	théta	Π	π, ϖ	pí	Ω	ω	ómega
						F		digamma

Gót betűk

$\mathfrak{A}$	a	a	$\mathfrak{H}$	h	h	$\mathfrak{O}$	o	o	$\mathfrak{V}$	v	v (fau)
$\mathfrak{B}$	b	b	$\mathfrak{I}$	i	i	$\mathfrak{P}$	p	p	$\mathfrak{W}$	w	w (vé)
$\mathfrak{C}$	c	c	$\mathfrak{J}$	j	j (jot,jé)	$\mathfrak{Q}$	q	q	$\mathfrak{X}$	x	x
$\mathfrak{D}$	d	d	$\mathfrak{K}$	k	k	$\mathfrak{R}$	r	r	$\mathfrak{Y}$	y	y (üpszilon)
$\mathfrak{E}$	e	e	$\mathfrak{L}$	l	l	$\mathfrak{S}$	s	s (esz)	$\mathfrak{Z}$	z	z (cet)
$\mathfrak{F}$	f	f	$\mathfrak{M}$	m	m	$\mathfrak{T}$	t	t			
$\mathfrak{G}$	g	g	$\mathfrak{N}$	n	n	$\mathfrak{U}$	u	u			

1. fejezet

Diszkrét kalkulus

Ebben a fejezetben a diszkrét operátorkalkulus alapvető fogalmait, ill. állításait tárgyaljuk. A differenciaegyenletek elméletében felmerülő előnye mellett ezek az ismeretek nagy haszonnal bírnak a kombinatorikában és a komputergrafikában.

A továbbiakban a $\mathbb{K}$ szimbólum vagy a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát, vagy pedig a komplex számok $\mathbb{C}$ halmazát jelöli: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. A természetes számok halmazára az $\mathbb{N}_0$ szimbólumot használjuk, a pozitív természetes számok halmazát pedig $\mathbb{N}$ jelöli. Az alábbiakban szükség lesz a valós számhalmaz speciális részhalmazainak diszkrét megfelelőire.

1.0.1. definíció. Adott $a, b \in \mathbb{N}_0$ esetén legyen

$$\mathbb{N}_a := \{n \in \mathbb{N}_0 : a \leq n\}, \quad \text{ill.} \quad \mathbb{N}_a^b := \{n \in \mathbb{N} : a \leq n \leq b\}.$$

Azt mondjuk, hogy

1. az $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ halmaz **diszkrét intervallum**, ha

$$\mathbb{I} = \mathbb{N}_a \quad \text{vagy} \quad \mathbb{I} = \mathbb{N}_a^b;$$

2. az

$$\mathbb{I}' \subset \mathbb{R}, \quad \text{ill. az} \quad \mathbb{I}^{(k)} \subset \mathbb{R}$$

halmaz **csonkított (diszkrét) intervallum**, ha valamely $\mathbb{I}$ diszkrét intervallum esetén

$$\mathbb{I}' := \begin{cases} \{m \in \mathbb{I} : m + 1 \in \mathbb{I}\} & (\mathbb{I} = \mathbb{N}_a^b), \\ \mathbb{I} & (\mathbb{I} = \mathbb{N}_a); \end{cases}$$

ill.

$$\mathbb{I}^{(k)} := \begin{cases} \{m \in \mathbb{I} : m+1, \dots, m+k \in \mathbb{I}\} & (\mathbb{I} = \mathbb{N}_a^b), \\ \mathbb{I} & (\mathbb{I} = \mathbb{N}_a). \end{cases}$$

Az utóbbi esetben ***k-szorosan csonkított intervallumról*** beszélünk, ahol $k \in \mathbb{N}$, és az $\mathbb{I} = \mathbb{N}_a^b$ esetben a

$$k+1 < b-a$$

feltevéssel élünk. $\diamond$

1.0.1. példa. Az $a := 2$, $b := 7$ esetben

1. $a \{2, 3, 4, \dots\}$ halmazt

$$\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}_0 : 2 \leq n\}$$

jelöli;

2. ha

$$\mathbb{I} := [2, 7] \cap \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_2^7,$$

akkor

$$\mathbb{I}' = [2, 6] \cap \mathbb{N}_0, \quad \text{ill.} \quad \mathbb{I}^{(3)} = [2, 4] \cap \mathbb{N}_0. \quad \diamond$$

Ismeretes, hogy az $\mathcal{S} := \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ sorozatok lineáris teret alkotnak az

$$(u+v)_n := u_n + v_n, \quad (\alpha u)_n := \alpha u_n \quad (u, v \in \mathcal{S}, \alpha \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0)$$

műveletekre nézve, sőt $\mathcal{S}$ -en még a szorzás, illetve bizonyos megszorítással osztás is értelmezhető:

$$(u \cdot v)_n := u_n \cdot v_n \quad (u, v \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}_0),$$

ill.

$$\left(\frac{u}{v}\right)_n := \frac{u_n}{v_n} \quad (u, v \in \mathcal{S}, v_n \neq 0, n \in \mathbb{N}_0).$$

Olykor szükségünk lesz sorozatok között egy ritkábban használt, de a gyakorlati alkalmazások során igen fontos műveletre.

1.0.2. definíció. Az $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ és $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ sorozat ***konvolúcióját*** az

$$(u * v)(n) := \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőséggel értelmezzük. $\diamond$

Világos, hogy ha $v_n \equiv 1$, akkor bármely $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ sorozatra

$$(u * v)_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

1.0.2. példa. Az

$$u_n := v_n := n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatok konvolúciójára tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ index esetén (vö. B függelék, 350. old.)

$$\begin{aligned} (u * v)_n &= \sum_{k=0}^n k(n-k) = n \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n k^2 = \\ &= n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

teljesül. $\diamond$

Könnyen ellenőrizhetők a konvolúciónak az alábbiakban megfogalmazott tulajdonságai.

1.0.1. állítás. Bármely $u, v, w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ sorozatra

1. $u * v = v * u$ (**kommutativitás**);
2. $(u * v) * w = u * (v * w)$ (**asszociativitás**);
3. $(u + v) * w = u * w + v * w$ (**disztributivitás**);
4. $u * \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ahol

$$\mathbf{0}_n := 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad \square$$

1.1. A differencia-, az eltolás- és az identitásoperátor

Az $\mathcal{S}$ függvénytér kapcsán négy fontos operátort értelmezünk.

1.1.1. definíció. Az $I, E, \Delta, \nabla : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ operátorokat rendre **identitásnak**, **eltolásnak**, (**előrefelé vett**) **differenciának**, ill. **visszafelé vett differenciának** nevezzük, ha tetszőleges $u \in \mathcal{S}$ sorozatra

- $(Iu)_n = u_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$;
- $(Eu)_n = u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$;
- $(\Delta u)_n = (Eu)_n - (Iu)_n = u_{n+1} - u_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$;
- $(\nabla u)_n = u_n - u_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

teljesül. $\diamond$

A jelölések bonyolítását elkerülendő, olykor előfordulnak az

$$Eu_n := (Eu)_n, \quad \Delta u_n := (\Delta u)_n, \quad \nabla u_n := (\nabla u)_n$$

jelölések is, sőt, ha az $u \in \mathcal{S}$ sorozat valamely elcsúsztatottja esetében a fenti operátorokat alkalmazni akarjuk, akkor sok esetben a

$$v_n := u_{n+k}, \quad \text{ill.} \quad w_k := u_{n+k}$$

sorozatok differenciájának jelölésére a

$$\Delta_n u_{n+k} := (\Delta v)_n, \quad \text{ill.} \quad \Delta_k u_{n+k} := (\Delta w)_k$$

szimbólumokat használjuk.

1.1.1. példa. Ha valamely $m \in \mathbb{N}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$u_m := n^m, \quad \text{ill.} \quad v_n := n^m,$$

akkor

$$(\Delta u)_m = \Delta_m n^m = u_{m+1} - u_m = n^{m+1} - n^m = n^m(n-1),$$

ill.

$$\begin{aligned} (\Delta v)_n &= \Delta_n n^m = v_{n+1} - v_n = (n+1)^m - n^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} n^k - n^m = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} n^k. \quad \diamond \end{aligned}$$

1.1.1. feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Számítsuk ki az alábbi u sorozatok esetében a Δu differenciát!

1. $u_n := (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
2. $u_n := n(-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
3. $u_n := \cos(an)$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
4. $u_n := \sin(an)$ ($n \in \mathbb{N}_0$);
5. $u_n := \ln(bn)$ ($n \in \mathbb{N}$).

ÚTMUTATÁS

1. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(\Delta u)_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}.$$

2. Ha $n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$(\Delta u)_n = (n+1)(-1)^{n+1} - n(-1)^n = -(2n+1)(-1)^n.$$

3. Bármely $n \in \mathbb{N}_0$ indexre

$$\begin{aligned} (\Delta u)_n &= \cos(a(n+1)) - \cos(an) = \\ &= -2 \sin\left(\frac{an + a - an}{2}\right) \sin\left(\frac{an + a + an}{2}\right) = \\ &= -2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(a \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

4. Minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\begin{aligned} (\Delta u)_n &= \sin(a(n+1)) - \sin(an) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{an + a - an}{2}\right) \cos\left(\frac{an + a + an}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(a \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

5. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$(\Delta u)_n = \ln(b(n+1)) - \ln(bn) = \ln\left(\frac{b(n+1)}{bn}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad \blacksquare$$

A differenciaoperátor és az eltolásoperátor a következőképpen általánosítható. Adott $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $0 < h \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$(\Delta_h f)(n) := \frac{f(n+h) - f(n)}{h}, \quad (E_h f)(n) = f(n+h) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Világos, hogy $\Delta_1 = \Delta$, ill. $E_1 = E$, továbbá differenciálható f esetén

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\Delta_h f)(n) \equiv f'(n), \quad \text{ill.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (E_h f)(n) \equiv f(n).$$

Így pl. ha

$$f(x) := x^m \quad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (\Delta_h f)(n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(n+h)^m - n^m}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} n^{m-k} h^k - n^m \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} n^{m-k} h^k = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} n^{m-k} h^{k-1} = \\ &= \binom{m}{1} n^{m-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} n^{m-k} h^{k-1} = \\ &= \binom{m}{1} n^{m-1} = mn^{m-1} = f'(n). \end{aligned}$$

Az alábbiakban az imént értelmezett operátorok linearitását fogjuk megvizsgálni.