

Ferenczi Miklós

# A matematika alapjairól



Ferenczi Miklós

# A matematika alapjairól



**TYPOTEX**

© Ferenczi Miklós, Typotex, Budapest, 2020  
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 075 4

Szakmai lektor: Sain Ildikó

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!  
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu)  
és a [facebook.com/typotexkiado](https://facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók  
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Gerner József

A borítót készítette: Szalay Éva

Készült a Kódex Könyvgyártó Kft. nyomdájában

Felelős vezető: Marosi Attila

# Tartalomjegyzék

Bevezetés . . . . .	9
<b>I. A MATEMATIKA ALAPJAI</b>	<b>13</b>
<b>1. Halmazok, halmazalgebrák</b>	<b>14</b>
1.1. Elemi fogalmak . . . . .	14
1.2. A halmazműveletekről . . . . .	18
1.3. Halmazalgebrák . . . . .	23
<b>2. Állításlogika</b>	<b>27</b>
2.1. Formalizálás . . . . .	28
2.2. A formális állításnyelv . . . . .	29
2.3. Igazságértékelés, kapcsolat a halmazalgebrákkal . . . . .	31
2.4. Állítások modellezése a halmaznyelv közvetítésével . . . . .	36
2.5. Logikai következmény . . . . .	39
<b>3. Relációk (igazsághalmazok), függvények, struktúrák</b>	<b>47</b>
3.1. Relációkról, függvényekről – általában . . . . .	47
3.2. Ekvivalenciarelációk . . . . .	52
3.3. Rendezési relációk . . . . .	55
3.4. Struktúrák . . . . .	62
<b>4. Elsőrendű logika</b>	<b>65</b>
4.1. Formális elsőrendű nyelv . . . . .	65
4.2. Igazságértékelés (igazságinterpretáció) . . . . .	67
4.3. Kitekintés a másodrendű logikára . . . . .	70
4.4. Formalizálás elsőrendű logikában, nevezetes axiómarendszerek	71
4.5. Struktúrák megadásáról, megszorításáról és általánosításáról	77
4.6. Logikai következményfogalom az elsőrendű logikában . . . . .	79
4.7. Az axiomatikus módszerről, a bizonyításelméletről . . . . .	83

<b>5. Számosságok, axiomatikus halmazelmélet</b>	86
5.1. Számosságok . . . . .	86
5.2. Axiomatikus halmazelmélet . . . . .	96
<b>6. A számfogalomról</b>	101
6.1. Természetes számok, egész számok . . . . .	102
6.2. Racionális számok . . . . .	102
6.3. Valós számok . . . . .	103
6.4. Komplex számok . . . . .	108
6.5. Nemstandard valós számok . . . . .	109
<b>7. A matematika néhány fontos eleméről</b>	114
7.1. Alapfogalmak, axiómák . . . . .	114
7.2. A definíciókról . . . . .	115
7.3. Következtetések . . . . .	119
7.4. A bizonyításokról . . . . .	122

## II. VÁLOGATOTT, AZ ALAPOKHOZ KAPCSOLÓDÓ FEJEZETEK 129

<b>8. Bizonyításelmélet, algoritmuselméleti kitekintéssel</b>	130
8.1. A Hilbert-féle levezetési rendszer. A bizonyításelmélet erejéről	130
8.2. A bizonyításelmélet korlátairól . . . . .	135
8.3. Analitikus fák . . . . .	137
8.4. Kitekintés az automatikus tételbizonyításra . . . . .	151
8.5. Eldönthetőség . . . . .	152
8.6. Kitekintés az algoritmuselméletre . . . . .	157
<b>9. Nemstandard analízis</b>	161
9.1. 1 valószínűséggel . . . . .	161
9.2. Nemstandard valós számok és struktúrájuk . . . . .	164
9.3. További relációk és függvények kiterjesztései . . . . .	167
9.4. Az ultrahatvány-konstrukcióról . . . . .	171
9.5. $\mathcal{R}^*$ szerkezetéről . . . . .	172
9.6. Általánosítás, alkalmazások . . . . .	173
<b>10. Valószínűségfogalom, induktív logika</b>	178
10.1. Valószínűség . . . . .	178
10.2. Induktív következtetés, feltételes valószínűség . . . . .	180
10.3. Speciális számolási szabályok . . . . .	184

<b>11. Algebrai logika</b>	188
11.1. A Boole-algebra fogalmáról, példák Boole-algebrákra . . . .	188
11.2. Néhány absztrakt algebrai fogalomról . . . . .	190
11.3. A Boole-algebra és a logika kapcsolatáról . . . . .	195
11.4. Az elsőrendű logika algebraizációjáról . . . . .	198
11.5. Kitekintés . . . . .	202
<b>12. A mértékelméletről</b>	203
12.1. Mértékek, valószínűségek . . . . .	203
12.2. Mérhető (mértéktranszformációra alkalmas) függvények . .	211
12.3. A Lebesgue-integrál fogalmáról . . . . .	219
<b>III. PÉLDATÁR</b>	<b>227</b>
<b>13. Feladatok</b>	228
13.1. Halmazok, halmazalgebrák . . . . .	228
13.2. Állításlogika . . . . .	232
13.3. Relációk, függvények, struktúrák . . . . .	233
13.4. Elsőrendű logika . . . . .	235
13.5. Számosságok . . . . .	237
13.6. A számfogalomról . . . . .	239
13.7. A matematika elemei . . . . .	240
13.8. Bizonyításelmélet, algoritmuselméleti kitekintés . . . . .	241
13.9. Nemstandard analízis . . . . .	244
13.10. Valószínűség, induktív logika . . . . .	245
13.11. Algebrai logika . . . . .	246
13.12. Mértékelmélet . . . . .	247
Tárgymutató . . . . .	249





# Bevezetés

A tapasztalatok azt mutatják, hogy egy könyv bevezetését igen kevesen olvassák el gondosan – kivételek azok az olvasók, akik viszont kizárólag a bevezetést olvassák el. Ezt a könyvet viszont nem ez utóbbi olvasóközönségnek szánjuk. Optimista hozzáállással ennek ellenére feltételezzük, hogy a tisztelt Olvasó átfutja ezt a bevezetést, ezért itt előrebocsátunk néhány olyan tudnivalót, amelyek megkönnyítik a könyv kezelését.

Amennyiben az olvasó gyorsan szeretne fogalmat alkotni a könyv taníthatóságáról és feldolgozhatóságáról, akkor azt javasoljuk, hogy először a III. részben található példatárba lapozzon bele. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a „matematika alapjai” elnevezést a „halmazelmélet és matematikai logika” témakörére is szokták használni. A könyv címe azonban *nem* a „halmazelmélet és matematikai logika” szinonimája, mert a témát itt egy átfogóbb értelmezésben fejtjük ki.

Először is leszögezzük, hogy az Olvasó egy *tankönyvet*, tehát nem tudományos könyvet tart a kezében. Felmerülnek ezért a következő kérdések:

1. Kiknek készült ez a tankönyv és milyen céllal?
2. Hány órányi előadás anyagát tartalmazza?
3. Mi különbözteti meg egyéb, hasonló témájú tankönyvektől?
4. Hogyan érdemes feldolgozni a könyvet?

Megkíséreljük megválaszolni ezeket a kérdéseket.

1. *A könyvet a matematika iránt különösen érdeklődő egyetemi hallgatóknak (nem csak matematika szakosoknak), valamint az első éves a matematikus hallgatóknak szánom.* Feltételezem a gimnáziumi matematikaanyag alapos ismeretét, de ennél nem többet. *A könyv célja az olyan általános matematikai fogalmak egységes tárgyalása*, amelyek szinte minden bevezető matematika-előadásban (analízis, algebra, geometria, valószínűségszámítás stb.) felmerülnek, éppen ezért szétszórtnak, esetlegesen – nem egységes megközelítésben. E fogalmak fontossága viszont indokolja egységes tárgyalásu-

kat. Ez a könyv „törzsanyaga”, az I. rész. Tehát ennek a műnek nem az az elsődleges célja, hogy a matematika filozófiáját tárgyalja, hanem gyakorlati alapot szeretne nyújtani a matematikához (a II. rész már a filozófiai megalapozásba is betekintést enged).

2. *A könyv I. része egy 14 hetes, tehát 1 szemeszteres, heti 2 órás kurzusra van méretezve*, amely előadássorozat címe akár meg is egyezhet a könyv címével. A II. rész egy további, heti 2 órás szemeszter anyagát tartalmazza, és például egy olyan speciális kollégium anyagaként képzelhetjük el, amelyben elmélyíthetjük az I. részben megszerzett tudást.

3. Mivel a könyv tankönyv, igen fontosak a didaktikai szempontok. Más, hasonló tárgyú művekkel összevetve a következőkre hívjuk fel a figyelmet:

a) *Nagy hangsúlyt kapnak a könyvben a feladatok, melyek végigkísérik a tárgyalás egészét.* Megoldott feladatokat PÉLDÁK, valamint Feladatok címszó alatt is találunk (utóbbiaknál a megoldást M betűvel jeleztük). A könyv III. része egy kisebb példatár. A szükséges elméleti alapon túl az a célunk, hogy szép példákra és feladatokra keresztül világítsunk rá a szükséges fogalmak, tételek jelentőségére.

b) *Fontos fejezete a könyvnek a hetedik fejezet, melynek címe: „A matematika néhány fontos eleméről”.* Itt általánosan – helyenként metaszinten – vizsgáljuk a matematikai definíciókat, bizonyításokat, következtetéseket. Didaktikailag azonban az is elfogadható, ha ezt a fejezetet a többi fejezettel párhuzamosan tárgyaljuk. A fejezet tehát többféle oktatási elképzelést tesz lehetővé.

c) *A könyv nagy hangsúlyt helyez a halmazelméletre és a matematikai logikára.* A szerző meggyőződése, hogy a téma alapos ismerete elengedhetetlen a matematika alapjainak megértéséhez.

4. *Hiszünk abban, hogy inkább „kevesebbet, de mélyebben” érdemes tanítani*, mint nagy ismeretanyagot, de felületesen. Különösen igaz ez a matematika alapjaira. A könyv teljes anyaga messze meghaladja az egyetlen szemeszter heti 2 órájában átadható tudást. Ráadásul az írásba foglalt ismeretanyag mindig bővebb és pontosabb az előadáson elhangzottaknál. Ne arra törekedjünk, hogy egy szemeszter alatt minél nagyobb anyagot végezzünk el, hanem arra, hogy számunkra kedves, érdekes és fontosnak tartott témákban mélyedjünk el. Ennek érdekében még az első rész ismeretanyagának egy részét is feláldozhatjuk. Például az elsőrendű logikával foglalkozó 4. fejezetből elhagyhatjuk a fejlettebb számolási technikát igénylő szakaszokat, de ugyanígy az 5., halmazelméleti fejezetből, vagy a 6., számfogalomról szóló fejezetből is elhagyhatunk részeket. Ezzel egyidőben a második részből is szóba hozhatunk bizonyos fejezeteket (pl. a bizonyításelméletet vagy az

algebrai logikát). Fontos, hogy külön figyelmet fordítsunk a már említett 7. fejezetre.

Az első rész feldolgozásánál két lehetőséget ajánlunk:

a) Feladatcentrikus feldolgozás. Ez a gyakorlatban egy interaktív és könnyedébb feldolgozást jelent.

b) Elméletcentrikus feldolgozás.

Az a) esetben kap erőteljes hangsúlyt a III. részben található példatár. A szerző az oktatás során mindkét megközelítést kipróbálta.

Néhány szó a II. részről. Számos olyan fontos gondolat előkerül az I. részben (a „törzsanyagban”), amelyek részletes kifejtésére az adott szituáció nem alkalmas, ugyanakkor – bizonyos értelemben – veszteség lenne róluk megfeledkezni. A II. részben ezek kifejtésére sor kerül. Az érintett témakörök közül több határterület, így áttekintésük különösen hasznos. Például a bizonyításelmélet a logika és az elméleti számítástudomány határterületének tekinthető, a nemstandard analízis az analízis és a logika határterületének, az induktív logika a matematikai statisztika és a logika határterületének, az algebrai logika az algebra és a logika határterületének, a mértékelmélet pedig a valószínűségszámítás és az analízis határterületének. A felsorolásból az is látszik, hogy ezek a fejezetek alkalmasak arra, hogy elmélyítsük analízisbeli, algebrai, valószínűségszámítási, valamint logikai ismereteinket. A II. rész ezen túl néhány igen korszerű, nagy jövő előtt álló területet is érint, például a gépi bizonyítások kérdését vagy az algoritmuselméletet. Megjegyezzük, hogy míg az I. részben *a fejezetek egymásra épülnek*, addig a második részben nem ez a helyzet, tehát tanulmányozásuk *tetszőleges sorrendben* történhet. Felvethető természetesen, hogy legalább a II. részbe bekerülhettek volna olyan témák, mint a geometria, a gráfelmélet vagy a klasszikus algebra. Ennek a terjedelmi korlátok szabtak határt.

Szeretnék köszönetet mondani a könyv létrejöttében segítséget nyújtó matematikus hallgatónak, továbbá kollégámnak, Simon Andrásnak. Köszönettel tartozom a könyv lektorának, Sain Ildikónak lelkiismeretes munkájáért, valamint Simonovits Andrásnak és Csima Juditnak szakmai segítségükért.

*A szerző*