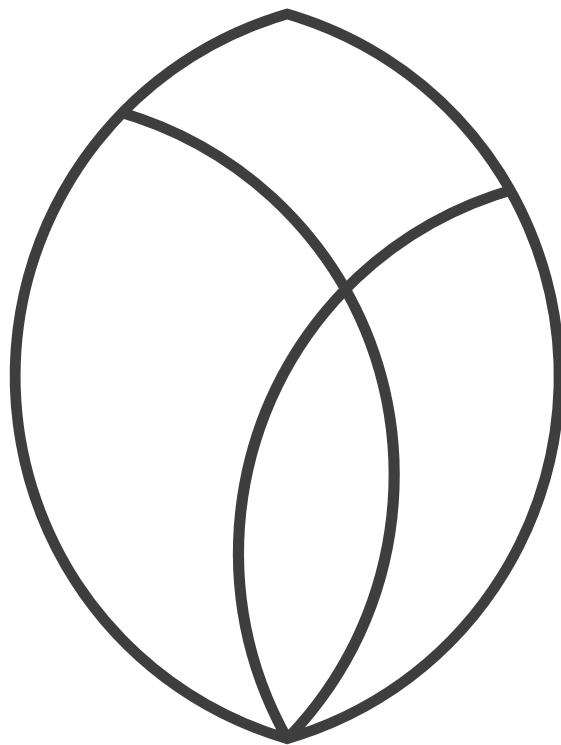


W E T T L F E R E N C

Lineáris algebra



W E T T L F E R E N C

Lineáris algebra

Lineáris egyenletrendszerek • Optimális megoldás • Mátrixok • Lineáris leképezések

Sajátérték, szinguláris érték • Diagonalizáció • Merőlegesség • Pszeudo inverz

Norma • Mátrixfelbontások • Mátrixfüggvények • Nemnegatív mátrixok



TYPOTEX

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



A kötet megjelenését a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Kara, valamint Algebra Tanszéke támogatta.



© Wettl Ferenc, Typotex, Budapest, 2023
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 255 0

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Erő Zsuzsa
Tördelés: Wettl Ferenc
Borítóterv: Somogyi Péter
Nyomta és kötötte: OOK-PRESS Nyomda, Veszprém
Felelős vezető: Szathmáry Attila

Tartalomjegyzék

Bevezetés 12

A könyvben követett elvek 14 • Jelölések 17

1 Vektorok 19

Vektorok a 2 és 3 dimenziós térben 19

Irányított szakasz és vektor 19 • Vektor megadása és az origó 20 • Vektor jellemzői 20
• Vektorok összeadása és skalárral szorzása 21 • Lineáris kombináció 23

Távolság, szög, orientáció 27

Skaláris szorzás 27 • Hosszúság és szög 28 • Három alaptétel vektorok hosszáról 28
• Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés 29 • Orientáció 30 • Vektori szorzás 30
• Paralelepipedon térfogata és előjeles térfogata 33 • Vegyes szorzat 33

Vektorok koordinátás alakban 36

Descartes-féle koordináta-rendszer 36 • Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal 37
• A derékszögű koordináta-rendszer 38 • Az $\mathbb{R}^n$ halmaz 41 • $\mathbb{R}^n$ mint vektortér 41 • Lineáris függetlenség 42 • $\mathbb{R}^n$ mint euklideszi tér 45 • Távolság és szög $\mathbb{R}^n$ -ben 46 • Korrelációs együttható 48 • Abszolút értékre vonatkozó tételek 50

2 Lineáris egyenletrendszerek 53

Megoldás kiküszöböléssel 53

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer 53 • Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek 55
• Mátrixok 56 • Elemi sorműveletek 57 • Lépcsős alak 58 • Gauss-módszer 58 • Redukált lépcsős alak 62 • Gauss–Jordan-módszer 63 • A redukált lépcsős alak egyértelműsége – az rref függvény 64 • Szimultán egyenletrendszerek 66 • A kiküszöbölés műveletigénye 67
• Numerikusan instabil egyenletrendszerek 67 • Részleges főelem-kiválasztás 68 • Skálázás 70

Az egyenletek geometriája 74

Implicit és explicit egyenletrendszerek 74 • Az egyenes explicit egyenlet(rendszer)ei 75 • Síkbeli egyenes implicit egyenlet(rendszer)ei 76 • Térbeli sík egyenletei 78 • Térbeli egyenes egyenletrendszerei 80 • Pont és hipersík 81 • Sormodell: hipersíkok metszete 83
• Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként 85

Megoldhatóság és a megoldások tere 89

Kötött változók száma, mátrix rangja 89 • Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele 90
• Vektortér és altér 92 • Alterek tulajdonságai és szemléltetésük levéldiagrammal 93
• Kifeszített altér 94 • Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai 95 • Vektorok lineáris függetlensége 97

Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek 99

Sor- és oszloptér változása elemi sorműveletek közben 99 • Bázis és a bázisra vonatkozó koordináták 100 • Dimenzió és rang 102 • Kiegészítés bázissá 104 • Alterek metszetének

bázisa* 105 • Altér merőlegese 106 • Mátrix kitüntetett alterei és a lineáris algebra alaptétele 108
 • A sortérbe eső megoldás 110 • Elemi bázistranszformáció* 112

3 *Mátrixműveletek* 117

A mátrixműveletek definíciói 117

Táblázatok összeadása és skalárral szorzása 117 • Mátrixok 118 • Elemenkénti mátrixműveletek 118 • Táblázatok szorzata 119 • Lineáris helyettesítések kompozíciója 120
 • Mátrixszorzás 121 • Műveletek blokkmátrixokkal 122 • Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja 123 • Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja 124 • Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja 125 • Szorzás vektorral 125 • A báziscsere mátrixszorzatos alakja 126 • Egységmátrix 127 • Elemi mátrixok 128 • Vektorokra partícionált mátrixok 129
 • Kronecker-szorzat és a vec-függvény* 131 • Lineáris mátrixegyenletek 132

Mátrixműveletek algebrája 137

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai 137 • A szorzás tulajdonságai 137
 • Mátrix hatványozása 139 • A transzponálás tulajdonságai 141 • Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása* 142 • Mátrix inverze 142 • Elemi mátrixok inverze 144 • Az inverz kiszámítása 144 • Az inverz tulajdonságai 146 • Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága 147 • Invertálhatóság és bázis 149 • Báziscsere 149 • Diagonális mátrixok 150
 • Permutáló mátrixok és kigyók 151 • Háromszögmátrixok 152 • Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok 153 • Gyorsszorzás* 154 • Gráfok mátrixai 155

Mátrixfelbontások 159

Bázisfelbontás 159 • Az LU-felbontás 160 • Egyenletrendszer megoldása és mátrix invertálása LU-felbontással 163 • Az LU-felbontás a gyakorlatban 164 • PLU-felbontás* 165

4 *Determináns* 171

A determináns mint sorvektorainak függvénye 171

Paralelogramma előjeles területe 171 • Paralelepipedon előjeles térfogata 172 • A determináns definíciója 173 • Mikor 0 a determináns értéke 174 • A determináns értékének kiszámítása 175
 • Elemi mátrixok determinánsa 177 • Permutáló mátrix determinánsa 177 • Mátrixműveletek és determináns 178 • Determinánssok soronkénti additivitása 180

A determináns mint elemeinek függvénye 184

Kigyók determinánsa 184 • Előjeles aldetermináns 188 • Determináns kifejtése 190
 • Cramer-szabály és a mátrix inverze 191 • Rang és aldeterminánssok (minorok) 194
 • Vandermonde-determináns 195 • Wronski-determináns 197 • Blokkmátrixok determinánsa* 198

5 *Lineáris leképezések* 203

Lineáris leképezés és mátrixleképezés 203

A lineáris és a mátrixleképezés fogalma 203 • Mátrixleképezések szemléltetései 207 • Lineáris leképezés mátrixa standard bázisban 208 • Képtér és magtér 211 • Vetítések jellemzése* 212
 • Lineáris funkcionálok 213 • Műveletek lineáris leképezésekkel 214 • Izomorfizmus 216
 • Véges dimenziós terek jellemzése 217

Lineáris leképezések mátrixai 219

Lineáris leképezés megadása 219 • Lineáris transzformáció mátrixa adott bázisban 221
 • Mátrixok hasonlósága 224 • Hasonlóságra invariáns tulajdonságok 225 • Lineáris leképezés mátrixa adott bázispárban 226 • Lineáris leképezés és transzformáció jellemző adatai 228

A vektortér absztrakt fogalma 231

A vektortér fogalmának absztrakciója 231 • A vektortér alaptulajdonságai 233
 • Függvényterek 235 • Duális tér 236 • Áttérés egyik bázisról a másikra 237 • Példák duális terekre 238 • Alterek összege és direkt összege 239 • Multilineáris leképezések 241
 • Tenzorok 243 • Általánosított függvények, disztribúciók 245

6 Sajátérték, diagonalizálás 249

Sajátérték, sajátaltér 249

A sajátérték és a sajátvektor fogalma 249 • Sajátértékek meghatározása a karakterisztikus polinomból 251 • 2×2 -es mátrixok sajátértékei 252 • Háromszög- és blokkháromszögmátrixok sajátértékei 252 • Tankönyvi módszer 254 • Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltéré 256 • Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása 257 • Komplex sajátértékek 258 • A 2×2 -es mátrixok sajátaltéréinek szemléltetése 258 • Determináns, nyom és a sajátértékek kapcsolata 260 • Hasonlóságra nézve invariáns tulajdonságok 261

Mátrixok spektruma 266

Mátrixok hatványai 266 • Cayley–Hamilton-tétel 267 • Transzponálttal való kapcsolat 269 • Nilpotens mátrixok 270 • Mátrix előírt spektrummal vagy karakterisztikus polinommal 270 • Mátrixszorzat karakterisztikus polinomja 272 • Gersgorin-körök 273 • Hatványmódszer 274

Diagonalizáció 276

Diagonalizálhatóság 276 • Diagonalizálható mátrix polinomja 278 • A sajátfelbontás diadikus alakja 279 • Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása és a spektrálvetítők* 281 • A diagonalizálhatóság feltételei 284

Jordan-féle normálalak 288

Invariáns alterek 288 • Általánosított sajátvektor, Jordan-lánc 290 • Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója 291 • Jordan-mátrix 293 • Jordan-féle normálalak és egyértelműsége 294 • A Jordan-féle normálalak meghatározása a nullításokból 297 • A Jordan-féle normálalak meghatározása a rangokból 298 • Valós Jordan-alak 300 • Minimálpolinom 302 • Minimálpolinom a Jordan-normálalakból 304 • A Jordan-normálalak alkalmazásai 305

Mátrixfüggvények 309

Diagonalizálható mátrixok függvénye 309 • Spektrumon definiált függvény 311 • Mátrixfüggvény a Jordan-normálalakból 312 • Mátrixfüggvények kiszámítása 313 • Valós Jordan-mátrix függvényei 314 • Hermite-polinom 316 • Mátrixfüggvény polinominterpolációval 317 • Mátrixhatványok konvergenciája 319

7 Merőlegesség 323

Euklideszi tér 323

Skalárszorzat kiszámítása 323 • Távolság és szög valós euklideszi térben 326 • Merőleges vektorok absztrakt vektorterekben* 329 • Skaláris szorzat és norma kapcsolata 329 • Komplex skaláris szorzás 330 • Komplex euklideszi tér 332 • Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben 333 • Valós és komplex euklideszi terek alaptételei* 334

Merőleges vetítés 339

A merőleges vetítés fogalma 339 • A merőleges vetítés mátrixa 340 • Merőleges vetítések mátrixainak jellemzése* 342 • Merőleges vetítés euklideszi térben 343 • A merőleges vetület kiszámítása 344 • A merőleges vetület ortonormált bázissal 346 • Euklideszi terek izomorfizmusa* 347 • Euklideszi tér duálisa* 347

Legjobb közelítés 350

A legjobb közelítés fogalma 350 • Lineáris egyenletrendszer optimális megoldása 350 • Az optimális megoldások szemléltetése 353 • Regresszió* 354 • Pszeudoinverz* 357 • A pszeudoinverz mátrixának kiszámítása 359 • A pszeudoinverz algebrai jellemzése 361

Ortogonalis leképezések, ortogonalizáció 364

Ortogonalis és szemiortogonalis mátrixok 364 • 2D és 3D ortogonalis transzformációi 367
 • Primitív ortogonalis transzformációk* 368 • Gram–Schmidt-ortogonalizáció 370
 • Ortogonalis polinomok* 372 • QR-felbontás 373 • QR-felbontás primitív ortogonalis transzformációkkal* 375 • Optimális megoldás QR-felbontással 377 • Ortogonalitás komplex terekben* 378 • Diszkrét Fourier-transzformáció 379 • Diszkrét Fourier-transzformáció 380
 • Gyors Fourier-transzformáció 381

8 *Diagonalizáció ortonormált bázisban* 387

Ortogonalis és unitér diagonalizálhatóság 387

Triangularizáció 387 • Ortogonalis diagonalizáció 391 • Unitér triangularizáció 393 • Normális mátrixok 393 • Unitér diagonalizálhatóság 395

Kvadratikus alakok 398

Kvadratikus alak 398 • Áttérés más bázisra 400 • Főtengelytétel kvadratikus alakokra 401
 • Főtengely-transzformáció 401 • Diagonalizálás szimultán sor-oszlopműveletekkel 403
 • Tehetetlenség, Sylvester-tétel 405 • Kvadratikus alak és kúpszelet ábrázolása* 406
 • Kvadratikus alakok jellege 410 • Pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi* 412
 • Főminorok 415

Szinguláris érték szerinti felbontás 420

A szinguláris érték és vektor fogalma 420 • Szinguláris értékek és vektorok meghatározása 422
 • A szinguláris értékek tulajdonságai 424 • Szinguláris érték szerinti felbontás 425 • Az SVD kiszámolása 428 • Szinguláris felbontás geometriai interpretációja 429 • Pszeudoinverz 430
 • Polárfelbontás* 431

9 *Hosszúság és sebesség* 435

Norma 435

Vektor euklideszi normája 435 • A p -norma 436 • A norma általános fogalma 437
 • Vektornormák ekvivalenciája 438 • Vektornormák mátrixokon 439 • A mátrixnorma általános fogalma 440 • Kis rangú approximáció 443 • Kondíciós szám 444

Differenciálhatóság, derivált 447

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága 447 • Mátrix-skalár- és skalár-mátrix-függvények deriválása 450 • Függvények kompozíciójának deriváltja 451 • Mátrixkifejezések differenciálása 453 • Jacobi-determináns és az integrál transzformációja 456

Differencia- és differenciálegyenletek 459

Differenciaegyenletek és differenciaegyenlet-rendszerek 459 • Differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek 464 • Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer 465 • Inhomogén differenciálegyenlet-rendszer 467 • Differenciálegyenletek 468

10 *Nemnegatív mátrixok* 473

A Perron–Frobenius-elmélet 473

Mátrixok összehasonlítása 473 • A pozitivitás fokozatainak gráfelméleti megfogalmazása 474
 • A mátrix periódusa 477 • A primitív mátrixok jellemzése 479 • Nemnegatív mátrix spektrálsugara 480 • Pozitív mátrixok 482 • Primitív és imprimitív mátrixok 483
 • Határérték-tulajdonságok 484 • Reducibilis mátrixok 486

Sztocasztikus mátrixok 489

Sztochasztikus vektorok és mátrixok 489 • Duplán sztochasztikus mátrixok 490 • A Leontief-modell 491 • Markov-lánc és lineáris algebrai modellje 493 • Az állapotok osztályozása 494 • Stacionárius eloszlás 495 • Néhány egyszerű példa 496

11 *Algebrai alapismeretek* 501

Számolás véges halmazon 501

Egy 2 elemű struktúra 501 • Számolás az egészek maradékaival 501 • Számolás $\mathbb{F}_p[x]$ maradékaival 503 • Alkalmazások 504

Komplex számok 505

A számfogalom bővülése 505 • A komplex szám algebrai alakja 506 • Számolás algebrai alakban megadott komplex számokkal 507 • A komplex szám trigonometriai és exponenciális alakja 509 • Trigonometriai és exponenciális alakú számok műveleti tulajdonságai 511 • Hatványozás, gyökvonás trigonometriai alakkal 512 • Egységgyökök 513

Testek, gyűrűk 514

Test 514 • Gyűrű 515 • Egy- és kétműveletes algebrai struktúrák* 516

Polinomok 517

A polinom fogalma 517 • A polinomok algebrai struktúrája 518 • Polinomfüggvény, zérushely, gyök 518 • Az algebra alaptétele 519 • Horner-módszer 520 • Racionális gyökök keresése 521 • Polinomosztás 523 • Gyökök és együttthatók 524

Tárgymutató 529

Tételek, állítások, következmények

1.4.	A vektorműveletek tulajdonságai	22	2.66.	A kifeszített altér altér	94
1.6.	Ekvivalenciareláció	26	2.70.	Homogén és inhomogén egyenletrendszer	95
1.9.	Mikor 0 a skaláris szorzat?	27	2.71.	A megoldhatóság feltétele	96
1.10.	A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai	27	2.73.	Lineáris függetlenség eldöntése	97
1.11.	Pitagorasz-tétel	28	2.75.	Elemi sorműveletek hatása	99
1.12.	Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	28	2.76.	Mátrix lépcsős alakjának vektorai	99
1.13.	Háromszög-egyenlőtlenség	29	2.78.	Bázis ekvivalens definíciói	100
1.14.	Egységvektorral való szorzás jelentése	29	2.81.	Bázistétel	102
1.15.	Vektor felbontása merőleges összetevőkre	29	2.84.	Dimenzió = rang	103
1.18.	Mikor 0 a vektori szorzat?	31	2.87.	Dimenziótétel (rang-nullitási tétel)	104
1.20.	Vektori szorzat abszolút értéke	32	2.91.	Kiegészítés alterek összegének bázisává	105
1.21.	Vektori szorzás műveleti tulajdonságai	32	2.92.	Metszet és összeg dimenziója	106
1.22.	Paralelepipedon térfogata	33	2.96.	Altér merőlegesének tulajdonságai	107
1.25.	Vektorműveletek koordinátás alakja	37	2.98.	A lineáris algebra alaptétele	108
1.27.	Skaláris szorzat ortonormált bázisban	39	2.99.	A négy kitüntetett altér	108
1.28.	Vektori szorzat ortonormált bázisban	39	2.101.	Lineáris egyenletrendszer megoldásai	110
1.29.	Paralelogramma területe	39	2.103.	Elemi bázistranszformáció	113
1.30.	Paralelepipedon térfogata	40	3.7.	Műveletek blokkmátrixokkal	122
1.36.	Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai	42	3.10.	Egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja	124
1.39.	Síkbeli és térbeli vektor felbontása	43	3.12.	Mátrixszorzás és lineáris kombináció	125
1.40.	Térbeli vektor felbontása	43	3.15.	Koordináták változása a bázis cseréjénél	126
1.42.	Bázis	44	3.20.	Elemi sorműveletek mátrixszorzással	128
1.43.	$\mathbb{R}^n$ standard bázisa	44	3.21.	A szorzat oszlopai és sorai	130
1.44.	Lineáris függetlenség	44	3.22.	Szorzat rangja	130
1.46.	A skaláris szorzás alaptulajdonságai	45	3.25.	A Kronecker-szorzat tulajdonságai	131
1.50.	Párhuzamos és merőleges összetevő	47	3.26.	Kronecker-szorzat és vec-függvény	131
1.51.	Ortogonalis vektorok lineáris függetlensége	47	3.28.	A lineáris mátrixegyenlet megoldása	132
1.54.	Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	50	3.30.	Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál?	137
1.55.	Polarizációs formulák $\mathbb{R}^n$ -ben	50	3.31.	Mátrixszorzás algebrai tulajdonságai	138
2.5.	Ekvivalens átalakítások	55	3.32.	Hatványozás azonosságai	139
2.16.	Lépcsős alakra hozás	61	3.36.	Transzponálás tulajdonságai	141
2.21.	A redukált lépcsős alak egyértelmű	64	3.40.	Sorművelet inverzének mátrixa	144
2.25.	A kiküszöbölés műveletigénye	67	3.41.	Az inverz létezéséhez elég egy feltétel	144
2.33.	Egyenes explicit vektoregyenlete	75	3.42.	Inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel	145
2.34.	Egyenes explicit egyenletrendszer	76	3.44.	2×2 -es mátrix inverze	146
2.36.	Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete	76	3.45.	Az inverz alaptulajdonságai	146
2.37.	Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete	77	3.46.	Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek	147
2.39.	Sík explicit vektoregyenlete	78	3.49.	Invertálhatóság és bázis	149
2.40.	Sík explicit egyenletrendszer	78	3.50.	Szinguláris mátrixok	149
2.41.	Sík implicit egyenlete	79	3.51.	Az áttérés mátrixának inverze	149
2.42.	Sík implicit vektoregyenlete	79	3.53.	Műveletek diagonális mátrixokkal	150
2.53.	Főelemek oszlopai	89	3.55.	Műveletek permutáló mátrixokkal	152
2.55.	Kötött és szabad változók száma	89	3.57.	Műveletek háromszögmátrixokkal	152
2.56.	A megoldhatóság mátrixrangos feltétele	90	3.59.	Műveletek szimmetrikus mátrixokkal	153
2.57.	Homogén egyenletrendszer megoldhatósága	91	3.60.	Szimmetrikus plusz ferdén szimmetrikus	153
2.59.	Megoldások lineáris kombinációja	92	3.61.	$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ és $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ szimmetrikus	153
2.62.	Megoldások altere	92	3.62.	Strassen- és Winograd-formulák	154
			3.66.	Szomszédsági mátrix hatványai	156
			3.67.	Bázisfelbontás	159
			3.73.	LU-felbontás létezése és egyértelműsége	162
			4.2.	Ránézésre 0 determinánsok	174
			4.3.	Zérus értékű determináns	174
			4.5.	Egyenletrendszer és determináns	175
			4.6.	Háromszögmátrix determinánsa	175
			4.8.	Elemi mátrixok determinánsa	177
			4.9.	Permutáló mátrix determinánsa	177

4.10.	Determinánsok szorzásszabálya	178	6.2.	A sajátvektorok alterei	250
4.11.	Felcserélt szorzat és inverz determinánsa	178	6.5.	Sajátérték mint gyök	251
4.13.	Transzponált determinánsa	179	6.9.	Háromszögmátrixok sajátértékei	253
4.14.	Soronkénti additivitás	180	6.17.	Algebrai és geometriai multiplicitás	257
4.15.	Kígyók determinánsainak összegére bontás	185	6.20.	Determináns és nyom sajátértékekkel	260
4.16.	Determinánsfüggvény létezése	186	6.23.	Sajátértékhez kapcsolódó invariánsok	261
4.22.	Determináns rendjének csökkentése	189	6.25.	Karakterisztikus polinom és a főminorok	263
4.23.	Determinánsok kifejtési tétele	190	6.27.	Invertálhatóság és a 0 sajátérték	266
4.25.	Cramer-szabály	191	6.28.	Mátrix hatványainak sajátértékei	266
4.27.	Mátrix inverzének elemei	192	6.29.	Mátrix hatványainak hatása	266
4.29.	Rang és nemzérus minorok	194	6.31.	Cayley–Hamilton-tétel	268
4.31.	Vandermonde-determináns értéke	195	6.32.	Transzponált karakterisztikus polinomja	269
4.33.	Interpolációs polinom létezése és egyértelműsége	196	6.33.	Speciális valós mátrixok sajátértékei	269
4.35.	Függetlenség és a Wronski-determináns	197	6.34.	Nilpotens mátrixok	270
4.37.	Determinánsok szorzata blokkmátrixban	198	6.37.	Kísérő mátrix karakterisztikus polinomja	271
4.38.	2×2 -es blokkmátrix determinánsa	199	6.38.	AB és BA karakterisztikus polinomja	272
4.40.	Mátrix plusz diád determinánsa	199	6.42.	Gersgorin-körök tulajdonságai	273
5.5.	Lineáris leképezés ekvivalens definíciói	205	6.46.	Diagonalizálhatóság feltétele	277
5.6.	Altér képe altér	206	6.48.	Mátrix hatványa és polinomja sajátfelbontásból	278
5.7.	Lineáris $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezések = mátrixleképezések	208	6.52.	Mátrixpolinom a diadikus felbontásból	280
5.8.	Síkbeli forgatás mátrixa	209	6.54.	Spektrálfelbontás, spektrálvetítő	281
5.9.	Síkbeli tükrözés mátrixa	209	6.55.	Mátrixpolinom spektrálfelbontásból	282
5.11.	A 3 dimenziós tér eltolásai	210	6.57.	Sajátalterek független vektorhalmazai	284
5.13.	A képtér és a magtér altér	211	6.58.	Diagonalizálhatóság ekvivalens feltételei	284
5.15.	Vetítések jellemzése	212	6.59.	n különböző sajátérték	285
5.18.	A nyom lineáris funkcionál	213	6.60.	Diagonalizálhatóság és a multiplicitások	285
5.19.	Szorzat nyoma	213	6.63.	Blokkdiagonális mátrixok és invariáns alterek	289
5.20.	Összeg, skalárral szorzás, kompozíció	214	6.71.	Jordan-tétel	294
5.21.	Lineáris leképezés inverze	214	6.74.	Jordan-tétel lineáris transzformációkra	294
5.22.	Mátrixleképezés inverzének mátrixa	215	6.75.	$\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$ hatványainak rangja	296
5.25.	Injektív lineáris leképezések	216	6.76.	A Jordan-normálalak egyértelműsége	297
5.27.	Izomorfizmusok kompozíciója és inverze	216	6.80.	Valós Jordan-alak	300
5.28.	Véges dimenziós terek jellemzése	217	6.84.	A minimálpolinom invariáns a hasonlóságra	302
5.29.	Lineáris leképezés hatása egy bázison	219	6.85.	A minimálpolinom tulajdonságai	302
5.31.	Lineáris transzformáció mátrixa	221	6.86.	Nilpotens mátrix minimálpolinomja	303
5.32.	Különböző bázisokban felírt mátrixok	222	6.88.	Tetszőleges polinom lehet minimálpolinom	303
5.36.	Hasonló mátrixok hatása	224	6.89.	Minimálpolinom és Jordan-normálalak	304
5.37.	Hasonlóságra invariáns tulajdonságok	225	6.90.	Sylvester-egyenlet egyértelmű megoldhatósága	305
5.40.	Lineáris leképezés mátrixa	226	6.97.	Valós hatvány és exponenciális függvény	314
5.42.	Lineáris leképezés mátrixai bázispárokban	227	6.99.	Az Hermite-polinom létezése és egyértelműsége	316
5.44.	Dimenziótétel (rang-nullitási tétel)	228	6.100.	Mátrixfüggvény az Hermite-polinomból	317
5.49.	Vektortér alaptulajdonságai	233	6.103.	Spektrumon azonos értéket adó polinomok	318
5.53.	Független halmaz bővíthetősége	234	6.105.	$\mathbf{O}$ -hoz konvergáló mátrixhatványok	319
5.54.	Függvényterek	235	6.107.	Neumann-sor konvergenciája	319
5.55.	Lineáris leképezések tere	235	6.109.	Konvergens mátrixhatványok	320
5.57.	Duális bázis	236	7.9.	Ortogonalis és ortonormált rendszerek	327
5.58.	Áttérés mátrixa a duális térben	237	7.12.	Polarizációs formulák	329
5.59.	Duális tér duálisa	237	7.15.	Adjungált alaptulajdonságai	331
5.60.	Alterek összege	239	7.18.	Komplex skaláris szorzás alaptulajdonságai	331
5.62.	Két altér direkt összegének ekvivalens definíciói	239	7.24.	A lineáris algebra alaptétele (komplex)	333
5.64.	Direkt összeg ekvivalens definíciói	240	7.25.	Merőleges vetület és merőleges összetevő	334
5.65.	Mikor direkt összeg az összeg	241	7.26.	Pitagorasz-tétel	334
5.67.	Multilineáris leképezések tere	242			
5.70.	$(1,1)$ -tenzor és lineáris leképezés	244			

7.27.	Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség	335	8.59.	Azonos szinguláris és sajátértékek	427
7.28.	Háromszög-egyenlőtlenség	335	8.62.	Egységgömb képe	429
7.32.	Altérre való merőleges vetítés mátrixa	340	8.63.	Pszeudoinvert SVD-ből	430
7.34.	Merőleges vetítés mátrixa	342	8.66.	Polárfelbontás	431
7.36.	Merőleges vetület létezése és egyértelműsége	343	9.4.	Minden vektornorma ekvivalens	438
7.38.	Merőleges vetület kiszámítása	344	9.6.	Frobenius-norma ekvivalens alakjai	439
7.41.	Merőleges vetület ortonormált bázis esetén	346	9.7.	Frobenius-norma és 2-norma kapcsolata	439
7.43.	$\mathcal{V}$ izomorf $\mathbb{K}^n$ -nel	347	9.11.	Indukált norma tulajdonságai	441
7.44.	Riesz reprezentációs tétele	347	9.12.	1-, 2- és ∞ -norma kiszámítása	441
7.46.	Legjobb közelítés tétele	350	9.13.	Kis rangú approximáció (Eckart–Young)	443
7.48.	A és $A^H A$ kapcsolata	351	9.16.	Jacobi-mátrix	448
7.50.	Optimális megoldás a normálegyenletről	351	9.19.	Lineáris leképezés deriváltja	449
7.51.	Optimális megoldások száma	352	9.21.	Láncszabály	451
7.53.	Lineáris regresszió	354	9.23.	Inverzfüggvény-tétel	452
7.58.	A pszeudoinvert linearitása	357	9.24.	Ax és $y^T Ax$ alakú kifejezések deriváltja	453
7.60.	Pszeudoinvert hatása a kitüntetett altérre	358	9.25.	Néhány további derivált	454
7.61.	Speciális mátrixok pszeudoinvertje	359	9.31.	Differenciaegyenlet-rendszer megoldása	461
7.62.	A pszeudoinvert mátrixa	359	9.33.	Differenciaegyenlet megoldása	462
7.65.	Moore–Penrose-tétel	361	9.39.	Homogén differenciálegyenlet-rendszer	465
7.68.	Ortogonalitás ekvivalens algebrai feltételei	365	9.44.	Homogén differenciálegyenlet megoldása	468
7.70.	Szemiorrtogonalitás algebrai tulajdonságai	365	10.2.	Reducibilis és irreducibilis mátrixok	475
7.71.	Ortogonalis mátrixleképezések	366	10.4.	Irreducibilisból pozitív	476
7.73.	Ortogonalis mátrixok tulajdonságai	367	10.5.	Pozitív főátlóbeli elem	476
7.74.	A sík ortogonalis transzformációi	367	10.9.	Csúcsok periódusa	477
7.78.	Vektor tükrözése egy másik vektorba	369	10.10.	Irreducibilis mátrixok ciklikus szerkezete	478
7.80.	Gram–Schmidt-ortogonalizáció	370	10.11.	Primitív mátrix jellemzése periódusával	479
7.84.	QR-felbontás létezése és egyértelműsége	373	10.13.	Nemnegatív mátrix spektrálsugara	480
7.88.	Optimális megoldás QR-felbontással	377	10.16.	A spektrálsugár becslése	482
7.89.	Pszeudoinvert QR-felbontásból	377	10.17.	Azonos oszlop- vagy sorösszeg	482
7.92.	Unitér mátrix ekvivalens feltételei	378	10.18.	Perron-tétel: egyszeres és domináns sajátérték	482
7.94.	Unitér mátrixok tulajdonságai	378	10.19.	Sajátértékek a spektrálkörön	483
7.95.	Fourier-összeg helyettesítési értékei	379	10.20.	Periódus a karakterisztikus polinomból	483
7.96.	A Fourier-mátrixok tulajdonságai	379	10.21.	Irreducibilis mátrixok határértéke	484
7.98.	A DFT tulajdonságai	380	10.26.	Reducibilis mátrixok	487
7.99.	Gyors Fourier-transzformáció	382	10.28.	Sztochasztikus mátrix sajátértékei	489
8.2.	Schur-tétel (valós mátrixokra)	388	10.29.	Sztochasztikus mátrixok szorzata	489
8.6.	Valós spektráltétel, főtengetétel	391	10.30.	Frobenius–König-tétel	490
8.7.	Szimmetrikus mátrix sajátalterei	391	10.31.	Pozitív kígyó létezése	490
8.11.	Schur-tétel (komplex mátrixokra)	393	10.32.	Birkhoff–von Neumann-tétel	490
8.14.	Normális mátrix néhány típusa	394	10.36.	Markov-lánc létezése	494
8.15.	A normális mátrixok tulajdonságai	394	10.37.	Átmeneti és visszatérő osztályok	495
8.17.	Komplex spektráltétel	395	11.3.	Polinomok maradékos osztása $\mathbb{F}_p[x]$ -ben	503
8.18.	Speciális mátrixok unitér diagonalizálhatósága	395	11.11.	Komplex számok műveleti tulajdonságai	508
8.22.	Valós értékű komplex kvadratikusság	399	11.12.	Konjugálás tulajdonságai	508
8.25.	Főtengetétel	401	11.15.	Algebrai és trigonometriai alak kapcsolata	509
8.31.	Sylvester-féle tehetetlenségi tétel	405	11.19.	Szorítás, osztás	511
8.38.	$A^T A$ pozitív szemidefinit	410	11.20.	Abszolút érték tulajdonságai	511
8.39.	Definitesség egy diagonális alakból	411	11.23.	Hatványozás, gyökvonás kiszámítása	512
8.43.	PSD mátrixok faktorizációja	412	11.30.	Polinom foka	517
8.46.	PD mátrixok faktorizációi	413	11.31.	A polinomok algebrai struktúrája	518
8.50.	Definitesség és a főminorok	415	11.34.	Egyértelmű faktorizáció $\mathbb{F}[x]$ - és $\mathbb{Z}[x]$ -ben	519
8.55.	Szinguláris értékek tulajdonságai	424	11.35.	Algebra alaptétele	519
8.58.	Az SVD létezése és konstrukciója	426	11.36.	Valós együtthatós polinom faktorizációja	520
			11.37.	Horner-módszer	520
			11.39.	Racionálisgyök-teszt	521
			11.42.	Gyökök és együtthatók kapcsolata	524

Bevezetés

Apró emlékeim a megértésről Sok éve, az akkor legkiválóbb mérnökhallgatómat megkérdeztem, hogy mik voltak a tananyaggal a félévi tapasztalatai. Néhány tartózkodó mondat után egy váratlan, számomra teljesen érthetetlen mondattal lepett meg: „A lineáris algebrát nem lehet érteni.” Tudása meghaladta a jelestől elvárt szintet, ami számomra azt jelentette, hogy kiválóan értette az anyagot. Kételkedésemet semmi magyarázattal nem kívánta eloszlatni, végül csak annyit tett hozzá: „Az analízist lehet érteni, az szép.” Mára érteni vélem, mire gondolt. Pl. a függvény határértékének vagy folytonosságának Cauchy-féle definíciója sok diák számára nehezen érthető, de magáról a fogalomról van valami elképzelése. Akár tudja, akár nem a definíciót, akár jók, akár zavarosak a megfogalmazásai, sejtí, miről van szó. De nincs ez így például a determinánssal. Aki megtanulta azt, hogy „az első sor elemeinek mindegyikét szorozd meg a hozzá tartozó előjeles aldeteminánssal és vedd az összegüket”, az ezzel könnyen élélhet, hibátlanul megoldhat feladatokat, de úgy érzi, nem ért belőle semmit. Majd amikor e fogalomra építve olyan egyenletrendszert fog megoldani a Cramer-szabállyal, melyet már általános iskolában is meg tudott oldani, csak akkor még értette mit miért csinál, megerősödik benne a vágy, hogy csak adjanak neki recepteket kaptafafeladatokra, azokat bevágja, és ne gyötörjék azzal, hogy érti-e mit csinál.

Egy másik mérnökhallgatóm sokszor megbukott, lényegében semmit nem értett az anyagból, viszont mindent bemagolt, így a félév utolsó pótvizsgáján mindig átment hatalmas erőfeszítése jutalmaként. A két évet lezáró szigorlat szóbeli részére egy elégséges írásbelivel jött, ami felkínálta egy könnyű, néhány kínai szöveggént bemagolt tétel belekérdezés nélküli meghallgatása utáni elégséges esélyét. De magam számára is váratlanul belekérdeztem egy hibátlanul visszamondott tétel tartalmába. Meglepetésem-

re a hölgy saját szavaival válaszolt, és jól. Felbátorodva egyre másra visszakérdeztem, hogy érti-e amit mond, és kiderült, két év embert próbáló magolása után összeállt a fejében az egész. Ritkán látni embert olyan boldognak, mint őt, amikor megmondtam, hogy a szóbelije jeles lett.

A 80-as évek elején fiatal oktatóként kérdőre vontam az egyik kar dékánját, hogy az oktatási reformjában miért csökkentette a matematika-órák számát. Azt válaszolta, hogy „mert szükségünk van időre, hogy megtaníthassuk a diákokat gondolkodni”. Ellenvetésemre, hogy épp a matematika az, ami ezt teszi, röviden annyit mondott, hogy a „matematika csak kaptafákat ad nekik, gondolkodni mi tanítjuk őket”.

A fenti, és még néhány egyéb tapasztalat arra sarkallt, hogy megfogalmazzak néhány elvet, amit e könyvben is követni igyekszem:

- az egyszerű kaptafák megtanulása ne a cél, csak egy segédeszköz legyen az anyag elsajátításában;
- sokak számára a megértésben fontos a „kézfoghatóság”, aminek nem kell (bár lehet) a matematikán kívülről származnia;
- érdemes még a matematika iránt kevésbé fogékonyak számára is érthető belső motiváló megközelítéseket keresni az új témák, fogalmak bevezetéséhez;
- a matematikán kívüli alkalmazásokkal óvatosan kell bánni, a reklámon túl (használja a deep learning, a kvantumfizika, a kódelmélet, a digitális jelfeldolgozás, ...) csak akkor hasznos élni velük, ha segítik a matematikai tartalom megértését.

Kinek készült ez a könyv és miért Ez a könyv főiskolai és egyetemi BSc és MSc szintű lineáris algebra-kurzusokhoz készült. Szemléletében eltér a Magyarországon eddig megjelent hasonló témájú tankönyvektől. Megírását és a több tekintetben is újfajta megközelítést az alábbi tények indukálták:

- a hallgatók mind hozott tudásukat, mind matematikai képességeiket tekintve heterogénebbek, mint korábban;
- a felsőfokú oktatás változó szemlélete nagyobb hangsúlyt fektet az alkalmazásorientáltabb tudás megszerzésére, ami hatással van a tananyag összeállítására és a szükséges kompetenciák kijelölésére is;
- a matematika felsőfokú oktatásával foglalkozó nemzetközi kutatások eredményei (David Carlson, Charles Johnson, David Lay, A. Duane Porter: *The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra*, *College Mathematics Journal*, 24, 1993, 41–46), a számítógép használatának elterjedése új oktatási szemlélet kialakítását kívánják.

A következőkben áttekintjük a könyvben követni szándékozott elveket.

Didaktikai célszerűség A könyv megírásakor fő célunk az volt, hogy a lineáris algebra absztrakt fogalmait a lehető legegyszerűbben, legérthetőbben vezessük be. Sosem a legáltalánosabb megfogalmazás, a legaxiomatikusabb felépítés, a matematikailag legtömörebb tárgyalásmód megtalálása volt a cél, hanem a didaktikai célszerűség, a hallgatók többsége számára a hatékony tanulhatóság elérése. Ehhez a legfontosabb eszköz a fogalmak megfelelően *motivált* bevezetése a lineáris algebra klasszikusnak számító tárgyalásmódját gyakran jellemző égből pottyant definíciók helyett.

Moduláris szerkesztés A könyv anyagát igyekeztünk modulárisan, apró egységekre bontva megszerkeszteni, ezzel nemcsak az áttekinthetőségét növelni, de a többcélú, különböző szintű, különböző időtartamú kurzusokhoz való alkalmazását is megkönnyíteni.

Alapfogalmak korai bevezetése Tapasztalataink szerint a lineáris algebra alapfogalmainak megértésében nem elég hatékonyak sem azok a kurzusok, melyek az egyszerű mátrix-, determináns-, sajátérték-számítási technikákkal kezdődnek, majd hirtelen az absztrakt fogalmakra (vektortér, lineáris leképezés, ...) váltanak, sem azok, melyek absztraktabb szintről

indulnak, például amelyek nem mátrix, hanem lineáris leképezés alapúak.

Az absztrakt gondolkodásban kiválóak szűk csoportját leszámítva a hallgatók gyorsabban és mélyebb ismeretekhez jutnak, ha az absztrakt fogalmakkal konkrét esetekben már korábban megismerkednek, és az absztrakt fogalomalkotás valóban absztrakció, és nem kinyilatkoztatás útján történik. Ezért a lineáris algebra legtöbb fontos, e könyvben tárgyalt fogalmával az első fejezetekben találkozunk az Olvasó, az általános fogalomalkotás csak ezt követi.

Fokozatosság A könyv egészen elemi – az első fejezetekben középiskolás szintig visszanyúló – tárgyalásmóddal kezdődik, melyet egyre összetettebb, nehezebb anyagrészek, és fokozatosan egyre tömörebb tárgyalásmód követ. A különböző szintű kurzusokon való használhatóságot segíti, hogy a megcsillagozott szakaszok vagy paragrafusok egy első kurzusban átugorhatók.

Célok kijelölése Minden szakasz elején megfogalmazzuk azokat a minimális célokat, melyeket az Olvasónak, vagy egy kurzus ebből tanuló hallgatójának az adott tananyagrész elsajátítása után el kell érnie. A szokásos mondatkezdő „A hallgató képes lesz” típusú mondatkezdéseket elhagytuk. A célokat egy-egy ▼ jelzi.

Többirányú megközelítés A lineáris algebrai ismeretek is megközelíthetőek több különböző módon. E könyvben a matematikailag precíz tárgyalásmód szándéka mellett a következő megközelítésekre helyezünk hangsúlyt:

1) *Procedurális megközelítés:* Az absztrakt összefüggések megértését segítő elemi, konkrétizáló, szemléltető számítási példák a *procedurális* gondolkodásban erősebb, a valamifajta *kézzelfoghatóságot* igénylő hallgatók segítségére.

2) *Vizuális megközelítés:* A geometriai intuícóra és a vizualizáció lehetőségeire több témában is építünk.

3) *Számítógépes megközelítés:* Margószéli megjegyzésekben programkódokat mellékelünk és számítógép használatát igénylő opcionális feladatokat is kitűzünk. Az erre fogékony hallgatóknál ezek segíthetik a tananyag jobb megértését. E könyvben a lineáris algebra-kalkulátor-

ként is használható, a műszaki számításokban általánosan használt *mátrixalapú*, GNU-licenszű MATLAB-klónt, az Octave-ot (octave.org), valamint a legegyszerűbben elsajátítható, igen népszerű, az adattudományban, így a lineáris algebra modern alkalmazásaiban is erős Python nyelvet (python.org) használjuk. Mindkettőt interaktív módon mutatjuk be, de a letölthető fájlokban csak a forráskód van. Más szabadon hozzáférhető matematikai programokat is szívesen ajánlunk az Olvasó figyelmébe. Kiemeljük közülük a Python alapú Sage nevű komputeralgebra-programot (sagemath.org), és az online számításokra alkalmas, ingyen használható, de előfizetéseket ajánl – a kommersziális Wolfram nyelvre épülő – wolframalpha.com weboldalt, de jól használható a statisztikai számításokra készült GNU-licenszű R nyelv is (<https://www.r-project.org/>).

Feladatok A könyvben a részletesen kidolgozott mintapéldák mellett feladatok is vannak. Ezek többségének eredményei, megoldásai egy szabadon letölthető pdf-állományba kerülnek. A nehéznek számítókat csillaggal jelöljük (pl. 2.11.*), a *számítógéppel megoldandó* feladatokat a képernyőre emlékeztető kis téglalappal (pl. 2.12.*), a *fontosabbnak* ítélt feladatokat egy díszponttal (pl. 2.13.*). A feladatok közt szerepel néhány ún. projekt, mely az anyaghoz kapcsolódó, extra ismeretanyagot is tartalmazó néhány feladatból áll. A számítógépprogramok és egyes feladatok megoldásai letölthetők a www.typtex.hu oldalról, a Typotex Kiadó honlapjáról.

A könyv felépítése A könyv első két fejezetét a *lineáris algebra két fő forrásának* tanulmányozására szántuk. E két forrás jól jellemezhető egy-egy alapfogalommal: a vektorral és a lineáris egyenletrendszerrel. Egyikük geometriai, másikuk algebrai jellegű. E fogalmakat az Olvasó általános- és középiskolás tanulmányaiból már ismeri. E részben ezekből kiindulva, de a lineáris vektortér absztrakt fogalmának ismerete és a mátrixműveletek bevezetése nélkül közel jutunk a lineáris algebra mélyebb fogalmaihoz.

A következő két fejezet a lineáris algebra két klasszikus elemi témáját, a *mátrixokat és determi-*

nánsokat tárgyalja. Megszívvelve a „Linear Algebra Curriculum Study Group” ajánlásait, e rész az első lineárisalgebra-kursus középpontjába helyezi a mátrix fogalmát, de sok könyvtől eltérően a mátrixok algebrája mellé helyezi a mátrixok hatásának geometriai szemléletét is. E különböző megközelítések reményünk szerint segíteni fogják az absztraktabb fogalmak megértését.

Ezután következik – emelve az absztrakció szintjét – a *lineáris leképezések* tárgyalása. Itt jutunk el oda, hogy a vektortér absztrakt fogalommal is megismerkedünk. E szakasz át is ugorható egy első kurzuson. A hatodik fejezet témája a *diagonalizálás*, az egyik legfontosabb egyszerűsítő eljárás. Ennek kulcsfogalmai a *sajátérték és sajátvektor*. Az utóbbi fogalmának általánosítása vezet a *Jordan-féle normálalakhoz*, mely a diagonalizálhatóságtól független strukturális leírását adja a mátrixnak, ill. a lineáris leképezésnek. E téma tipikusan már egy második kurzus vagy MSc-kurzus anyagába tartozik, mint ahogy e fejezet utolsó szakasza, a *mátrixfüggvények* is, melyek vizsgálatában a Jordan-normálalak kulcszerepet játszik.

A hetedik fejezetben az *euklideszi terekkel, a merőlegesség és távolság* fogalmaival, a legkisebb négyzetek elvével és az inkonzisztens egyenletrendszerek optimális megoldásaival, valamint a numerikus számításokban kulcsfontosságú ortogonális mátrixokkal és leképezésekkel ismerkedünk. A nyolcadik fejezet erre építve az *ortogonális diagonalizálást* és annak két bázisra vonatkozó változatát, az SVD-t, valamint az előbbihez kapcsolódóan a kvadratikus alakokat vizsgálja.

A kilencedik fejezet a hosszúság fogalmának általánosítását, a *normát* és a *sebesség* fogalmához kapcsolódó differenciálhatóságot tárgyalja, valamint a differencia- és differenciálegyenletrendszerek alapismereteibe ad egy lineáris algebra felőli megközelítést.

A tizedik fejezet az alkalmazásokban fontos *nemnegatív* és speciálisan a sztochasztikus mátrixokat tárgyalja. Végül azok az algebrai alapismeretek kerültek az utolsó fejezetbe, melyek anyaga valahol szükségessé válik, de kurzusonként változhat, hogy mikor. Így itt szerepelnek a *komplex számokra*, a *véges testekre* és a *polinomokra* vonatkozó alapismeretek.

A könyv több ponton eltér – részben didaktikai megfontolásokból, részben az alkalmazások szem előtt tartása okán – a szokásos tárgyalásmódtól. Példaként említem a determináns fogalmának kétféle megközelítését, a pszeudoinverz vagy a szinguláris érték és vektor fogalmának tárgyalásmódját, ill. olyan témák hangsúlyosabbá tételét, mint amilyen az egyenletrendszerek optimális megoldása vagy a lineáris algebra alaptétele.

A könyvben minden igyekezetem ellenére nagy valószínűséggel előfordulhatnak hibák. Előre is hálásan köszönöm, ha ezekre felhívják a figyelmem, de egyéb megjegyzéseket, véleményeket is szívesen fogadok a `wettl.ferenc+LA@gmail.com` ímélcímen.

Köszönetnyilvánítás Szeretném köszönetemet kifejezni Horváth Erzsébet, Lukács Erzsébet, Kiss Sándor, Kürönya Alex, Milkovszki Tamás és Szép Gabriella kollégáimnak, akikkel együtt taníthattam lineáris algebrát, és akik több ötletükkel, gondolatukkal is hozzájárultak e könyv anyagához, valamint köszönöm Nagy Gábor Péter és Rónyai Lajos biztatását és támogatását. Nagyon köszönöm Lukács Erzsébet, Kiss Sándor, Stubnya Gusztávné, Bacsó Gábor, Tóth Imre Péter, Ferenci Tamás, Kutas Péter és Molnár Zoltán segítségét, akik a könyv egy-egy részét átolvasták és értékes megjegyzéseikkel segítettek munkámat. Végül hálásan köszönöm a Typotex Kiadó munkatársainak segítségét, gondosságát és türelmét.

Wettl Ferenc