Ron Aharoni

ÖRDÖGI KÖRÖK

Az abszurd viccektől a Gödel tételig

TYPOTEX

Tartalom

A macska és a farka

Hadd szóljak néhány szót, mielőtt belekezdenék (Egy beszéd elé)

A kislányom kérdezte egyszer, amikor hazaérkezett a fogorvostól: – Tudod, mi kell, hogy ne fájjon az érzéstelenítő injekció? Előtte egy másik! És persze ahhoz is egy újabb, hogy ne érezzük.

Hát nem vicces? De még mennyire! Pedig ennek a fajta gondolkodásnak megvan a komoly oldala is. „Önmagára hivatkozásnak", de „ördögi körnek" is nevezhetjük, egész könyvünk erről szól. Az érzéstelenítő injekció jó példa a körben forgó módon definiált feladatra, amelynek megoldása feltételezi, hogy már megoldottuk. Másik példa, amikor azt tanácsoljuk a gödörbe pottyant embernek, szerezzen létrát, és másszon ki vele. Az efféle helyzeteket nem minden ok nélkül nevezzük „ördögi köröknek". Hasonló bosszantó élmény éri például azt, aki az Egyesült Államokba utazik és hitelkártyát próbál szerezni. Be kell mutatnia hitelezési történetét, amely szinte minden esetben addigi hitelkártya-használatát takarja.

Körben forgó problémáról van szó olyan esetekben, amikor például a macska saját farkát kergeti, szemüveg kéne, hogy megtaláljuk a szemüvegünket, vagy a pályakezdőt tapasztalat hiányára hivatkozva utasítják el. A kudarcot borítékolni lehet.

Münchhausen bárót leszámítva senki nem tudja saját hajánál fogva, lovastul kihúzni magát a vízből. Arkhimédész így fogalmazta meg ugyanezt: „adj egy emelőt és egy biztos pontot, kifordítom sarkából a világot.” Nemcsak a maga kitalálta csodálatos csigákkal akart elbüszkélkedni, arra is rá akart világítani, hogy semmilyen biztos pontból nem tudjuk felemelni önmagunkat.

Vannak körkörös feladatok, amelyek önmagukat hiúsítják meg. „Mindenki mosolyogjon”, mondja a fényképész, és többnyire az ellenkezőjét éri el. A választások előtt nyilvánosságra hozott közvélemény-kutatás képes önmagára rácáfolva megváltoztatni az eredményt. *A 22-es csapdája* című Joseph Heller-regényben a pilóták megúszhatják a bevetést, ha bizonyítják, hogy bolondok, ám a szabályzat 22. pontja kimondja, hogy aki a bevetést el akarja kerülni, az épeszű. „Ne hallgass erre a tanácsra!” – nem könnyű megfogadni.

Az ördögi körök agyunkra tudnak menni, például amikor körben forgó fogalmakkal próbálnak megetetni. Abszurd feltevés például, hogy „az itt definiáltnál eggyel nagyobb szám” kifejezés meghatároz egy valós számot – önmagánál eggyel nagyobb számot kellene elgondolnunk. „Napóleon apja” konkrét személy, az „ebben a mondatban meghatározott ember apja” viszont nem. Ha az ellenkezőjét feltételezzük, képtelenséget kapunk. Valakinek a saját papájának kell lennie.

Ezekben a példákban az ördögi kör teljesen átlátható, senki nem dől be neki. Néha viszont annyira jól álcázza magát, hogy bedőlünk neki és képtelenségekre jutunk. Ez az ördögi körök ördögi arca, rossz oldala. Ennek szenteljük könyvünk első részét. Csecsemőfaló krokodil, betarthatatlan megállapodások, Isten (és a Loch Ness-i szörny) létezésének bizonyítékai kerülnek elő, továbbá két ördögi körökön alapuló nevezetes filozófiai paradoxon: a determinizmus és a szabad akarat rejtélye, illetve a test-lélek probléma.

Egy téli reggel Malacka látja, amint Micimackó apró cserje körül köröz, közben azt hajtogatja, hogy valamilyen állat – feltehetőleg menyét – nyomait követi. Amikor Malacka is társul hozzá, hamarosan újabb lábnyomokra bukkannak ugyanattól az állattól. Majd egy harmadikra. Mikor kiderül, hogy egy negyedik is csatlakozott az első háromhoz, Malackának eszébe jut, hogy sürgős dolga van otthon. Ekkor füttyszó harsan fel a fa tetejéről, ahol Róbert Gida üldögél és őket nézi. – Mit csináltál, csacsi öreg medvém? – faggatja Micimackót. – Előbb kétszer magadban megkerülted a cserjét, aztán jött Malacka és vele együtt tettetek még egy kört…*

A történet legfontosabb tanulsága, milyen fontos kilépni a körből és kívülről látni. Amint sikerült, rögtön feltűnik, mekkora energiapazarlás volt benne lenni. A tudományban hatalmas szerepet játszottak azok az ördögi körök, amelyeket sikerült kívülről elemezni. Néha maga a természet állít elénk körben forgó problémákat, ilyenkor is lényeges, hogy felismerjük őket. Ha egy feladat megoldhatatlan, jobb, ha legalább tudunk róla. Ez az ördögi körök jó oldala. Mély felismerésekhez vezet, ha ezt megértettük.

*Karinthy Frigyes fordítása nyomán

Ez a témája könyvünk második részének. Három olyan matematikai felfedezésről beszélünk, amely az ördögi körök felismeréséből született. Az első, Georg Cantor 1878-as tétele azt mondja ki, hogy nem létezik a világ legnagyobb halmaza. Minden halmaznál van nagyobb. Majd az ördögi körök legnagyobb sikerével, Kurt Gödel nem-teljességi tételével találkozunk, amely (nagyjából) arról szól, hogy nem minden bizonyítható formálisan, ami igaz. Aztán Alan Turing 1936-ban született felismerésével foglalkozunk, mely szerint nem létezik mindentudó gép. Ma úgy mondanánk: nincs olyan komputer-program, amely minden problémát meg tudna oldani. Különben olyan problémát is fel tudna állítani, amely kifog rajta – ahogy egy mindenható Isten is tudna akkora követ teremteni, hogy maga se emelhesse fel.

Az ördögi körök két arca nem független egymástól. A rossz és a jó oldal összefonódik, kölcsönösen áthatja egymást. A paradoxonok olykor matematikai bizonyításokat sugallnak (ez történt a Gödel-tétel bizonyításánál is), máskor pedig nevetségessé teszik a matematikai bizonyításokat. A rossz oldal csak a jó oldal másik arca, de mint ilyen, az eredetiről is árulkodik. És persze neki is megvan a maga külön bája.

Azok kedvéért, akik mélyebbre ásnának, kiegészítettem a könyvet még néhány fejezettel a *Gyakorlott hegymászóknak* szóló részben, ahol rávilágítok bizonyos speciális kérdésekre és bemutatok néhány bonyolultabb matematikai összefüggést.

Végezetül méltánytalan lenne hallgatni az ördögi körök elbűvölő oldaláról. Arról, hogy viccek kiapadhatatlan forrásai, és mindig számítani lehet szórakoztató hatásukra.

Olyan bizonytalannak érzem magam. Vagy nem is tudom…

A malac panaszra fakad Isten előtt. – Annyi csúfságot mondanak rólam! Hogy piszkos vagyok, falánk, meg tunya. Nem igazság! – Isten megcirógatja a fejét és így szól: – Hát, elég nagy disznóság.

Az „ördögi kör” szótári definíciója: Lásd: „ördögi kör”.

A könyv utolsó részében a körben forgó jelenségek humorával foglalkozom, megpróbálom megfejteni, mitől olyan mulatságosak.

Rossz oldal – a paradoxonok

I. rész
Bűvészet

– Úgy hallom, esik valami – mondta a szél.

– Ó, semmi, csak a szél – nyugtatta meg az anyja.

(Nathan Zach, „Úgy hallom, esik valami”, *Különféle versek*)

A megfoghatatlan csaló

Szeretnél fizetni, hogy jól becsapjanak? Elsőre nyilván mindenki rávágja: – Szeretne a fene! – De gondoljunk csak meg, nem pontosan így teszünk, amikor megnézzük egy bűvész előadását? Becsap minket, a lehetetlent idézi a szemünk elé, és mi pont ezt élvezzük. Hogy a szó szoros értelmében elbűvöl.

Ez a rész a bűvészetről szól. Kalapból előugró nyúl, kettéfűrészelt nő, aki egyre csak vigyorog Csakhogy mindez ezúttal nem a színpadon, hanem előadótermekben vagy könyvek lapjain zajlik. És nem szemünk fényét, hanem az eszünket veszítjük. Intellektuális téren történik a csalás, és „paradoxonnak” nevezzük. Megtévesztés áldozataivá válunk, megtapasztaljuk a lehetetlent. Kikezdhetetlennek tűnő alapfeltevésekből képtelen következtetésekre jutunk.

Ha valaki azt mondja, Londonban éppen esik az eső, miközben az egész város felett hét ágra süt a nap és felhőtlen kék az ég, nyilván azt gondoljuk, hogy elment a józan esze. A paradoxon pontosan így működik. Két, egyaránt cáfolhatatlannak tűnő állítást fogalmaz meg, amelyek szöges ellentmondásban állnak. Nyilvánvaló, hogy csalásnak kell lennie a dologban. A valóságban nincs ellentmondás, a világ szilárd alapokon áll. Bizonyára téves előfeltevések miatt éltük át a lehetetlent. Láthatatlan hiba vezetett a nyilvánvaló képtelenséghez.

A csalás a legtöbb paradoxon esetében egyszerű, könnyen leleplezhető. A becsapott hallgató készségesen csatlakozik az ő kárára felharsanó nevetéshez, majd folytatja a dolgát. Vannak pedig paradoxonok, amelyek évszázadokat, sőt évezredeket túléltek. Különös sejtelme támad az embernek: minden egyes makacs paradoxonnak ugyanaz a titka – ördögi körökön alapul. Titokzatos módon elhiteti velünk, hogy képesek vagyunk hajunknál fogva felemelni saját magunkat. Hogy mi a trükkje? A mesteri álcázásban rejlik. A csalafintaságot az is megkönnyíti, hogy agyunk sokkal inkább koncentrál kifelé, mint befelé, ezért nehezen veszi észre.

Íme, egy paradoxon, amely G. G. Berry oxfordi könyvtárosról kapta a nevét. Berry mesélte el Bertrand Russell (1872-1970) matematikus-filozófusnak, akiről tudta, hogy kedveli a paradoxonokat és 1906-ban Russell publikálta is. Így hangzik:

Hány természetes számot lehet leírni legfeljebb százbetűs szöveggel? Bizonyára rengeteget: „tizenhárom”, „egymillió”, „Kína lakosainak száma”, „egymillió az egymilliomodikon az egymilliomodikon” – csupa száz betűnél rövidebb szöveg, amely meghatároz egy számot. Mégis csak véges sok ilyen szám létezik, hiszen legfeljebb százbetűs szövegekből is csak véges sok van. Számokból viszont végtelen, lesz tehát olyan, amelyik nem szerepel ezek között. Vagyis létezik olyan „legkisebb természetes szám, amely nem definiálható legfeljebb százbetűs szöveggel”. De lám csak, épp most definiáltuk egy száz betűnél rövidebb szöveggel.

Paradoxon? Nagyon úgy hangzik. Pedig valójában csak egy sokkal egyszerűbb „paradoxont” álcáz, nem is nagyon ügyesen. Tekintsük a következő „definíciót”:

A legkisebb természetes szám, amelyet ez a mondat nem határoz meg.

Melyik számra utal ez a szöveg? A legkisebb természetes számra, a 0-ra? Nem, hiszen akkor a 0-t határozná meg. Tehát a legkisebb meg nem határozott szám az 1. Szóval az 1-ről van szó? Aligha, mert akkor a legkisebb meg nem határozott szám a 0 volna. Valójában ez a mondat nyilvánvalóan paradox jellegű: ha feltételezzük, hogy egy számra utal, akkor ez a szám definíció szerint nem azonos önmagával. Az ilyen „definíciót” persze senki nem venné komolyan, mert szemlátomást körben forog, önmagára hivatkozik. Túlságosan feltűnő benne az ördögi kör.

Az igazság azonban az, hogy Berry paradoxonja pontosan ugyanígy jár el. Úgy definiál egy számot, hogy „ne legyen azonos önmagával”. Legfeljebb száz betűvel definiál egy számot, amely „különbözik minden, legfeljebb száz betűvel definiálható számtól”, köztük önmagától is, (mert maga is olyan szám, amely legfeljebb száz betűvel meghatározható”). Hogyan lehetséges tehát, hogy „az itt meghatározottól eltérő legkisebb szám” meghatározással ellentétben Berry paradoxonja ekkora elismerést vívott ki magának? A titok a figyelemelterelés módjában rejlik. A játék többszereplőssé vált, immár a „kettő”, a „négy”, „Kína lakosainak száma”, minden, legfeljebb száz betűvel definiálható szám részt vesz benne. Valójában azonban mindez nem számít.

Ez csak az erdő, amelytől nem látjuk a fát – „az a szám, amelyik különbözik önmagától”. Elegendő ez a soványka álca, hogy érvényesnek mutassa a definíciót, miközben nem győzünk csodálkozni, milyen tekervényes is ez a logika.