

Vetier András

Valószínűségszámítás

3. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

3. rész

Egydimenziós folytonos
valószínűségi változók

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

© Vetier András, Typotex, Budapest, 2019
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 034 1

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Folytonos eloszlások	9
1.1. Ismétlés kalkulusból	9
1.2. Folytonos valószínűségi változók	10
1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény	10
1.4. Intervallum valószínűsége	12
1.5. Medián	13
1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis	13
2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékekkel, pontfelhővel	17
2.1. Szemléltetés festékekkel (tömeggel)	17
2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen	18
2.2. Szemléltetés pontfelhővel	19
2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen	19
2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban	20
2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt	21
3. Random számok transzformációi	25
3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka	25
3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel	25
3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény	27
3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény	32
3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése	39
3.3.1. Random számok összege	39
3.3.2. Két random szám maximuma	41
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások	41
3.4.1. Arkusz-színusz eloszlás	42
3.4.2. Cauchy-eloszlás	45
3.5. Monoton transzformációk	49
3.6. Folytonos szimuláció	51
3.7. Béta-eloszlások	51
3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése	52
3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése	56
3.7.3. Nem egyenletes alapeloszlás esete (<i>Extra tananyag</i>)	57
4. Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset)	61
4.1. Definíciók	61
4.2. Nagy számok törvényei	62
4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára	62

4.2.2.	NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára	65
4.2.3.	NSZT a második momentumra	67
4.2.4.	NSZT a varianciára	67
4.2.5.	NSZT a szórásra	68
4.2.6.	NSZT a mediánra	68
4.3.	Példa: Csónak bérbeadása extra haszonnal	68
5.	A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (– diszkrét és folytonos eset)	73
6.	Nevezetes folytonos eloszlások	75
6.1.	Exponenciális eloszlás	75
6.1.1.	Örökifjú tulajdonság	77
6.1.2.	Exponenciális eloszlások alkalmazásai	79
6.1.3.	Öregedő tulajdonság	80
6.1.4.	Fiatalodó tulajdonság	80
6.2.	Gamma-eloszlás	81
6.2.1.	Mennyi idő múlva történik az n -edik baleset?	85
6.2.2.	Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van?	87
6.3.	Normális eloszlások	87
6.3.1.	Standard normális eloszlás	87
6.3.2.	Normális eloszlás μ , σ paraméterekkel	91
6.3.3.	Centrális határeloszlás-tétel	96
6.3.4.	Normális eloszlások alkalmazásai	97
6.4.	Béta-eloszlások várható értéke, szórása (<i>Extra tananyag</i>)	100
7.	Közelítések normális eloszlással	103
7.1.	Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással	103
7.1.1.	Előkészítés egy példával	103
7.1.2.	A De Moivre – Laplace-tétel	106
7.1.3.	A De Moivre – Laplace-tétel, mint a centrális határeloszlás-tétel speciális esete	107
7.2.	Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal	107
7.2.1.	A relatív gyakoriság közelítő eloszlása	107
7.2.2.	Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal	108
7.2.3.	Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy...?	109
7.3.	Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással	111
7.4.	Várható érték közelítése átlaggal	111
7.4.1.	Az átlag közelítő eloszlása	111
7.4.2.	Várható érték közelítése átlaggal	112
7.4.3.	Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy...?	112
8.	Eloszlások transzformációi	115
8.1.	Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel	115
8.1.1.	Szemléltetés vezérvonalakkal	115
8.1.2.	Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi	117
8.1.3.	Egyenletes eloszlás monoton transzformációi	119
8.1.4.	Exponenciális eloszlás transzformációi	121
8.2.	Lineáris transzformációk leírása képletekkel	122
8.2.1.	Növekedő eset ($a > 0$)	123

8.2.2.	Csökkenő eset ($a < 0$)	124
8.2.3.	A két képlet egységesítése	126
8.3.	Monoton transzformációk leírása képletekkel	126
8.3.1.	Növekedő transzformációk	127
8.3.2.	Csökkenő transzformációk	128
8.3.3.	A két képlet egységesítése	129
8.4.	Lognormális eloszlások	129
9.	Diszkrét és folytonos eloszlások keverése (<i>Extra tananyag</i>)	133
10.	A főnökök halmaza nem mérhető (<i>Extra tananyag</i>)	135
10.1.	Trükkös eltolás	135
10.2.	Barátok és osztályok	135
10.3.	Főnökök	136
10.4.	Ellentmondásra jutunk	136
11.	A nagy számok erős törvénye eseményekre (<i>Extra tananyag</i>)	139
11.1.	A probléma megfogalmazása	139
11.2.	A valószínűség meghatározása	140
11.2.1.	Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása	142
11.3.	Az általános eset megfogalmazása	143
11.4.	Miért hívjuk az erős törvényt <i>erősnek</i> ?	143

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG fájl, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. október 17.

Üdvözlettel,

Vetier András

1. fejezet

Folytonos eloszlások

1.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x -re,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük az $f(x)$ területfüggvényeként adódó primitív függvényét:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

aminek deriváltjaként – minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos – az $f(x)$ -et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x).$$

A derivált – mint tudjuk – különbségek határértéke: $a < x < b$ fennállása mellett $a \rightarrow x, b \rightarrow x$ esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \rightarrow f(x).$$

Ezt a tény hétköznapi nyelven úgy lehet mondani, hogy $a < x < b$ fennállása mellett x -hez közeli a és b esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \approx f(x),$$

vagy átrendezéssel:

$$F(b) - F(a) \approx f(x)(b - a).$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbséggént kaphatjuk meg:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ez a jól ismert Newton–Leibniz-formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton–Leibniz-formulában a és b nem kell, hogy közel legyenek egymáshoz.

1.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek, de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumot tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetők diszkrétnek. Példák:

- X = a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor
- X = amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- X = egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- X = egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- X = a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonosnak** mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy – a fentiekkel ellentétben – egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvényének** nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$ -szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

Az eloszlásfüggvénynek egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0-val egyenlő, ezért a definícióban „kisebb vagy egyenlő” helyett „kisebb” is írható:

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x).$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathbf{P}(X \leq x)$ valószínűség nagyobb a $\mathbf{P}(X < x)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi az x valószínűsége:

$$\mathbf{P}(X \leq x) - \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(X = x).$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy **diszkrét** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő,
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz,
3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez,
4. az eloszlásfüggvény grafikonja vízszintes vonalakkól és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **diszkrét** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy **folytonos** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő,
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz,
3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez,
4. mindenhol folytonos.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **folytonos** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Vegyük észre, hogy a diszkrét és a folytonos esetek az 1–3. pontokban megegyeznek, és csak a 4. pontban térnek el.

A **jobb oldali eloszlásfüggvény** is definiálható a

$$T(x) = P(X \geq x)$$

képlettel. A jobb oldali eloszlásfüggvény tulajdonságait itt nem soroljuk fel. A tulajdonságok kigondolása az Olvasó dolga lesz a gyakorló feladatok között.

A könyvnek ebben a részében a folytonos esetre fókuszálunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel:

$$F'(x) = f(x).$$

Az $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**.

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re,

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekszik.

Tekintsünk most az x pont körül egy kicsi intervallumot, ami lehet például az $[x; x + \Delta x]$ intervallum, ahol Δx egy kicsi pozitív szám. Az előbbieket az $a = x$, $b = x + \Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

A jobb oldalon álló integrált $f(x)\Delta x$ -szel közelíthetjük, ezért

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x,$$

vagyis

$$f(x) \approx \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Előfordulhat, hogy az $[x; x + \Delta x]$ intervallum helyett kényelmesebb az x pont körüli $[x_1, x_2]$ intervallummal dolgozni. Ilyenkor

$$f(x) \approx \frac{P(x_1 \leq X \leq x_2)}{x_2 - x_1},$$

ahol $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül.

1. megjegyzés: Jól jegyezzük meg: *a sűrűségfüggvény értéke egy x helyen* azt mutatja, hogy az x körüli kicsi intervallumot véve, *a kicsi intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa a kicsi intervallum hosszának.*

2. megjegyzés: Hangsúlyozzuk, hogy a sűrűségfüggvény $f(x)$ -szel jelölt értéke *semminek sem a valószínűsége*. Ennek a ténynek az elfogadását és megjegyzését segítheti, ha észben tartjuk: *a sűrűségfüggvény értéke lehet 1-nél nagyobb is, ámde semmilyen valószínűség értéke sem lehet 1-nél nagyobb.* Mint néhány sorral feljebb már említettük, a sűrűségfüggvény értéke egy arány közelítő értékét jelenti.

1.4. Intervallum valószínűsége

Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$P(a \leq X \leq b)$$

valószínűsége az $F(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásával adható meg:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig – a Newton–Leibniz-szabály szerint – az $f(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett határozott integráljával egyenlő:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a, b]$ intervallum helyett a nyílt (a, b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

1.5. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$P((-\infty; x)) = P((x; +\infty)) = \frac{1}{2}.$$

Ilyenkor az x számot **mediánnak** nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimmetrikus valamilyen pontra, a szimmetriapont a mediánja.

Megjegyzés. Bár gyakorlati jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy a $(-\infty; x_1)$ és az $(x_2; +\infty)$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[x_1; x_2]$ intervallum minden pontja medián.

1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás és 0 és 1 közötti akármilyen p esetén az

$$F(x) = p$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész valószínűsége p , és a tőle jobbra lévő rész valószínűsége $(1 - p)$:

$$P((-\infty; x)) = p, \quad P((x; +\infty)) = 1 - p.$$

Ilyenkor az x számot a p értékhez tartozó **kvantilisnek**, vagy rövidebben mondva **p -kvantilisnek** nevezzük. Azt a függvényt, ami a 0 és 1 közötti p számokhoz hozzárendeli a p -kvantilis értékét, **kvantilis függvénynek** nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy a p -kvantilis értéke megegyezik az eloszlásfüggvény inverzének a p helyen vett értékével:

$$p\text{-kvantilis} = F^{-1}(p).$$

Tehát a kvantilis függvény megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével.

Az alábbi ábrán az

$$f(x) = 2x \quad (0 < x < 1) \quad \text{sűrűségfüggvényű,}$$

$$F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1) \quad \text{eloszlásfüggvényű}$$

eloszlással kapcsolatban szemléltetjük az eloszlásfüggvényt, illetve annak inverzét, a kvantilis függvényt:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
az eloszlás festékekkel szemléltetve											
F(x)	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
p-kvantilis	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
az eloszlás festékekkel szemléltetve											
p	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

1.1. ábra. Eloszlásfüggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei

p-kvantilis	0		0,32	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1
az eloszlás festékekkel szemléltetve												
p	0		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x	0		0,32	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1
az eloszlás festékekkel szemléltetve												
F(x)	0		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

1.2. ábra. Eloszlásfüggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei (más számokkal)

A szóban forgó eloszlásra a kvantilis függvény képletét így adhatjuk meg: $F^{-1}(p) = \sqrt{p}$ ($0 < p < 1$).

Vegyük észre, hogy tetszőleges eloszlásra $p = 0,5$ esetén a p -kvantilis éppen a medián. A 0,25-kvantilis neve: **alsó kvantilis**, a 0,75-kvantilis neve: **felső kvantilis**. (Figyelem: a kvantilis és kvartilis szavak csak egyetlen betűben különböznek. Ne keverjük őket össze!) Az ábrán szemléltetett eloszlásra

- az alsó kvartilis $\sqrt{0,25} = 0,5$,
- a medián $\sqrt{0,5} \approx 0,71$,
- a felső kvartilis $\sqrt{0,75} \approx 0,87$.

Azok, akik törtek helyett százalékokban szeretnek gondolkodni, a p -kvantilis helyett a megfelelő százalékértéket és **percentilist** mondhatnak. Például:

- 0,1-kvantilis helyett 10 százalékos percentilist,
- 0,9-kvantilis helyett 90 százalékos percentilist,
- 0,99-kvantilis helyett 99 százalékos percentilist

lehet mondani.