Vetier András

Valószínűségszámítás

4. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

4. rész

Folytonos eloszlások két dimenzióban

TYPOTEX

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

ISBN 978 963 493 035 8

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók **9**
1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség . . . 9
1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékkel . . . 10
1.3. Feltételes valószínűség . . . 12
1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül . . . 13
1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra . . . 13
1.6. Általános szorzási szabály . . . 14
1.7. Eloszlásfüggvény . . . 16

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás **17**
2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon . . . 17
2.2. Végtelen területű halmazon nem létezik egyenletes eloszlás . . . 17

3. Béta-eloszlások két dimenzióban **19**
3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között . . . 19
3.1.1. Három ember esete . . . 19
3.1.2. Tíz ember esete . . . 23
3.1.3. Általános eset . . . 25
3.2. Ábrák . . . 26
3.3. Feladatok megoldásokkal . . . 32
3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek valamilyen véges intervallumon . . . 34
3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek *(Extra tananyag)* . . . 35

4. Kísérleti eredmények függvényének várható értéke **37**
4.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . 37
4.2. Folytonos eset . . . 38
4.3. Szorzat várható értéke . . . 39

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének átlagára **41**
5.1. Diszkrét eset (ismétlés) . . . 41
5.2. Folytonos eset . . . 43

6. Vetület- és feltételes eloszlások **45**
6.1. Vetítések koordinátatengelyekre . . . 45
6.2. Vetületeloszlások sűrűségfüggvénye . . . 46
6.3. Feltételes eloszlások sűrűségfüggvénye . . . 47
6.4. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere . . . 50
6.5. Sűrűségfüggvények keverése . . . 51

6.6. Feltételes eloszlásfüggvény 52
6.7. Feltételes valószínűség 53
6.8. Feltételes medián 54
6.9. Feltételes várható érték 55
6.10. Feltételes variancia 55
6.11. Feltételes szórás 56
6.12. Egy számolós mintapélda: $Y = \text{RND}_1$, $X = Y \cdot \text{RND}_2$ 57
6.13. Folytonos szimuláció két dimenzióban 59

7. Transzformáció síkról síkra **63**
7.1. Példa: transzformáció szorzás és osztás segítségével 63
7.1.1. A transzformáció definíciója 63
7.1.2. A transzformáció inverzének képletpárja 63
7.1.3. Az egységnégyzet képe egy „vitorla” alakú halmaz 64
7.1.4. A transzformáció hatásának szemléltetése 64
7.1.5. A „börtönrács” „díszes rács”-ba transzformálódik, a négyzetből pedig „vitorla” lesz . 68
7.1.6. Pontfelhők transzformációja 70
7.1.7. Eloszlások transzformációja 71
7.2. Jacobi-mátrix 72
7.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat 73

8. Lineáris transzformáció síkról síkra **75**
8.1. Mátrixszal való szorzás 75
8.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás 76

9. Transzformáció síkról egyenesre **77**
9.1. Példák ábrákkal szemléltetve 77
9.1.1. Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel 77
9.1.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel 78
9.1.3. Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel 79
9.2. Általános transzformációs képlet 80
9.3. Számolások a fentebbi példákkal kapcsolatban 81
9.3.1. Transzformáció a $z = x + y$ összegfüggvénnyel 81
9.3.2. Transzformáció a $z = x \cdot y$ szorzatfüggvénnyel 84
9.3.3. Transzformáció a $z = x/y$ hányadosfüggvénnyel 86
9.4. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – példák ábrákkal szemléltetve . . . 88
9.4.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben 88
9.4.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben 89
9.4.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben 90
9.5. Kétlépéses módszer a $z = x + y$ transzformáció esetén – általános képlet 91
9.6. Számolások a fentebbi kétlépéses példákkal kapcsolatban 93
9.6.1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben 93
9.6.2. Az $f(x, y) = 4xy$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben 94
9.6.3. Kétdimenziós exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben 94
9.7. Konvolúció 94

10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel **97**
10.1. Regresszió egy dimenzióban . . . 97
10.1.1. A medián minimál tulajdonsága . . . 97
10.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása . . . 98
10.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága . . . 99
10.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása . . . 100
10.2. Regresszió két dimenzióban . . . 101
10.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása . . . 101
10.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása . . . 102
10.3. Egy számolós mintapélda . . . 102

11. Normális eloszlások a síkon **105**
11.1. Standard normális eloszlás a síkon . . . 105
11.2. Standard normális eloszlás r korrelációval . . . 106
11.3. Normális eloszlás μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, r paraméterekkel . . . 109
11.4. Vetületeloszlások . . . 116
11.5. Feltételes sűrűségfüggvény . . . 117
11.6. Feltételes medián és várható érték . . . 118
11.7. Feltételes szórás . . . 118
11.8. Példa: Testmagasság és testsúly . . . 119
11.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk . . . 122

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam.** Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. december 17.

Üdvözlettel,

Vetier András

1. fejezet

Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Két valószínűségi változót véve – legyenek ezek X és Y – összerakhatjuk őket egyetlen (X, Y) véletlen számpárrá, véletlen ponttá. Ily módon egy kétdimenziós valószínűségi változót kapunk. Példák:

1. Amikor az ejtőernyős célba ugrik, igyekszik a célpontot eltalálni, de ez nem sikerül pontosan. Általában a célpont közelében ér talajt. Ez a pont véletlentől (is) függ. A pont, illetve annak koordinátái egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változót adnak.

2. Ha véletlenszerűen választunk egy magyar férfit, akkor az

$$\begin{aligned} X &= \text{ testmagassága centiméterekben mérve,} \\ Y &= \text{ testsúlya (pontosabban: testtömege) kilogrammokban mérve} \end{aligned}$$

   jelölésekkel élve (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

3. Számítógéppel generáljunk három, 0 és 1 közötti véletlen számot, és legyenek

$$\begin{aligned} X &= \text{ a legkisebb,} \\ Y &= \text{ a legnagyobb.} \end{aligned}$$

   Ekkor (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó.

1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség

A folytonos kétdimenziós valószínűségi változókat általában a sűrűségfüggvényükkel jellemezzük. Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényt a síknak valamilyen A részhalmazán integrálva megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) véletlen pont az A halmazba esik:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left((X, Y) \in A \right) = \iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Ahhoz, hogy egy $f(x,y)$ függvény valamilyen kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülni:

$$f(x,y) \geq 0\,,$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; 1\,.$$

Ezek a feltételek minden kétdimenziós sűrűségfüggvényre teljesülnek, és ha egy kétváltozós függvény teljesíti ezeket a tulajdonságokat, akkor lehet olyan kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változót értelmezni, melynek sűrűségfüggvénye a szóban forgó függvény. (Lásd: 6. fejezet, 6.13. Folytonos szimuláció két dimenzióban.)

A sűrűségfüggvény értéke mint arányossági tényező. Ha A egy kicsike halmaz (x,y) közelében, akkor

$$\mathrm{P}\left(\,(X,Y) \in A\,\right) \;=\; \iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy \;\approx\; f(x,y) \;\times\; A \text{ területe}$$

és

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\left(\,(X,Y) \in A\,\right)}{A \text{ területe}}\,.$$

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény értéke semminek sem képviseli a valószínűségét. Ha (x,y) egy adott pont a síkon, akkor $f(x,y)$ jelentése a következő: az (x,y) pont közelében akármilyen kicsi A halmaz esetén annak a valószínűsége, hogy (X,Y) az A halmazba esik, közelítőleg $f(x,y) \times$ A területe:

$$\mathrm{P}\left(\,(X,Y) \in A\,\right) \;\approx\; f(x,y) \;\times\; A \text{ területe.}$$

A sűrűségfüggvény értékének közelítése. Legyen most A az a kicsi téglalap az (x,y) pontra támaszkodóan, melynek „bal alsó” sarka az (x,y) pont, „jobb felső” sarka pedig az $(x+\Delta x, y+\Delta z)$ pont. Ekkor A területe $\Delta x\,\Delta y$, ezért

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}\left(\,x < X < x+\Delta x \text{ és } y < Y < y+\Delta y\,\right)}{\Delta x\,\Delta y}\,.$$

Ezt a formulát fogjuk használni a 3. fejezetben a béta-eloszlások sűrűségfüggvényeinek levezetéséhez.

1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékkel

A felületi sűrűség – speciálisan a síkon vett sűrűség – fogalma a fizikából jól ismert. Szemléltetés céljából szeretnénk támaszkodni erre a fogalomra.

Ha egy kétdimenziós sűrűségfüggvénnyel van dolgunk, akkor könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a síkon, aminek a síkon vett sűrűségét a szóban forgó sűrűségfüggvény írja le. Ha valaki ezt mégsem tudja elképzelni, akkor olvassa lelkesen a következő „konstrukciót”!

Jön az úthenger! Képzeljük el az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény grafikonját, ami a háromdimenziós térben egy felület. A felület alatti térrészben – képzeletben – egyenletesen helyezzünk el egységnyi össztömegű festéket! Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a térrész minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a térrész térfogata. És akkor most jöjjön az úthenger, és a térrészben elhelyezett festéket préselje függőleges irányú préseléssel a vízszintes síkra!

A síkon kapunk egy tömegeloszlást, ami festékből készült, és így a festék színárnyalata is jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább az anyag (a festék). Ennél a konstrukciónál a sík (x,y) pontjában a tömegsűrűség éppen $f(x,y)$-nek adódik.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme, tessék: egy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény grafikonja (felülete) alatti térrészben vett egyenletes eloszlás vetülete az (x,y) síkra olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x,y)$.

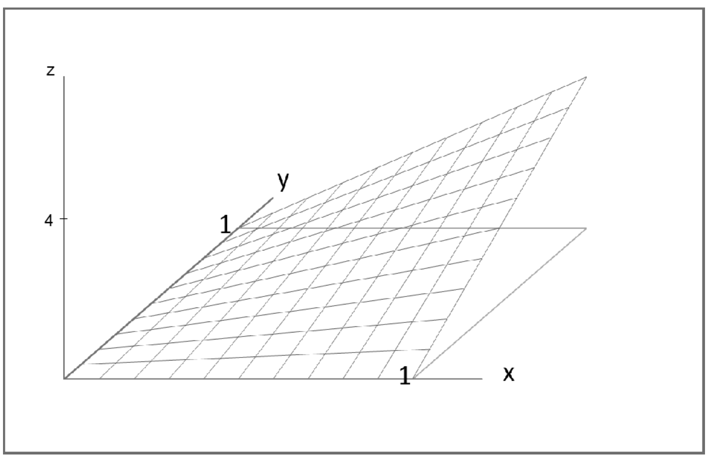
Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\right)$$

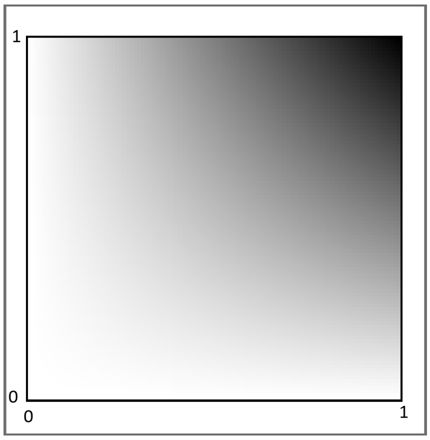
valószínűségi változót. Ennek sűrűségfüggvénye – mint azt néhány oldallal később belátjuk – a következő:

$$f(x,y) = 4xy \quad (0 < x < 1\,,\; 0 < y < 1)\,.$$

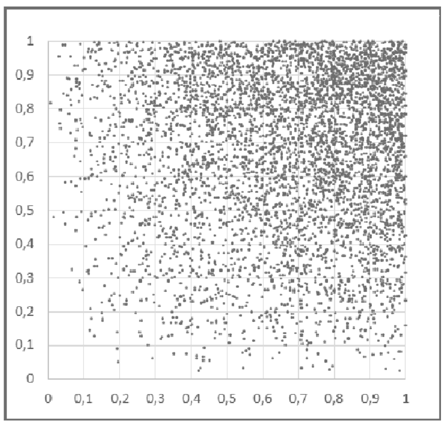
Íme a megfelelő ábrák:



1.1. ábra. $\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\right)$ *sűrűségfüggvény szemléltetése felülettel*



1.2. ábra. $\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\right)$ *eloszlásának szemléltetése festékkel*



1.3. ábra. $\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\right)$ *– pontfelhő 5000 kísérletből*

A következő oldalak, fejezetek bőven szolgáltatnak további példákat, tessék előre lapozgatni!

1.3. Feltételes valószínűség

Ha A és B a síknak részhalmazai, akkor $(X,Y)\in A$, illetve $(X,Y)\in B$ egy-egy eseményt jelentenek. Az $(X,Y)\in A$ feltétel mellett az $(X,Y)\in B$ esemény valószínűségét értelemszerűen $\mathrm{P}\big(\,(X,Y)\in B\,|\,(X,Y)\in A\big)$-vel, vagy rövidebben csak $\mathrm{P}(\,B\,|\,A\,)$-val jelöljük. A számláló és a nevező is egy-egy integrállal írható fel, ezért a feltételes valószínűség két integrál hányadosával egyenlő:

$$\mathrm{P}(\,B\,|\,A\,)=\frac{\mathrm{P}(\,A\cap B\,)}{\mathrm{P}(\,A\,)}=\frac{\iint\limits_{A\cap B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}.$$

Ha $B \subseteq A$, akkor $A \cap B = B$, ezért ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}(\,B \,|\, A\,) \;=\; \frac{\mathrm{P}(\,B\,)}{\mathrm{P}(\,A\,)} \;=\; \frac{\iint\limits_{B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}.$$

1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül

Legyen A a síknak egy részhalmaza, melynek pozitív a valószínűsége. Tegyük fel, hogy az $(X,Y) \in A$ esemény bekövetkezett. Ilyen feltétel mellett az (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nyilván

$$f(x,y\,|\,A) = \frac{f(x,y)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{f(x,y)}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}, \;\text{ ha } (x,y) \in A\,.$$

1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra

Állítás: Ha X és Y függetlenek, és sűrűségfüggvényeik $f_1(x)$, illetve $f_2(y)$, akkor az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direkt szorzata:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)\,.$$

Vázlatos bizonyítás.

$$\begin{aligned} f(x,y) \;&\approx\; \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x+\Delta x \;\;\text{ és }\;\; y < Y < y+\Delta y\,)}{\Delta x\,\Delta y} \;= \\ &= \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x+\Delta x\,)\cdot \mathrm{P}(\,y < Y < y+\Delta y\,)}{\Delta x\,\Delta y} \;= \\ &= \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x+\Delta x\,)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}(\,y < Y < y+\Delta y\,)}{\Delta y} \;\approx\; f_1(x)\cdot f_2(y)\,. \end{aligned}$$

1. példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,,\sqrt{\mathrm{RND}_2}\,\right)$$

valószínűségi változót. Mivel RND_1 és RND_2 függetlenek, a kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a szorzási szabállyal számítható:

$$f(x,y) \;=\; f_1(x)\cdot f_2(y) \;=\; 2x \cdot 2y \;=\; 4xy \qquad (0 < x < 1\,, 0 < x < 1\,)\,.$$

Néhány oldallal előbb felhasználtuk ezt az eredményt.

2. példa: Ha X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 4$ paraméterekkel, akkor (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direkt szorzata:

$$f(x,y) \;=\; f_1(x)\cdot f_2(y) \;=\; 3\,\mathrm{e}^{-3x}\cdot 4\,\mathrm{e}^{-4y} \;=\; 12\,\mathrm{e}^{-3x-4y} \qquad (x,y \geq 0).$$

1.6. Általános szorzási szabály

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy ismerjük X-nek az $f_1(x)$-szel jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges x érték mellett tudjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett milyen eloszlást követ Y. Jelöljük ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét $f_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$-vel. Az $f_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$ jelölésben az index mutatja, hogy a második koordináta, vagyis az Y sűrűségfüggvényéről van szó az első koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az y áll, a feltétel szerepében pedig az x. Az $f_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{2|1}(\,y\,|\,X = x\,)$ avagy $f_{Y|X}(\,y\,|\,x\,)$ jelöléseket is.

Természetesen az is előfordulhat, hogy ismerjük Y-nak az $f_2(y)$-nal jelölt sűrűségfüggvényét, és minden lehetséges y érték mellett tudjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett milyen eloszlást követ X. Ennek a feltételes eloszlásnak a sűrűségfüggvényét most értelemszerűen $f_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$-nal jelöljük. Az $f_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$ jelölésben az index mutatja, hogy az első koordináta, vagyis az X sűrűségfüggvényéről van szó a második koordinátával kapcsolatos feltétel mellett, és hogy a sűrűségfüggvényben a változó szerepében az x áll, a feltétel szerepében pedig az y. Az $f_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$ jelölés helyett lehet használni az $f_{1|2}(\,x\,|\,Y = y\,)$ avagy $f_{X|Y}(\,x\,|\,y\,)$ jelöléseket is.

Állítás: Ha X sűrűségfüggvénye $f_1(x)$, és Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $f_{2|1}(\,y\,|\,x\,)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(\,y\,|\,x\,).$$

Hasonlóképpen, ha Y sűrűségfüggvénye $f_2(y)$, és X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett $f_{1|2}(\,x\,|\,y\,)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(\,x\,|\,y\,).$$

Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt bizonyítjuk:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &\approx \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x + \Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y + \Delta y\,)}{\Delta x\, \Delta y} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x + \Delta x\,) \cdot \mathrm{P}(\,y < Y < y + \Delta y\,|\,x < X < x + \Delta x\,)}{\Delta x\, \Delta y} = \\
&= \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x + \Delta x\,)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}(\,y < Y < y + \Delta y\,|\,x < X < x + \Delta x\,)}{\Delta y} \approx \\
&\approx \frac{\mathrm{P}(\,x < X < x + \Delta x\,)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}(\,y < Y < y + \Delta y\,|\,X = x\,)}{\Delta y} \approx \\
&\approx f_1(x) \cdot f_{2|1}(\,y\,|\,x\,).
\end{aligned}$$

2. példa: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1 = 2$ paraméterrel, és az $X = x$ feltétel mellett Y exponenciális eloszlást követ x paraméterrel, akkor

$$f_1(x) \;=\; 2\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad (x \geq 0),$$

$$f_{2|1}(\,y\,|\,x\,) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-xy} \qquad (y \geq 0),$$

és így az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) \;=\; 2\,\mathrm{e}^{-2x}\cdot x\,\mathrm{e}^{-xy} \;=\; 2x\,\mathrm{e}^{-2x-xy} = 2x\,\mathrm{e}^{-x(2+y)} \qquad (x,y \geq 0).$$

3. példa $(\,Y = \text{RND}_1,\; X = Y\cdot \text{RND}_2\,)$**:** Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y-t már megválasztottuk, akkor 0 és Y között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X-ből és Y-ból rakjuk össze az (X,Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \text{RND}_1, \qquad X = Y\cdot \text{RND}_2.$$

Most pedig megadjuk, illetve kiszámoljuk (X,Y), illetve X sűrűségfüggvényének a képletét:

Ha Y egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között, akkor

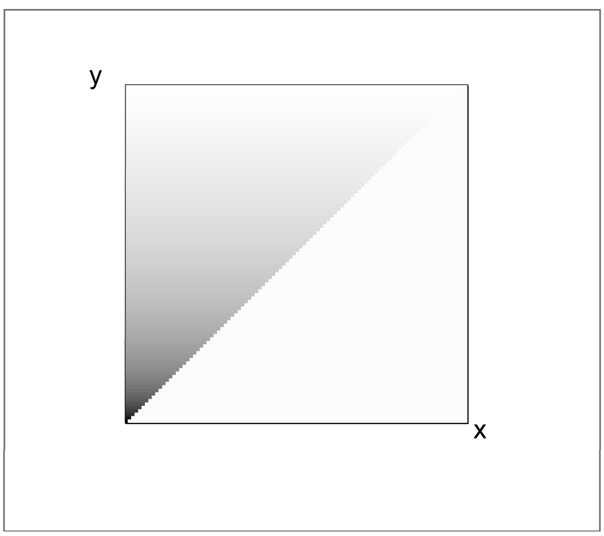
$$f_2(y) \;=\; 1 \qquad (0 < y < 1).$$

Mivel az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(\,x\,|\,y\,) \;=\; \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y).$$

A szorzási szabály alapján az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = 1\cdot\frac{1}{y} \;=\; \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y < 1).$$



1.4. ábra. (X,Y) *eloszlása festékkel szemléltetve, ahol* $Y = \text{RND}_1,\; X = Y\cdot \text{RND}_2$

1.7. Eloszlásfüggvény

Egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

képlettel definiáljuk. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvényből kétszeres parciális deriválással kapjuk:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Egy téglalap valószínűsége az eloszlásfüggvénynek a téglalap sarkain vett értékeiből kiszámolható:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(x_1 < X < x_2 \;\text{ és }\; y_1 < Y < y_2) = \\
&= \mathrm{P}(X < x_2 \;\text{ és }\; Y < y_2) - \mathrm{P}(X < x_1 \;\text{ és }\; Y < y_2) - \\
&\qquad - \mathrm{P}(X < x_2 \;\text{ és }\; Y < y_1) + \mathrm{P}(X < x_1 \text{ és } Y < y_1) = \\
&= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1).
\end{aligned}$$

A kétdimenziós eloszlásfüggvény fogalmát megemlítettük, de rögtön hozzá is tesszük: számunkra ennek a fogalomnak nincs jelentősége, nem is fogjuk használni a későbbiekben.