

Simonovits András

Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban

Simonovits András

Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban

Második, átdolgozott kiadás

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



© Simonovits András, Typotex, Budapest, 2023
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 234 5

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa

A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

Előszó az első kiadáshoz	v
Előszó a második kiadáshoz	vii
Bevezetés	1
I. rész. Dinamika optimalizálás nélkül	15
1. Lineáris differenciaegyenletek	17
1.1. Általános lineáris rendszerek	17
1.2. Síkbeli lineáris rendszerek	30
1.3. Lineáris szabályozási rendszerek*	36
2. Diszkrét idejű lineáris modellek	45
2.1. Az államadósság dinamikája	45
2.2. A lineáris akcelerator–multiplikátor modell	47
2.3. A lineáris indítási–beruházási modell*	51
2.4. A lineáris készletjelzéses modell	56
2.5. A stabil népesség modellje	59
2.6. A Lucas-féle modell	61
3. Nemlineáris differenciaegyenletek	65
3.1. A fixpont létezése és stabilitása	65
3.2. Határciklusok	75
3.3. Káosz	77
4. Diszkrét idejű nemlineáris modellek	85
4.1. Szeszélyes ingadozások	85
4.2. A nemlineáris akcelerator–multiplikátor modell	88

4.3. A nemlineáris indítási–beruházási modell*	93
4.4. A nemlineáris készletjelzéses modell	101
4.5. Tanulságok	103
5. Közöséges differenciálegyenletek	105
5.1. Lineáris rendszerek	105
5.2. Nemlineáris rendszerek	111
5.3. Szabályozás folytonos időben	124
6. Folytonos idejű modellek	127
6.1. Növekedési modellek	127
6.2. A kormányzati stabilizálás modellje*	132
6.3. A versenyzői árigazodás cseregazdasági modellje	134
II. rész. Dinamika optimalizálással	143
7. Optimális szabályozáselmélet – diszkrét idő	145
7.1. A determinisztikus optimumelv	146
7.2. A sztochasztikus optimumelv	156
7.3. Optimális LQ-szabályozás teljes megfigyelésnél*	157
7.4. Optimális állapotbecslés és szabályozás tökéletlen megfigyelésnél*	161
8. Szabályozási modellek – diszkrét idő	167
8.1. Több időszakos optimális megtakarítás	167
8.2. Optimális felhalmozás	171
8.3. Optimális lehalászás	176
9. Az optimális folyamatok (szabályozás-) elmélete	179
9.1. Alapfeladat	180
9.2. Variációszámítás	184
9.3. Kiegészítések	188
10. Optimális fogyasztási pályák – folytonos idő	197
10.1. Egzogen bér és kamatláb	197
10.2. Endogen bér és kamatláb, végtelen időtáv	203

III. rész. Kiegészítések	209
11. Együtt élő nemzedékek (OLG)	211
11.1. Egy OLG-cseregazdaság	212
11.2. Termelő OLG-gazdaság	222
11.3. Nyugdíjrendszerek és tőkefelhalmozás	226
11.4. A pénz mint értékkepző egy OLG-modellben	228
11.5. Tanulságok	233
12. Együtt élő korosztályok	235
12.1. Általános várakozási séma	236
12.2. Várakozások az együtt élő korosztályoknál	238
13. Rugalmas nyugdíjkorhatár tervezése (társszerző: Eső Péter)	245
13.1. A rugalmas korhatár	245
13.2. Az első legjobb megoldás	247
13.3. A második legjobb megoldás	249
13.4. Numerikus szemléltetés	252
14. Evolúciós játékelmélet	259
14.1. Játékelméleti emlékeztető	259
14.2. Evolúciósan stabil stratégiák	261
14.3. Dinamika	264
15. Két ágensalapú modell	267
15.1. Szegregációs dinamika (társszerző: Somogyi Róbert)	267
15.2. Az önkéntes nyugdíj megtakarítás modellje (társszerző: Király Balázs)	270
16. Matematikai függelék	281
Feladatmegoldások	295
Hivatkozások	311

Előszó az első kiadáshoz

Kutatói pályám kezdetén, 1973-ban kezdtem foglalkozni dinamikus közgazdasági modellekkel (ahol a rendszer állapota a korábbi állapot függvényében változik), és kisebb-nagyobb kitérőkkel azóta is ezen a területen dolgozom. Két évtized alatt legalább három dinamikai témakört tanulmányoztam: (i) 1973 és 1981 között az *árjelzés nélküli szabályozás* témakörét vizsgáltam, (ii) majd 1982 és 1991 között a *szocialista gazdaság növekedési problémáit és ciklusait* elemeztem. (iii) Jelenleg az *együtt élő nemzedékek és korosztályok* elméletét kutatom, ahol továbbra is dinamikus (vagy azzal határos) kérdésekkel foglalkozom.

Amióta 1988 körül megkezdtem a Budapesti (akkor még Marx Károly) Közgazdaságtudományi Egyetemen dinamikus közgazdaságtani előadásaimat, szomorúan tapasztalom, hogy egyetemi tanulmányaik alatt a hallgatók milyen keveset hallanak a dinamikus közgazdaságtanban szükséges matematikai módszerekről: differenciál- és különösen a közgazdaságtanban az előbbinél fontosabb differenciaegyenletekről, nem is beszélve a dinamikus optimumszámításról. Fokozatosan megérlelődött bennem az igény: jó lenne megismertetni az érdeklődő diákokat azokkal az alapvető matematikai módszerekkel, amelyekre a dinamikus közgazdaságtanban szükség van. Vagy kifordítva a gondolatot: bemutatni azokat a dinamikus közgazdasági modelleket, ahol a legfontosabb matematikai módszerek sikerrel alkalmazhatók.

1993-ban a Rajk László Szakkollégium elfogadta pályázatomat, és Soros György anyagi támogatásával örömmel vágtam a feladatnak: nekiláttam egy jegyzet megírásának, amelynek javított (de távolról sem végleges) változatait 1993–1997-ben a BKE doktori program I. és II. évfolyama, illetve 1996-ban a BKE ötödéves hallgatóinak adtam elő.

Az ízelítő készítésénél szabadon kölcsönöztem magamtól és más szerzőktől – természetesen a források feltüntetésével és az anyagok átszabásával. A matematikai és közgazdasági fejezetek következetes váltogatásával Chiang (1984) bevezető jellegű (azóta több kiadást megért) könyvét, valamint Stokey–Lucas (1989) „nagyon haladó” szintű könyvét követtem, azonban igyekeztem középszinten maradni. Egyrészt be akartam mutatni a nagyon hatékony módszereket némi általánosságban. Másrészt lemondtam a funkcionálanalízis, a mértékelmélet és más magasabb matematikai elméletek és közgazdasági alkalmazásaik bemutatásáról. Csak az olvasó döntheti el, hogy mennyire sikerült e kísérlet.

Munkahelyemen és vendégkutatói posztjaimon számos kolléga volt hatással rám. Elsőként Kornai Jánost említem meg, aki a szabályozáselmélet és a szocialista makrodinamika témakörébe vezetett be. Húszéves együttműködésünkéről számos – részben a könyvben is tárgyalt – közös cikk tanúskodik. Cars Hommes

és Helena Nusse a szocialista gazdaság kaotikus modelljének közös kutatása közben szinte bevezettek a nemlineáris dinamika modern fejezetébe. Molnár György az együtt élő korosztályok modellezésében volt társszerzőm.

Sokat köszönhetek Bródy Andrásnak, Kapitány Zsuzsának, Michael Lovellnek és Martos Bélának az árjelzés nélküli szabályozás, Bagdy Gábornak, Bauer Tamásnak, John Burkettnak, Chikán Attilának, Halpern Lászlónak, Lackó Máriának, Molnár Györgynek és Soós Károly Attilának a szocialista ciklusok, végül Augusztinovics Máriának, Johann Brunnernek és Eduardo Siandrának az együtt élő korosztályok kutatásánál nyújtott segítségért.

Az optimalizáláson alapuló dinamikus modellekre Ambrus-Lakatos Loránd, Kertesi Gábor és Leonard Mirman hívta föl a figyelmem. Köszönetemet fejezem ki Balla Katalinnak, Darvas Zsoltnak, Eső Péternek, Kocsis Viktóriának, Magyar-kúti Gyulának, Romhányi Balásznak, Szabó Imrének, Tallos Péternek és Vincze Jánosnak a kézirat korábbi változatainak gondos átnézéséért, Zalai Ernőnek és Michael Landesmannak támogatásukért, és számos további hallgatónak a hibák gyomlálásáért. Természetesen az említett személyek a könyv tartalmáért és a benne maradó hibákért semmiképpen sem felelősek. Utoljára, de nem utolsósorban itt köszönöm meg Simonovits Miklósnak, hogy saját készítésű programjaival lehetővé tette, hogy csúf Word 5.0 dokumentumomat elegáns $\text{\TeX}$ -anyagká formáljam.

Itt fejezem ki hálámat a kutatás anyagi és erkölcsi elősegítéséért munkahelyemnek (az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének), az OTKANak (T 6919 és 019696), a Művelődési és Kulturális Minisztérium MKM 242/1996–97 sz. támogatásának, valamint a következő intézményeknek: a belga CORE, Louvain-la-Neuve; az olasz Modenai Egyetem; az amerikai University of Illinois at Urbana-Champaign és Wesleyan University, CT; a holland Groningeni Egyetem és a Tilburgi Egyetem (CentER), végül az osztrák Linzi Egyetem.

Köszönettel tartozom a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó kollektívájának, hogy mindent megtett a könyv sikeres megjelentetéséért.

Örömmel veszek minden konstruktív megjegyzést a következő e-mail-címen: simonov@econ.core.hu

Budapest, 1998. május

A szerző

Előszó a második kiadáshoz

A 23 évvel korábban minimális példányszámban kiadott könyvem hamar elfogyott, de eddig meg sem próbálkoztam egy második kiadással. Azóta megjelent néhány hasonló tárgyú magyar nyelvű könyv (például Hatvani–Krisztin–Makay, 2001; Kánnai–Szabó–Tallós, 2013; Kovács, 2021; valamint Tóth–Simon, 2020), és számos angol nyelvű könyv (például Ljungqvist–Sargent, 2000 és Hommes, 2013), de eltérő témaválasztásuk és tárgyalásmódjuk miatt remélhetőleg nem tették feleslegessé könyvemet. Például a már eltemetett szocialista beruházási ciklusok modellje mintha újra életre kelne hazánkban.

Az MTA Könyvtámogatási programja lehetővé tette, hogy megjelenjen egy második kiadás, amelynek gépiratát Szabó Judit és Rácz András gondosan javította. Lényegében megtartottam a klasszikusnak gondolt I. és II. részt. Részben új a III. rész, ahol a korábbi B. és C. függelékét most 11. és 12. fejezetként szerepeltetem (együtt élő nemzedékek és korosztályok), s három új fejezetet tettem hozzájuk: 13–15. fejezet, amelyek a szokásostól eltérő, de érdekes közgazdasági kérdésekkel foglalkoznak. Külön köszönet illeti Eső Pétert (és Tóth Jánost) az optimális járadékfüggvény tervezése (13. fejezet), Somogyi Róbertet a szegregációs dinamika (15.1. alfejezet), valamint Király Balázst az önkéntes nyugdíjmegtakarítás ágensalapú modelljének (15.2. alfejezet) társszerzőként nyújtott segítségért. (Itt mondok köszönetet Vincze Jánosnak, hogy megtanított az ágensalapú modellezésre.) Az egykori lineáris algebrai függelék mellé beillesztettem egy szélsőérték-számítási részt is, amelyet egykor Kertesi Gábor hatására írtam.

A legtöbb helyen megtartottam az eredeti szöveget, alaposabban csupán a 2.3., a 4.3., a 7.1., a 8.2. alfejezetet és a 12. fejezetet (régi C. függelék) egyszerűsítettem, az eredeti 4.5., a 8.3. és a 10.3. alfejezetet hagytam el – főleg didaktikai okokból. Ezenkívül igyekeztem az elírásokat kiküszöbölni.

Köszönetet mondok a CEU Közgazdasági Tanszékének és a BME Matematikai Intézetének, hogy 2000 és 2018 között lehetővé tették e tárgy oktatását; a Budapesti Corvinus Egyetemnek, hogy két évtizedes szünet után 2021-ben újra elindíthattam e tárgyat, valamint mindhárom egyetem hallgatóinak, akik megjegyzéseikkel a jegyzet javításához hozzájárultak. Összegezve: azoknak érdemes tanulmányozni a könyvet, akiket mélyebben érdekelnek a dinamikus közgazdaságtan elméleti kérdései, és kíváncsiak a főáramon kívüli modellekre is.

A nemrég megjelent *Közgazdasági modellek (nem csak középiskolásoknak)* c. könyvem több fejezete elemibb szinten tárgyal egyes dinamikus kérdéseket.

Budapest, 2022. augusztus

A szerző

Bevezetés

Ebben a könyvben viszonylag egyszerű dinamikus közgazdasági modelleket mutatok be, az egyes modellek tanulmányozása előtt azonban ismertetem a szükséges matematikai módszereket. Az I. és a II. részben egymást követő matematikai és közgazdasági fejezetek párokat alkotnak: minden matematikai (páratlan sorszámu) fejezet előkészíti a következő (páros sorszámu) fejezet(ek)ben szereplő közgazdasági modellek tárgyalását. Mind a matematikai, mind a közgazdasági fejezetek egymásra épülnek. Ez a felépítés megóvja az olvasót attól, hogy a közgazdasági modellek tanulmányozása közben kelljen megismerkednie új matematikai fogalmakkal és tételekkel. Ugyanakkor az olvasónak a közgazdasági részek olvasása előtt bíznia kell abban, hogy a bemutatott matematikai eszközökre szüksége lesz. A III. részben (Kiegészítések) viszont öt közgazdasági fejezet és egy matematikai függelék szerepel. A könyvben nem törekszem teljességre, inkább ízelítőt adok az általam alapvetőnek tartott dinamikus kérdésekről. Ugyanakkor igyekszem megjelölni az eredeti forrásokat. A könyv tartalmáról a tartalomjegyzék eligazít, ebben a bevezető fejezetben inkább a legfontosabb sajátosságokra próbáltam összpontosítani. A Bevezetésben csak verbális összefoglalást adok, a szabatos kidolgozást későbbre halasztom.

Kérdéskörök

A Bevezetésben először áttekintjük a legfontosabb kérdésköröket: statika vagy dinamika, diszkrét vagy folytonos idő, optimalizáljunk vagy sem, szabályozáselméleti keret, stabilitás és működőképesség, linearitás vagy nemlinearitás, determinisztikus vagy sztochasztikus modellek, várakozások, véges vagy végtelen életű fogyasztó, összevont vagy részletezett modellek, elegancia vagy relevancia, kritikai szemlélet.

Statika vagy dinamika

A hagyományos matematikai közgazdaságtan bevallottan *statikus*: különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók nem szerepelnek benne. Például az általános egyensúlyelmélet alapmodelljében (Arrow–Debreu, 1954) a kereslet, a kínálat és az árvektor egy közös időpontra vonatkozik. Vannak olyan *kvázidinamikus modellek*, amelyekben különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók szerepelnek, de vagy csak triviálisan vannak, vagy egyáltalán nincsenek összekapcsolva (például a Neumann-modell egyensúlyi volumen- és árpályája; Neumann, 1938). A valóságos gazdaság azonban *dinamikus*: különböző

időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók kapcsolatban állnak egymással (Frisch, 1933). Ebben a könyvben dinamikus kérdéseket vizsgálunk.

Diszkrét vagy folytonos idő

Mind a matematikát, mind a közgazdaságtant végigkíséri a diszkrét és folytonos időfelfogás kettőssége. (Ebben a könyvben az állapotter folytonos; diszkrét állapottérrel csak ritkán, például a Markov-láncoknál találkozunk.) A köznapi és a fizikai időfelfogás a folytonosnak kedvez, a mérő- és számítóeszközök a diszkrétnek. Az időbeli folyamatok matematikai elméletei általában folytonos idővel dolgoznak. Alapeszközük a (közönséges) *differentiálegyenlet*; amelyben az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti deriváltjaik egy egyenletrendszerben szerepelnek. Például a matematikai inga egyenletében a gyorsulás (a helyzet második deriváltja) közelítőleg a kitérés ellentettjével arányos. A numerikus analízis viszont szükségszerűen diszkrét idővel (lépésszámmal) dolgozik, *s differenciaegyenletekre* támaszkodik: itt is az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti különbségi hányadosaik vagy késleltetett értékeik szerepelnek egy egyenlet(rendszer)ben. Például éves kamatozás esetén a tőke és növekménye (a kamat) között az éves kamatláb teremt kapcsolatot. Érdekes módon a differenciaegyenletek elmélete kaleidoszkópszerűbb (kaotikusabb), mint a differentiálegyenleteké (lásd később). Kezdő számára viszont jobban hozzáférhető, hiszen a differentiálegyenletekkel ellentétben, a differenciaegyenletek megoldásának létezése és egyértelműsége magától értetődő.

Az első dinamikus közgazdasági modellekben egyaránt föllelhető a diszkrét és folytonos idejű megközelítés (például Samuelson, 1939a és 1941). Sőt, az üzleti ciklusok első modelljei a két megközelítést egyesítve, *kevert* (diszkrét és folytonos idejű) egyenleteket alkalmaztak (Frisch, 1933).

Azóta már mindkét megközelítésnek kiterjedt irodalma van. Ennek megfelelően a könyv is mindkét megközelítést tartalmazza. Célszerűtlen lenne azonban teljes mértékben kifejtetni e párhuzamot, ezért a közgazdasági tartalomtól függően hol ezt, hol azt a módszert mutatjuk be. (Ha azonban választani kellene a két módszer között, akkor a közgazdaságtanban a diszkrét módszert választanám, mert a legfontosabb közgazdasági folyamatokra jobb közelítést nyújt, mint a folytonos.)

Optimalizálás nélkül vagy optimalizálással

A dinamikus közgazdaságtani modellek sokáig nem támaszkodtak optimalizálásra. Az első korszerű dinamikus optimalizálási modellek 1960 körül jelentek meg (Tinbergen, 1960), és sokáig békésen együtt éltek optimalizálás nélküli társaikkal.

Az optimalizálás nélküli modellek 1980 óta egyre népszerűtlenebbekké váltak, mert a döntéshozók viselkedését nem „racionális döntésként” magyarázzák.

Számos „mérsékelt modern” könyv (például Blanchard–Fischer, 1989, 28. o.) kiegyensúlyozott álláspontot foglal el az optimalizálás kérdésében. „Neoklasszikus irányultságunk nem jelenti azt, hogy csak azokat a makromodelleket tekintenénk érvényesnek, amelyek maximalizáláson alapulnak. . . Azt hisszük, hogy ha egy alapelveken (optimalizáláson) alapuló modellre várnánk, mielőtt hajlandók lennénk a folyó eseményeket elemezni és gazdaságpolitikai tanácsokat adni, veszélyes utópiát követnénk, amely a való világot a sarlatánokra hagyja azok helyett, akik felismerik mindenkori tudásunk bizonytalanságait.”

Az „igazán modern” könyvek viszont egyszerűen kizárják a közgazdaságtan birodalmából az optimalizálás nélküli modelleket. Jellemző például Azariadis (1993, 4. o.) értékelése Solow növekedési modelljéről, ahol Solow a megtakarítási hányadot (a tapasztalattal összhangban) időben állandónak feltételezte: „Solow egy *ad hoc* feltevessel élt, s kevés ilyen súlyos bűn létezhet egy magára adó közgazdász számára.”

Jómagam közelebb állok a „mérsékelt modern”, mint az „igazán modern” irányzathoz, de még a mérsékelt irányzatnál is jóval kisebb jelentőséget tulajdonítok az optimalizálásának. Számomra közömbös, hogy a szereplők magatartási egyenletei az életből vannak ellesve, vagy pedig fennkölt célfüggvények és költségvetési feltételek nászának gyümölcsei. „Védelmül” három dolgot hozok fel:

a) A fent említett úttörők iránti tisztelet.

b) A legtöbb dinamikus optimalizálási modellben csupán egy döntéshozó van, márpedig jól ismert, hogy ez milyen félrevezető feltevés (Kirman, 1992). Egyéb-ként az optimalizálási feltevés mindenhatóságát bíráló érvek még mindig relevánsak (Kornai, 1971; Nelson–Winter, 1982; Anderson–Arrow–Pines, 1988). Sőt, Hildenbrand (1983) hatásosan érvel, hogy az egyénileg nem optimalizáló szereplők megfelelő eloszlása esetén a társadalmi viselkedés lehet optimális.

c) Az optimalizálás nélküli modelleket egyszerűbb elmagyarázni, mint optimalizációs társaikat.

Ennek megfelelően a könyv törzsanyaga két részre oszlik: az I. részben nincs, a II. részben van dinamikus optimalizálás. Például a szocialista gazdaság ciklusait (2.3. és 4.3. alfejezet) nehéz volna egyetlen döntéshozó optimális döntéseként leírni. Ugyanakkor egy személy vagy egy társadalom fogyasztási pályának időbeli optimalizálása (10. fejezet) értékes hozzájárulás lehet az életciklus megértéséhez.

Szabályozáselméleti keret

A könyv gyakran alkalmazza a matematikai szabályozáselmélet (más szóval irányításelmélet) kereteit. *Szabályozási rendszerről* beszélünk, ha a rendszert *állapot-* és *szabályozási* vektorral jellemezzük, s feltesszük, hogy az állapotvektor az *állapotegyenlet-rendszeren* keresztül függ a korábbi állapotvektortól és a szabályozási vektortól. Talán a leggyakoribb szabályozási mechanizmus a *visszacsatolás*, amikor a szabályozási vektor a pillanatnyi állapotvektortól függ.

Mások mellett Kornai–Martos (1981) meggyőzően érvel e megközelítés előnyei mellett. Szemléltetésül is az általuk szerkesztett könyvből választunk egy jellemző példát: egy termék készletváltozása egyenlő a termelés és az eladás (előjeles) különbségével; a legegyszerűbb készletjelzéses szabályozásnál a termelés csökkenő függvénye a készletnek (Chikán–Fábr–Nagy, 1978). A közgazdasági alkalmazások jelentős részében nagy hangsúlyt kap a szabályozás *decentralizált* jellege. Előbbi példánkat általánosítva: ha egy egész gazdaság működik készletjelzésekkel, akkor az egyes vállalat adott termékének készletváltozásában az összes többi vállalat által tőle beszerzett termékösszege jelenik meg, míg az adott termék termelése továbbra is csak saját készletétől függ (2.4. alfejezet). Ugyanakkor a szocialista gazdaság makromodelljének magatartási szabályai nem decentralizáltak (2.3. alfejezet).

A szabályozáselméleti megközelítés azonban a közgazdaságtani dinamikában nem kizárólagos. Például a stabil(is) népesség modelljében (2.5. alfejezet) csak állapotváltozók szerepelnek, ezért ott a szabályozáselmélet alkalmazhatatlan.

Állandósult állapot, stabilitás és működőképesség

Nagyon gyakori, hogy egy dinamikus rendszer pályáját nem lehet vagy nem célszerű explicit módon leírni. Kíváncsiak vagyunk viszont a pálya kvalitatív viselkedésére. Kiindulásképp a rendszer *fixpontja* szolgál, amelyből indítva a rendszert, a rendszer ott is marad. A fixpontot a természettudományokban gyakran nevezik *egyensúlyi pontnak*. A közgazdasági alkalmazásokban az egyensúly fogalmát gyakran leszűkítik az úgynevezett *walrasi* egyensúlyra (lásd 6.3. alfejezet), ahol a tökéletesen rugalmas ármechanizmus minden piacon eltünteti a túlkeresletet. Keynes (1936) óta a közgazdaságban beszélnek *munkanélküli* egyensúlyról (lásd például a 2.2. alfejezetben), és az 1970-es évek óta *nemwalrasi* egyensúlyról is. (Mind a *disequilibrium*, mind az *anti-equilibrium* kifejezés a szűkebb értelmű fel fogásból származott!) Kornai (1980) és Kornai–Martos (szerk.) (1981) a semlegesebb *normálállapot* kifejezést használják. Amióta megjelentek időben változó egyensúlyi pályák, a stacionárius egyensúlyra az *állandósult állapot* kifejezést is alkalmazzák (11. és 12. fejezet).

Felvetődik a kérdés: létezik-e egyensúly, és ha igen, akkor egyértelmű-e az egyensúly? Látni fogjuk, hogy általában három eset lehetséges: nincs egyensúly, egy egyensúly létezik, vagy több egyensúly létezik. További kérdés az egyensúly *stabilitása*: ha a rendszer nem az egyensúlyból indul, akkor az idő haladtával eljut-e oda? Finomítva a kérdést: mekkora az indulási állapotoknak az a (képletes szóval élve: vonzási) tartománya, amelyből a rendszer az egyensúlyhoz tart? Némi pontatlanul: ha kicsi a vonzási tartomány, akkor *lokális*, ha nagy (ti. az egész megengedett tartomány), akkor *globális* stabilitásról beszélünk (3. fejezet). Zavaró, hogy a közgazdaságtani stabilitást a matematikában aszimptotikus jelzővel látják el, míg a matematikai stabilitás a közgazdaságtanban Ljapunov-stabilnak nevezik.

Mind a természetben, mind a társadalomban gyakoriak a *ciklikus* folyamatok. Felsorolásszerűen: a Föld kering a Nap körül, az évszakok váltakoznak, az emberi szív percenként több tucatszor dobog, a gazdaság növekedési üteme több-kevesebb szabályossággal hullámszerű mozgást végez.

Determinisztikus rendszereken belül maradva, a stabil állandósult állapot és a ciklus mellett azonban még bonyolultabb viselkedési formák is lehetségesek, amelyeket némi leegyszerűsítéssel *kaotikusnak* nevezhetünk. Ilyenkor a pálya érzékenyen függ a kezdőértékektől, ezért a pálya már elvileg is előrejelezhetetlen. Legismertebb példa a káoszra az időjárás, de elképzelhető, hogy az árfolyam-ingadozások is kaotikusak.

A fenti esetekben fölvetődik a kérdés: *működőképes-e* a rendszer? Például a Naprendszer körülbelül 10 milliárd évig működhet, egy ember körülbelül 100 évig élhet, egy társadalmi rendszer pedig évtizedektől évezredekig fennállhat. Ha azonban egy speciális gazdasági modellt vizsgálunk, akkor működőképességen azt értjük, hogy a mozgásegyenleteken kívül a rendszer kielégít bizonyos alapvető feltételeket. A közgazdaságtanban a leggyakoribb működési feltételek a nemnegativitási feltételek: például a termelés nem lehet negatív. Konkrétan: a készletjelzéses modellben nem fogyhat ki a készlet, vagy nem telnek meg a raktárak stb.

Jelenleg keveset tudunk a gazdasági modellek működőképességéről, és gyakran be kell érünk a stabilitás keresésével.

Lineáris és nemlineáris modellek

Számos matematikai természetű vizsgálatnál alapkérdés a linearitás. Némi leegyszerűsítéssel, lineáris egy modell, ha a bemenő változók megduplázása megkettőzi a kimenő változók értékét is. Például a készletváltozási egyenlet lineáris: kétszeres termelés és vétel kétszeres készletváltozást okoz. Első látásra a következő

készletjelzéses termelés szabályozás is lineáris: minden nap legfeljebb 100 egységet termelünk, de ezt a maximumot csökkentjük az előző nap végén megmaradt termékegység kétszeresével. De mi történik, ha az előző nap végén 51 egység maradt? –2 egységet termelünk? S ekkor belép egy természetes alsó korlát: a nulla, s elvész a linearitás. Az adott példát továbbgondolva: lehetséges, hogy ahogy fogy a készlet, úgy erősödik a visszacsatolás.

A véges dimenziós lineáris dinamikus rendszerek elmélete teljesen kidolgozottnak tekinthető (1. fejezet). Zárt alakban fölírhatjuk a rendszer megoldását, amelynek segítségével számos kvantitatív és kvalitatív eredményt nyerhetünk. Ekkor az egyensúly körüli *lokális* viselkedés meghatározza a *globális* viselkedést is. Speciálisan: ciklikus viselkedés csak kivételes paraméterértékeknél valósul meg (s az is késélen táncol), az instabil viselkedés egyre nagyobb kilengéseken keresztül előbb-utóbb működésképtelenséghez vezet.

Más a helyzet a nemlineáris dinamikus rendszereknél (3. fejezet). Már az egyváltozós esetről is minden elképzelhető kimenet lehetséges. Például a lokális stabilitás összefér a globális stabilitás hiányával, stabil ciklikus viselkedés (az úgynevezett határciklus) a paraméterértékek széles tartományában is megvalósulhat, az instabil viselkedés összefér hosszú távú működésképességgel. A szabályos *ciklikus* pályák mellett megjelenhetnek szabálytalan, *kaotikus* pályák is. *Analitikusan* viszonylag keveset tudunk, már a kétdimenziós esetben is szükségünk van számítógépes *szimulációra*.

Mind a matematikusok, mind a közgazdászok sokáig megelégedtek a lineáris vagy linearizálható dinamikus rendszerek vizsgálatával. Csak 1970 óta kapott nagyobb lendületet a nemlineáris és instabil rendszerek globális elemzése. Természetesen ezeknél a bonyolult viselkedésű rendszereknél is a lineáris rendszer a kiindulópont. A könyv egyaránt foglalkozik lineáris és nemlineáris rendszerekkel.

Determinisztikus vagy sztochasztikus rendszerek

A mai kor tudományának nyilvánvaló, hogy a determinisztikus és a sztochasztikus szemléletre egyaránt szükség van a folyamatok modellezésénél. Elegendő, ha a klasszikus newtoni mechanika mellett utalunk a heisenbergi–schrödingeri kvantummechanikára.

A dinamikus közgazdaságtanban a sztochasztikus módszerek elterjedése leginkább az ökonometria térhódításához kapcsolódik. A statisztikai módszertannak megfelelően az egyenletek becslésénél célszerű föltenni, hogy sztochasztikus hibataggal terheltek. Nem lehet meglepetés, hogy az ökonometriai egyenleteken alapuló szabályozási modellekben nagy szerepet játszik a sztochasztikus optimalizálás. Ezzel a kérdéskörrel a 7. fejezetben foglalkozunk.

Érdekes, hogy a modern dinamikus közgazdaságtan domináns ága szerint a gazdaság determinisztikus része lineáris és stabil, a gazdaságot csak a sztochasztikus zavarok terelik el az egyensúlyi pályáról (például a 2.6. alfejezet). Én nem osztom ezt a nézetet. Egy jóval kisebb, de korántsem jelentéktelen kutatási irányzat híveként inkább a determinisztikus rendszerek nemlinearitásaiban keresem a ciklus és a káosz forrását. Ezért a sztochasztikus jelenségek nemcsak a szokásosnál, de a megérdemelnél kisebb hangsúlyt kapnak a könyvben, a nemlineáris determinisztikus modellek viszont nagyobbat (a 3–10. fejezet és a 11–14. fejezet).

Csak röviden utalok a sztochasztikus módszerek egyszerűbb alkalmazásaira: az emberi élettartam kockázatából fakadó *életbiztosításra* (10.1. alfejezet) vagy az *ágensalapú modellekre* (15. fejezet).

Várákozások

A közgazdasági modellek egyik megkülönböztető vonása, hogy egyes változók függhetnek saját maguk vagy más változók jövőre vonatkozó értékétől, a *várákozásoktól*. Például a könyvkereskedő e heti beszerzése függ a jövő hétre várt eladásoktól, vagy az idei megtakarításom függ a jövő évre várt kamatlábtól.

Az 1950–60-as évek modelljeiben a naív (vagy általánosabban: adaptív) várákozások szerepeltek, ahol a várákozás a korábbi tényleges állapottól (és a korábbi várákozástól) függött. Például a kereskedő fölteszi, hogy a jövő héten is ugyanannyi könyvet akarnak vásárolni, mint ezen a héten. Másik példa: a jelzálogot nyújtó bankok minden évben úgy határozzák meg a törlesztést, hogy fölteszik, a kamatláb a hátralévő időre változatlan.

Ez a feltevés sok kritikát kapott (Lucas, 1976, 1987), s egyre inkább a *racióális várákozások* feltevése lép a helyére (2.6. alfejezet). Ekkor adott információshalmaz esetén a döntéshozó várákozása megegyezik a modellből levezethető várható értékkel. Speciálisan, determinisztikus esetben a *racióális várákozás* megegyezik magával a tényleges értékkel: *tökéletes előrelátás*.

Mi mindkét feltevést megvizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy esetenként tényleg jobb a racionális, mint a naív várákozás. Más esetekben azonban fordított a helyzet (11. fejezet). Sőt az is előfordul, hogy az állandósult állapotokon kívül szinte értelmezhetetlen a racionális várákozás (12.2. alfejezet).

Szeretnék hozzájárulni ahhoz, hogy újra teret nyerjen az *adaptív várákozások* hipotézise, amely mind empirikusan (Lovell, 1986; Chow, 1989), mind elméletileg (Grandmont–Laroque, 1990; Brock–Hommes, 1997; Grandmont, 1998) vonzó lehet a racionális várákozásokkal szemben.