Holló Gábor

Geometria a matematikaversenyeken

Holló Gábor

Geometria a matematikaversenyeken

Felkészítő feladatok, ötletek és megoldások

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

Szakmailag lektorálta:
Kiss György egyetemi docens, ELTE Geometriai Tanszék

ISBN 978 963 493 136 2

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Gerner József
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomdai kivitelezés: Belvárosi Nyomda Zrt.
Felelős vezető: Derecskey László

Tartalom

Előszó

Tapasztalataim alapján a középiskolai matematikaversenyeken a diákok többségének az egyik legnagyobb problémát a geometriafeladatok jelentik. Évekkel ezelőtt összeállítottam egy néhány tucatnyi feladatból álló válogatást azzal a céllal, hogy ezen feladatok ismerete már jó belépő lenne a versenyeken előforduló geometriai témájú feladatok megoldásához. Végül addig bővült, alakult az anyag, hogy ez a könyv lett a végeredmény.

A könyv feladatai között találhatók régi OKTV-n, Arany Dániel-versenyeken vagy KöMaL-pontversenyben kitűzött feladatok és nagyon sok olyan feladat, amely a magam megfigyeléseiből származik – ezek közül több a *Középiskolai Matematikai Lapok*ban is megjelent kitűzött feladatként.

A könyv felépítése a versenyeken leggyakrabban előforduló témákat követi, kiegészítve olyan témakörökkel, amelyek kisebb szerepet kapnak a középiskolai geometriaoktatásban, mint pl. az érintőnégyszögekkel vagy a parabolával kapcsolatos feladatok. Terjedelmi okokból a térgeometriai feladatok közül csak néhány szerepel a feladatok között.

A feladatok megoldásához (egy-két kivétellel) az emelt szintű geometriai ismeretek elegendők.

A könyvben a háromszögekkel kapcsolatosan általában a szokásos jelöléseket alkalmaztam (kivéve, ha az eredeti feladat szövegében más volt a jelölés), tehát az ABC háromszögre: az A, B, C csúcsoknál lévő szögek rendre α, β, γ, a csúcsokkal szemközti oldalak rendre a, b, c, a háromszög félkerülete s.
Nevezetes vonalak az A, B, C csúcsokból:

magasságvonalak: m_a, m_b, m_c,
súlyvonalak: s_a, s_b, s_c,
belső szögfelezők: f_a, f_b, f_c.

Nevezetes pontok: magasságpont M, súlypont S, körülírt kör középpontja K, beírt kör középpontja O, az a oldalhoz írt kör középpontja O_a.
Nevezetes körök: a körülírt kör sugara r, a beírt kör sugara ϱ, a hozzáírt körök sugarai az a, b, c oldalhoz írt érintő körökre rendre ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

A könyv használatáról: A feladatgyűjteményben a nagyon könnyűtől az elég nehézig mindenféle feladat előfordul. Célszerű a feladatokkal sorban haladva próbálkozni, előfordul ugyanis, hogy egyes feladatok megoldásához egy korábbi feladatban megfogalmazott állítást felhasználva jutunk. A könyv elején lévő *Néhány bevezető feladat* című fejezet olyan feladatokat tartalmaz, amelyekre egyes későbbi feladatok hivatkoznak. Ha egy feladattal nem boldogulunk, a *Bizonyítási módszerek, megoldási ötletek* fejezetben próbáljunk először ötletet találni. Ha így sem sikerül, az *Útmutatások* fejezetben található néhány mondatos iránymutatás segíthet. A geometriában egy jó ábra a fél megoldással felér, ne sajnáljuk rá az időt. A megoldások részletesen kidolgozottak, esetenként több megoldást láthatunk, érdemes mindet áttanulmányozni a feladatmegoldó képességünk fejlődése érdekében. Bár igyekeztem a legegyszerűbb megoldást is megmutatni, előfordulhat, hogy itt-ott elkerülte a figyelmemet a legelegánsabb megoldás.

A könyvet ajánlom a geometria iránt érdeklődő középiskolás diákoknak, versenyekre készülőknek, tanár szakos egyetemi hallgatóknak, de az emelt szintű érettségi geometriaanyagának elmélyítésére is jól használható. Az anyag alkalmas önálló felkészülésre, tanároknak szakköri feldolgozásra.

Köszönettel tartozom a könyv szakmai lektorának, dr. Kiss György egyetemi docensnek az alapos lektori munkáért, az értékes megjegyzésekért és kiegészítésekért.

Budapest, 2019. november

Holló Gábor

Feladatok

Néhány bevezető feladat

1. Egy háromszög belsejében lévő tetszőleges P pontnak az oldalaktól mért távolsága rendre x_a, x_b, x_c, a megfelelő magasságok m_a, m_b, m_c. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = 1.$$
2. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszög magasságpontját tükrözzük az oldalegyenesekre, a kapott pontok a körülírt körön lesznek.
3. Bizonyítsuk be, hogy egy hegyesszögű háromszög magasságvonalai a talpponti háromszögének belső szögfelezőivel esnek egybe.
4. Az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja P. Az APC és PBC háromszögek beírt körei érintsék az AB oldalt az E és F pontokban, az ABC háromszög beírt köre pedig D-ben. Mutassuk meg, hogy $ED = PF$.
5. Az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja P. Mutassuk meg, hogy az APC és PBC háromszögek beírt köreinek CP-től különböző közös belső érintője az AB oldalt az ABC háromszög beírt körének érintési pontjában metszi.
6. Mutassuk meg, hogy ha egy trapéz átlóinak metszéspontján át párhuzamost húzunk az alapokkal, akkor ennek a párhuzamosnak a trapézba eső szakaszát az átlók metszéspontja felezi. Adjuk meg a szakasz hosszát az alapok függvényében.
7. Az ABC háromszög magasságpontja M, az AB oldal felezőpontja F. Mutassuk meg, hogy a C csúcsból az FM egyenesre állított merőleges talppontja rajta van az ABC háromszög körülírt körén.
8. Az ABC háromszög AC és BC oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetek középpontjai és az AB oldal felezőpontja egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsai.
9. Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges P ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Mutassuk meg, hogy ha a keletkezett három P csúcsú háromszög területe t_1, t_2, t_3, továbbá a háromszög területe t, akkor:
$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{t}.$$
10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszögben
$$f_c^2 = ab - c_1c_2,$$

ahol f_c a háromszög C csúcsából induló belső szögfelezőjének hossza, a és b a mellette lévő oldalak, c_1, c_2 a c oldalból a szögfelező által kimetszett szakaszok.

11. Mutassuk meg, hogy ha egy háromszögben az egyik csúcsot a szemközti oldal egy pontjával összekötő x hosszúságú szakasz az őt közrefogó a, ill. b hosszúságú oldalakkal α, ill. β szöget zár be, akkor a szakasz hosszára
$$x = \frac{ab\sin(\alpha+\beta)}{a\sin\alpha + b\sin\beta}.$$
12. Négy egyenes négy háromszöget határoz meg. Bizonyítsuk be, hogy a négy háromszög körülírt köre egy ponton megy át.
13. Legyen az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges pontja D, az ADC, ill. DBC háromszögek beírt köreinek középpontja E, ill. F. Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszög beírt körének AB oldalon lévő érintési pontját tükrözzük az EF egyenesre, a tükörkép a CD szakasznak olyan pontja, amelynek a C csúcstól mért távolsága nem függ a D pont helyzetétől.
14. Az ABC háromszög AB, AC oldalait érintő k_1 kör és a BA, BC oldalait érintő k_2 kör egyik közös belső érintője átmegy az ABC háromszög beírt körének az AB oldallal közös pontján. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a k_1 és k_2 körök másik közös belső érintője átmegy a C csúcson.
15. Adott a síkban egy O középpontú k kör és az O-tól különböző P pont. Húzzunk a P-n át k-hoz szelőt, majd a metszéspontokban a körhöz érintőket. Mi lesz az érintők metszéspontjának mértani helye?

Húrnégyszögek, érintőnégyszögek, egy körön vannak...

16. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján lévő D ponton át húzott, a befogókkal párhuzamos egyenesek a befogókat a P és Q pontokban metszik. Hol van a D pont, ha az A, B, P és Q pontok egy körön vannak?
17. Az $ABCD$ paralelogramma AB és BC oldala fölé rajzolt szabályos háromszögek harmadik csúcsa E és F. Bizonyítsuk be, hogy az AF, EC, FD és DE egyenesek húrnégyszöget zárnak közre.
18. Négy kör kívülről érinti egymást úgy, hogy minden kör másik kettőt érint. Bizonyítsuk be, hogy a négy érintési pont egy körön van.
19. Az ABC háromszög AB oldalának D pontját összekötjük a C csúccsal. Bizonyítsuk be, hogy az ADC, ill. CDB háromszögek beírt köreinek középpontjai, a D pont és az a pont, ahol az ABC háromszög beírt köre érinti az AB oldalt, egy körön vannak.
20. Mutassuk meg, hogy ha egy érintőnégyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor a négyszög deltoid.