

Vetier András

Valószínűségszámítás

1. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

1. rész

Valószínűségek és diszkrét
valószínűségi változók

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

© Vetier András, Typotex, Budapest, 2019
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 032 7

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Esemény, valószínűség	11
1.1. Kimenetelek	11
1.2. Esemény	11
1.3. Valószínűség	12
1.4. Műveletek eseményekkel	12
1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai	14
1.6. Klasszikus problémák	16
1.7. Számlálási alapszabályok	16
1.8. Kombinatorikus alapképletek	17
1.9. Az eseménytér megválasztása nem egyértelmű	22
1.10. RAND.BETWEEN (magyarul: VÉLETLEN.KÖZÖTT) utasítás	25
2. Diszkrét eloszlás	33
2.1. Valószínűségi változó	33
2.2. Eloszlás és súlyfüggvény	33
2.3. Eloszlásfüggvény	37
2.4. Jobb oldali eloszlásfüggvény	41
2.5. Medián	46
2.6. Kétdimenziós valószínűségi változó	48
2.7. Kétdimenziós eloszlás és súlyfüggvény	51
2.8. Módusz	51
2.9. Valószínűségek megadása súlyokkal	52
2.10. Konstans értékű valószínűségi változók	54
3. Folytonos egyenletes eloszlás	55
3.1. Folytonos egyenletes eloszlás	55
3.2. RAND utasítás	62
3.3. Random számok tulajdonságai	63
3.4. Lineáris transzformációk	64
4. További fogalmak és szabályok	67
4.1. További fogalmak eseményekre	67
4.2. További szabályok eseményekre	68
4.3. Eloszlás transzformációja	68
4.4. Síkbeli eloszlás vetületei	71
4.5. További szabályok valószínűségekre	74

5. Feltételes valószínűség és eloszlás	77
5.1. Feltételes valószínűség	77
5.2. Szorzási szabályok	79
5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva	82
5.4. További szorzási szabályok	83
5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes-formula	85
5.6. Feladatok vizsgálatokról	88
5.7. Feladatok vizsgákról és bögrékről	90
5.8. Elérhető-e az Örök Boldogság? (<i>Extra tananyag</i>)	96
5.8.1. Amikor biztos, hogy elérjük	96
5.8.2. Mikor érjük el?	97
5.8.3. Amikor biztos, hogy nem érjük el	101
5.9. Optimális taktika előre nem látható helyzetekben (<i>Extra tananyag</i>)	103
5.9.1. Segédfeladat	103
5.9.2. Szindbád és a háremhölgyek	106
5.10. Feltételes eloszlás egy eseményen belül	107
5.11. Feltételes eloszlások rendszere síkbeli eloszlás esetén	109
5.11.1. Példák feltételes eloszlások meghatározására	109
5.11.2. Általános összefüggések	113
5.12. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól!	114
6. Függetlenség	117
6.1. Események függetlensége	117
6.2. Valószínűségi változók függetlensége	122
6.3. Direkt szorzat	122
6.3.1. Konvolúció	123
7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt	125
7.1. Szabályos dobókockák esete	125
7.2. Hamis dobókockák esete	132
7.3. Különböző dobókockák esete	140
8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban	143
8.1. Összegzési szabály vetületeloszlásokkal kapcsolatban	143
8.2. Szorzási szabály független koordináták esetére	143
8.3. Osztási és szorzási szabályok feltételes súlyfüggvényekkel	144
8.4. Eloszlások keverése	144
8.5. Eloszlás transzformációja egy dimenzióban	145
8.6. Eloszlás transzformációja két dimenzióból egy dimenzióba	145
8.7. Példák	146
8.8. Független valószínűségi változók összege – konvolúció	150

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** e-mail-címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG-fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG-fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az „*Extra tananyag*”, „*Extra feladat*” címkékkel megjelölt anyagrészek és feladatok nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki ezekből az anyagrészekből és feladatokból

- szépen, okosan megtanul annyit, amennyit a tárgy aktuális honlapján kérünk, és
- szándékát a honlapon megadott e-mail-címen a megadott határidőig jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből felkészült, és
- utána a vizsgáztató által feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért közepes (3) vagy jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

Kedves Kollégák!

Itt hívom fel a figyelmüket arra, hogy egy oktatási félév során a könyv egyes fejezeteit a leírt sorrendtől eltérően a következő oldalon megadott ütemezésben is lehet tanítani, tanulni.

Ennek az ütemezésnek előnye, hogy a nehezebb, bonyolultabb folytonos eset nem tolódik a félév második felére. Azt tapasztaltam, hogy a hallgatóink is nagyobb érdeklődéssel fordulnak a folytonos modellek felé, hiszen a diszkrét esetről sokan már tanultak a középiskolában is.

Eredményes, örömteli, jó munkát kívánok kollégáimnak is, diákjainknak is!

2019. február 25.

Üdvözlettel,

Vetier András

A hét témájának címe

Fejezetek a tankönyvből

1. hét	Diszkrét és folytonos egyenletes eloszlások 1. rész: 1. Esemény, valószínűség 1. rész: 2. Diszkrét eloszlás 1. rész: 3. Folytonos egyenletes eloszlás
2. hét	Példák nem egyenletes folytonos eloszlásokra 3. rész: 1. Folytonos eloszlások 3. rész: 2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel 3. rész: 3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka 3. rész: 3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény 3. rész: 3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése 3. rész: 3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások
3. hét	Feltételes valószínűség és függetlenség 1. rész: 4. További fogalmak és szabályok 1. rész: 5. Feltételes valószínűség és eloszlás 1. rész: 6. Függetlenség
4. hét	Monoton transzformációk; kétdimenziós folytonos eloszlások 3. rész: 3.5. Monoton transzformációk 3. rész: 3.6. Folytonos szimuláció 4. rész: 1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók 4. rész: 2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás
5. hét	Nevezetes diszkrét eloszlások 2. rész: 1. Nevezetes eloszlások 2. rész: 2. Módusz megkeresése 2. rész: 3. Szimuláció
6. hét	Béta eloszlások 3. rész: 3.7. Béta eloszlások 4. rész: 3. Béta eloszlások két dimenzióban
7. hét	Várható érték, variancia, szórás (– diszkrét eset) 2. rész: 4. Tömegpont-rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka 2. rész: 5. Egydimenziós adatrendszerek 2. rész: 6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása 2. rész: 7. Nagy számok törvényei 2. rész: 8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai
8. hét	Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, varianciája, szórása 2. rész: 9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák 2. rész: 10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások 2. rész: 11. Binomiális eloszlással kapcsolatos levezetések

9. hét	<p>Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset); sok független tag összegének eloszlása</p> <p>3. rész: 4. Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset)</p> <p>3. rész: 5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (– diszkrét és folytonos eset)</p> <p>4. rész: 4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke</p> <p>4. rész: 5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára</p> <p>1. rész: 7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt</p>
10. hét	<p>Nevezetes folytonos eloszlások</p> <p>3. rész: 6. Nevezetes folytonos eloszlások</p> <p>3. rész: 7. Közelítések normális eloszlással</p>
11. hét	<p>Feltételes eloszlás, várható érték, variancia, szórás</p> <p>1. rész: 8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban</p> <p>2. rész: 12. Feltételes várható érték, variancia, szórás</p> <p>4. rész: 6. Vetület- és feltételes eloszlások</p>
12. hét	<p>Eloszlások transzformációi</p> <p>3. rész: 8. Eloszlások transzformációi</p> <p>4. rész: 7. Transzformáció síkról síkra</p> <p>4. rész: 8. Lineáris transzformáció síkról síkra</p> <p>4. rész: 9. Transzformáció síkról egyenesre</p>
13. hét	<p>Regresszió</p> <p>4. rész: 10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel</p>
14. hét	<p>Kétdimenziós normális eloszlások</p> <p>4. rész: 11. Normális eloszlások a síkon</p>

1. fejezet

Esemény, valószínűség

1.1. Kimenetelek

Véletlen jelenség: Adott körülmények között valami történik. Például két szabályos dobódobókockát szabályosan feldobunk.

Kísérlet: A jelenség önmagától vagy az én szándékom miatt lezajlik. Például korrekt módon gurítom a két dobókockát.

Megfigyelés: Megmondjuk, kijelentjük, hogy mi érdekel minket, mire figyelünk oda. Például megfigyelhetjük két dobókocka kapcsán a dobott számok összegét vagy szorzatát, hányadosát, de megfigyelhetném azt is, hogy a dobókocka mennyi ideig gurul, hogy hol áll meg, stb.

Kimenetelek, más néven: **lehetséges kimenetelek**, **elemi események:** A megfigyelésünk lehetséges eredményei. Például két dobókockával dobva az összeg lehetséges eredményei: $2, 3, \dots, 12$.

Eseménytér: Az összes lehetséges kimenetelek halmaza. Példánkban az eseménytér a 11 elemű $\{2, 3, \dots, 12\}$ halmaz.

1.2. Esemény

Esemény: Állítás a jelenséggel kapcsolatban, ami minden kísérletnél

vagy IGAZ – másképpen mondva – BEKÖVETKEZIK,

vagy HAMIS – másképpen mondva – NEM KÖVETKEZIK BE.

Például az az állítás, hogy két kocka esetén *a dobott számok összege nagyobb, mint 7*, egy eseményt definiál.

Siker és kudarc: A bekövetkezést az esemény szempontjából SIKER-nek, a nem bekövetkezést KUDARC-nak is szokás hívni.

Események egyenlősége: Egy eseményt általában többféleképpen is körül lehet írni. A két állítás, hogy két dobókockával

az összeg 10 vagy 11 vagy 12, illetve

az összeg kilencnél nagyobb,

másképpen hangzanak, de ugyanazt jelentik. Ez a két állítás egy és ugyanazon eseménynek két különböző megfogalmazása. Két eseményt – különböző megfogalmazásuk ellenére is – **egyenlő**eknek tekintünk, ha mindig egyidejűleg következhetnek be: akkor és csak akkor következnek be az egyik, ha a másik is következik.

Kísérletsorozat: Több (egymásra semmi hatást kifejtő) kísérletet hajtunk végre. Például a két kockát, vagyis a kockapárt – mondjuk – 10-szer szabályosan elgurítom.

1.3. Valószínűség

Gyakoriság: Ahányszor bekövetkezik az esemény az elvégzett valamennyi kísérlet során. Másképpen mondva a gyakoriság a sikeres kísérletek számát jelenti.

Relatív gyakoriság: Gyakoriság (=sikerek száma) osztva az összes kísérletek számával. Például ha 10 kísérletből 4-szer következik be a szóban forgó esemény, akkor az elvégzett kísérletsorozatban az esemény relatív gyakorisága 0,4. A relatív gyakoriság azt mutatja, hogy az összes kísérlet hányad részében következett be az esemény. Van aki ezt az arányt százalékokban szereti kifejezni, és azért a 0,4 helyett 40%-ot mond, ami teljesen rendben is van, hiszen a 40% igazából 0,4-et jelent.

Valószínűség: Egy adott eseményt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság közel van egy olyan értékhez, ami nem függ a véletlentől, hanem az eseményre jellemző. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. A relatív gyakoriság kevés kísérlet esetén erősen eltérhet a valószínűségtől, de a kísérletszám növekedtével egyre közelebb kerül hozzá.

Egy esemény valószínűségét általában úgy jelöljük, hogy egy P betű mögé zárójel közé írjuk az eseményt definiáló állítást szavakkal vagy jelekkel, vagy bármilyen módon, ami az adott környezetben világosan utal az eseményre. Például annak a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával 4-nél nagyobb számot dobunk, így jelölhetjük:

- $P(\text{négyenél nagyobbat dobunk})$,
- $P(\text{ötöst vagy hatost dobunk})$,
- $P(5, 6)$,
- $P(X > 4)$, ahol X jelenti a kockával dobott számot,
- $P(A)$, ahol A jelenti azt az eseményt, hogy a kockával ötöst vagy hatost dobunk,
- stb.

A valószínűségszámítás megtanít arra, hogy a valószínűségeket kísérletek elvégzése nélkül, elméleti módszerekkel meghatározzuk.

1.4. Műveletek eseményekkel

Események – halmazok: Az eseményeket az eseménytér (mint „alaphalmaz”) részhalmazáival reprezentáljuk. Minden egyes esemény megfelel annak a halmaznak, mely a (szóban forgó eseményre nézve) kedvező kimenetelekből áll.

Biztos esemény: Mindig bekövetkezik. Az alaphalmazzal reprezentáljuk, amit S -sel jelölünk. Más jelölések: U, I, Ω .

Lehetetlen esemény: Sohasem következik be. Az üres halmazzal reprezentáljuk. A \emptyset jellel jelöljük.

Ellentett esemény – másképpen mondva – **komplementer esemény**, „tagadás”, „nem”: Pontosan akkor következik be, amikor az eredeti esemény nem. Felülvonással jelöljük, pl.: \bar{A} .

Események „és” kapcsolata – másképpen mondva – **metszete, közös része, szorzata:** A szóban forgó események mindegyike bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény metszete: $A \cap B$.

Véges sok A_1, A_2, \dots, A_n esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Végtelen sok A_1, A_2, \dots esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \dots$

Kizáró események: A szóban forgó események közül legfeljebb egy következhet be. Bármely kettő kizárja egymást, egyidejű bekövetkezésük lehetetlen.

Két eseményre: $A \cap B = \emptyset$.

Több (véges vagy végtelen sok) eseményre: ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Események „vagy” kapcsolata – másképpen mondva – **uniója, egyesítése, összege:** A szóban forgó események közül legalább egy bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény uniója: $A \cup B$.

Véges sok A_1, A_2, \dots, A_n esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$.

Végtelen sok A_1, A_2, \dots esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \cup \dots$

Kizáró események „vagy” kapcsolata – másképpen mondva – **uniója, egyesítése, összege:** A szóban forgó események közül pontosan egy bekövetkezik. A jelölések általában nem különböznek a korábbi jelölésektől:

Két kizáró esemény uniója: $A \cup B$.

Véges sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$.

Végtelen sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \cup \dots$

Kizáró eseményekre bizonyos szabályok egyszerűbbek az általános szabályoknál. Ezért egyes könyvek a $*$ jellel hívják fel a figyelmet arra a tényre, hogy a műveletben szereplő események kizáróak:

Két kizáró esemény uniója: $A \cup^* B$.

Véges sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup^* A_2 \dots \cup^* A_n$.

Végtelen sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup^* A_2 \cup^* \dots$

„Maga után vonja”: Azt mondjuk, hogy a B esemény maga után vonja az A eseményt, ha teljesül az, hogy amikor a B esemény bekövetkezik, akkor szükségképpen az A esemény is bekövetkezik, azaz a B halmaz része az A halmaznak. Jelölés: $B \subset A$ vagy $A \supset B$.

Események különbsége: Ha A, B tetszőleges események, akkor A mínusz B -nek (avagy A és B különbségének) nevezzük, és $A \setminus B$ -vel jelöljük azt az eseményt, ami akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be. A különbség jelölése: $A \setminus B$. Tehát $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a valószínűség alapvető tulajdonságait soroljuk fel, melyek – a relatív gyakoriság ugyanilyen tulajdonságai alapján – kézenfekvőek. Fontos, hogy az olvasó ne csak memorizálja ezeket a tulajdonságokat, hanem értse, lássa, hogy *a valószínűségnek ezek a tulajdonságai a relatív gyakoriság (triviális!) hasonló tulajdonságai miatt igazak*. Néhány bonyolultabb szabályt egy későbbi fejezetben sorolunk fel. Megjegyezzük, hogy az első, a második és az ötödik tulajdonságból logikai úton le lehet vezetni a valószínűség összes többi tulajdonságát, ezért a valószínűségszámítás axiomatikus felépítésekor ezek szolgálnak axiómákként. Ebben a könyvben nem célunk az axiomatikus tárgyalás. A technikásabb bizonyításokat is leegyszerűsítve, a szemléletre támaszkodva mutatjuk majd be. Fő célunk az elmélet és a valóság kapcsolatának világos tálalása.

1. Minden esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

2. A biztos esemény valószínűsége 1:

$$P(S) = 1.$$

3. A lehetetlen esemény valószínűsége 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

4. Komplementer szabály:

Minden A eseményre igaz, hogy

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}), \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

5. Összegzési szabály kizáró eseményekre:

Ha A, B kizáró események, és $C = A \cup B$, akkor

$$P(C) = P(A) + P(B).$$

Ha A_1, A_2, \dots, A_n véges sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, akkor

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Ha A_1, A_2, A_3, \dots végtelen sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, akkor

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

6. Általános összegzési szabály (még csak) két eseményre:

Ha A, B tetszőleges események, akkor

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

7. Általános kivonási szabály:

Ha a A, B tetszőleges események, akkor

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

8. Speciális kivonási szabály:

Ha a B esemény maga után vonja az A eseményt, vagyis $B \subseteq A$, akkor

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

Feladat: Páros vagy páratlan? Egy érmét dobálunk az első fejjig. Megfigyeljük az ehhez szükséges dobások számát. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma páros szám?

Megoldás: A lehetséges kimenetek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., „soha”, ahol a „soha” akkor következik be, ha mindig csak írást dobunk, vagyis sohasem dobunk fejet. Az alábbi valószínűségek triviálisak:

$$\begin{aligned} P(\text{az első fej a 2. dobásra adódik}) &= \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \\ P(\text{az első fej a 4. dobásra adódik}) &= \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}, \\ P(\text{az első fej a 6. dobásra adódik}) &= \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ezekből a feladat kérdésére a válasz összegzéssel adódik:

$$\begin{aligned} P(\text{az első fej eléréséhez páros sok dobás kell}) &= \\ &= P(\text{az első fej a 2. dobásra adódik}) + \\ &+ P(\text{az első fej a 4. dobásra adódik}) + \\ &+ P(\text{az első fej a 6. dobásra adódik}) + \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Az utolsó sorban, a végtelen sor összegzésénél felhasználtuk a jól ismert tényt, hogy egy végtelen mértani sor összegére igaz:

$$\text{összeg} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}.$$