

4.1. 1. Hamis. 2. Igaz. 3. Hamis, épp hogy akkor $\det \mathbf{A} = 0$. 4. Hamis. A $\det \mathbf{A} \neq 0$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható bármely $\mathbf{b}$ vektor esetén. 5. Hamis. A $\det \mathbf{A} = 0$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek vagy több megoldása van, vagy inkonzisztens, tehát egyetlen megoldása sincs.

4.2.

a) -2 .

b) 0, mert van 0-sora.

c) 0, mert van két azonos sora.

d) 0, mert a második sor az első konstansszoros.

e) 6, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

f) 0, mert van két azonos oszlopa.

4.3.

a) A harmadik sor egyenlő az első kettő összegével,

b) a második sor az első -2 -szerese,

c) a második sor kétszereséből kivonjuk a harmadik sort, megkapjuk az első, ill. a harmadik oszlop egyenlő az első kettő összegével,

d) a második sor az első és a harmadik számtani közepe (másként: a harmadik sorból kivonva a második, majd a másodikból az első, mindkétyszer az $(1, 1, 1)$ vektort kapjuk, így van két azonos sor),

e) a három sorvektor összege a zérusvektor,

f) az első sor a második és harmadik összege,

g) $\sin(\xi + \delta) = \sin \xi \cos \delta + \cos \xi \sin \delta$, így a harmadik oszlop az első és a második oszlop lineáris kombinációja, vagyis az oszlopvektorok lineárisan összefüggőek, tehát a determináns értéke 0.

4.4. a) 2, b) -4 , c) -2 , d) -2 , e) -6 , f) -2 , g) -12 , h) -12 .

4.5. a) 25, b) 40, c) 1600, d) $1/5$, e) 25, f) $1/625$, g) $5/4$, h) 1.

4.6.

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

b) Az 1. és 2., azután az 1. és 3., végül az 1. és 5. sorokat felcserélve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -120.$$

c) 24.

d) 24.

4.7.

a) Az első sort kivonjuk a másodikból és a harmadikból, majd a másodikikat a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) Az első sort kivonva a többi sorból, majd a második sor kétszeresét kivonva a harmadikból, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

Részletezzük a megoldás lépéseit:

1. lépés: Cseréljük ki az első és második sort, hogy az első sor első eleme 1 legyen, s így ne kelljen törtekkel számolni. A determináns értéke (-1) -szeresére változik.

2. lépés: Az első sor (-3) -, (-1) - ill. (-2) -szeresét adjuk a második, harmadik ill. negyedik sorhoz.

3. lépés: Hogy a második sor második eleme is 1 legyen, emeljük ki 2-t a második sorból.

4. lépés: A második sort ill. (-1) -szeresét adjuk a harmadik ill. negyedik sorhoz.

5. lépés: Adjuk a harmadik sort a negyedikhez. A determináns értéke -16 .

d) 144.

4.8. Egy $n \times n$ -es mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek állnak, egyebütt nullák, bármely két sor inverzióban áll egymással, a sorpárok száma pedig $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánsa $(-1)^{n(n-1)/2}$. Ha a sorcserét számoljuk össze, melyek a mátrixot az egységmátrixba viszik, kétféleképp is eljárhatunk.

(1) Ha az első sort felcseréljük az utolsóval, a másodikikat az utolsó előttivel, $\dots$, így $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sorcserét hajtottunk végre, tehát a determináns értéke $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (itt $\lfloor \cdot \rfloor$ az egészrész-függvényt jelöli).

Bár a két eredmény különbözőnek tűnik, mindkettő értéke 1, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k + 1$, és -1 , ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ valamilyen k természetes számra.

(2) Eljárhatunk úgy is, hogy csak szomszédos sorokat cserélünk, és először az első sort visszük (szomszédos sorok cseréjével) az utolsóba, majd az eredeti determináns második sorát az utolsó elé, ..., azaz az alábbi sorpárok cseréjét hajtjuk végre:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), \dots, (n-1, n),$$

$$(1, 2), (2, 3), \dots, (n-2, n-1),$$

...

$$(1, 2), (2, 3),$$

$$(1, 2).$$

Ez összesen $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sorcsere. Minden sorcserével (-1) -szeresére változik a determináns értéke, így a végeredmény $(-1)^{n(n-1)/2}$.

Ha egy determináns mellékátlója felett vagy alatt csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a mellékátlóbeli elemek szorzatának $(-1)^{[n/2]}$ -szerese vagy más alakban $(-1)^{n(n-1)/2}$ -szerese.

A megadott mindkét 9×9 -es determináns értéke $9!(-1)^{[9/2]} = (-1)^4 \cdot 362880 = 362880$.

4.9. a) $n = 1$ esetén $1 + x_1 y_1$, $n = 2$ esetén $x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$ a determináns értéke. Ha $n \geq 3$, akkor a determináns értéke 0. Ezt úgy bizonyíthatjuk, hogy először a determinánst két determináns összegére bontjuk, majd mindkettőről belátjuk, hogy értékük 0. Az első determináns csupa 1-esből álló első sorát kivonjuk az összes többi sorból, az így kapott determináns értéke pedig valóban 0, hisz ha $x_2 = 0$, akkor a második sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_2 \neq 0$, akkor a második sorának x_3/x_2 -szerese egyenlő a harmadik sorral. A második determináns értéke is 0, hiszen ha $x_1 = 0$, akkor az első sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_1 \neq 0$, akkor az első sor x_i/x_1 -szeresét kivonva az i -edik sorból egy olyan determinánst kapunk, amelyben a második sortól kezdve minden sor 1-esekből áll, tehát van két azonos sora.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \dots & 1+x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \dots & 1+x_n y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \dots & 1+x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \dots & 1+x_n y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) $(1 - a^n)^{n-1}$. Vonjuk ki az első sor a^{n-1} -szeresét a második sorból, a^{n-2} -szeresét a harmadik sorból, ..., a -szorosát az utolsó sorból: így a főátló alatt csak nullák lesznek.

c) $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$. Első megoldás: adjunk minden sort az elsőhöz, emeljük ki a közös $a + (n-1)b$ értéket, majd e sor b -szeresét vonjuk ki minden sorból. Másik megoldás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki a fölötte levőt, majd jobbról kezdve mindegyik oszlopot adjuk a megelőzőhöz.

d) Ha $c = b$, akkor ld. a c) pont eredményét. Ha $b \neq c$, akkor az eredmény

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

A megoldáshoz tekintsük az $n+1$ -ed rendű D_{n+1} determinánst, melynek jobb alsó elemét írjuk $(a-b) + b$ alakba, majd alkalmazzuk az utolsó sorra a soronkénti additivitás tételét (4.14. tétel).

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & (a-b) + b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & b-c & \dots & b-c \\ 0 & a-c & \dots & b-c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \dots & b \end{vmatrix} \\ &\stackrel{*}{=} D_n(a-b) + b(a-c)^n. \end{aligned}$$

A $*$ -gal jelzett egyenlőség bal oldalán két olyan determináns szerepel, melynek az utolsó oszlopa ill. sora csupa 0-ból áll, így értéke a jobb alsó sarokelem és a bal felső $n \times n$ -es alldetermináns értékének szorzata (miért? ld. később általánosítva a 4.22. állításban). Az első esetben a bal felső alldetermináns épp D_n , a második determinánsban egy felsőháromszög-mátrix determinánsa, melynek főátlójában csupa $a-c$ van. Így $D_{n+1} = D_n(a-b) + b(a-c)^n$. Szimmetriaokokból egyúttal igaz az $D_{n+1} = D_n(a-c) + c(a-b)^n$ egyenlőség is. A kettőt kivonva egymásból megkapjuk D_n értékét.

4.10. Az eredmény 48. Megoldás Sage-ben:

```
g = graphs.PetersenGraph()
G = matrix(g)
G.det()
```

Természetesen a 3.55. feladatban megadtuk a Petersen-gráf szomszédsági mátrixát, abból akár az Octave/Matlab, akár a Python kiszámolja a determinánsa értékét.

Megjegyzés: a 8.38. feladatban megadjuk a gráf szomszédsági mátrixának spektrumát, melyből számítógép nélkül is megkapható a determináns értéke.

4.11. Determinánsan azt a $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értjük, mely eleget tesz a következő feltételeknek tetszőleges $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $c \in \mathbb{R}$ számra:

1. $\det(\mathbf{v}_1, \dots, c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) = c \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n)$,
2. $\det(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) = -\det(\dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots)$,
3. $\det(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots) = \det(\dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j, \dots)$,
4. $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.

4.12. Ha $\det \mathbf{B} = 0$, akkor $\det(\mathbf{AB}) = 0$ is fennáll, így ekkor $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$. Tegyük fel, hogy $\det \mathbf{B} \neq 0$, és tekintsük az $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{AB}) \det(\mathbf{B})$ leképezést.

D_1 fennáll, hisz ha $\mathbf{A}$ i -edik sorát c -vel szorozzuk és $\mathbf{e}$ mátrixot $\mathbf{A}'$ -vel jelöljük, akkor az $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ -t az $\mathbf{AB}$ -ből i -edik sorának c -vel való szorzásával kapjuk meg, így $\det(\mathbf{A}'\mathbf{B}) / \det(\mathbf{B}) = c \det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B})$.

D_2 fennáll, hisz ha $\mathbf{A}'$ -t az $\mathbf{A}$ -ból az i -edik és j -edik sorának felcserélésével kaptuk meg, akkor $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ -t az $\mathbf{AB}$ -ből ugyancsak c két sor felcserélésével kapjuk meg, így $\det(\mathbf{A}'\mathbf{B}) / \det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B})$.

D_3 fennáll, hisz az előző két ponthoz hasonlóan az $\mathbf{A}$ -ból a hozzáadás műveletével kapott $\mathbf{A}'$ mátrixra az $\mathbf{A}'\mathbf{B}$ az $\mathbf{AB}$ -ből ugyanazzal a hozzáadás-művelettel kapható, így $\det(\mathbf{A}'\mathbf{B}) / \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B})$.

D_4 fennáll, hisz $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ esetén $\det(\mathbf{AB}) \det(\mathbf{B}) = 1$.

Tehát $\mathbf{e}$ függvény megegyezik a $\det$ függvénnyel, így értéke $\det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$, azaz $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.

4.13. Az $\mathbf{A}$ előáll **PLU** alakban, ahol $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felsőháromszög-mátrix. Az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A $\mathbf{P}$ permutáló mátrix determinánsa 1 vagy -1 , transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(\mathbf{I}) = \det(\mathbf{PP}^T) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^T) = 1$, azaz $\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^{-1}$ egyszerre 1 vagy -1 , tehát megegyeznek. Végül $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PLU}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U})$, és $\det(\mathbf{A}^T) = \det((\mathbf{PLU})^T) = \det(\mathbf{U}^T \mathbf{L}^T \mathbf{P}^T) = \det(\mathbf{U}) \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{P})$ összevetése bizonyítja az állítást.

4.14. $\det(\mathbf{E}_{S_i + cS_j}) = 1$, $\det(\mathbf{E}_{S_i \leftrightarrow S_j}) = -1$, $\det(\mathbf{E}_{cS_i}) = c$.

4.15. Az $a)$ kérdés esetén:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{S_3 - S_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 - S_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} S_4 - S_3 \\ S_3 - S_2 \\ S_2 - S_1 \\ S_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

$b)$ Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, elvégezve az ajánlott műveleteket, majd azt megismételve az egyre kisebb jobb alsó részdeterminánssal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n-2}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-3}{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \binom{n-2}{0} & \dots & \binom{2n-4}{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \dots = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & 0 & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n-1}{0} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

4.16. $a)$ Az első sort kivonva a másodikból és a harmadikból két konstans sort kapunk, melyek egymás konstansszorosai, tehát a determináns értéke 0.

$b)$ Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból és a harmadikból. Az így kapott harmadik oszlop kétszerese a másodiknak, tehát a determináns értéke 0.

$c)$ Itt elég, hogy a determináns másodrendű legyen. Egyik sorának megfelelő konstansszorosa a másik sor, így a determináns értéke 0.

4.17. Első megoldás: bontsuk fel a zárójeleket, majd vonjuk ki az első oszlopot a többiből, ezzel eltüntetve azokból a négyzetes tagot, majd vonjuk ki a második oszlop megfelelő skalárszorását a harmadik és negyedik oszlopból, hogy elimináljuk azok lineáris tagját, végül a harmadik oszlop konstansszorását vonjuk ki a negyedikből, hogy ott csak 0-k maradjanak.

Második megoldás: Elég megmutatnunk, hogy a determináns oszlopai lineárisan összefüggőek. Az

$a^2x + (a+1)^2y + (a+2)^2z + (a+3)^2w = 0$ egyenlet a homogén

$$x + y + z + w = 0$$

$$2y + 4z + 6w = 0$$

$$y + 4z + 9w = 0$$

egyenletrendszerre vezet, aminek biztosan van nemtriviális megoldása, hisz 4 ismeretlenhez csak 3 egyenlet van adva. (Megoldani már szükségtelen, elég a megoldás létezését igazolni, de például az $(x, y, z, w) = (1, -3, 3, -1)$ egy megoldás).

4.18. $\det \mathbf{C}^{-1} \det \mathbf{C} = \det \mathbf{I} = 1$, azaz $\det \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}}$, így $\det(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}) = \det(\mathbf{C}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}^{-1}) = \det \mathbf{A}$.

4.19. Mivel a koordináták báziscserében való változásról szóló 3.15. állításban láttuk, hogy a koordinátás alakokat a $[\mathbf{v}_i]_{\mathbf{C}} = \mathbf{A}_{\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}} [\mathbf{v}_i]_{\mathbf{B}}$ képlet kapcsolja össze, ezért a $\mathbf{v}$ vektorok koordinátás alakjaiból, mint oszlopvektorokból képzett mátrixokra $\mathbf{V}_{\mathbf{C}} = \mathbf{A}_{\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}} \mathbf{V}_{\mathbf{B}}$, így determinánsaikra $\det \mathbf{V}_{\mathbf{C}} = \det \mathbf{A}_{\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}} \det \mathbf{V}_{\mathbf{B}}$.

4.20. Egyrészt $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$, másrészt mivel $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, ezért $\det(\mathbf{A}^T) = (-1)^n \det(\mathbf{A})$, azaz $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$, amiből $\det(\mathbf{A}) = 0$.

4.21. $\det(\mathbf{A}^2) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^T = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$.

4.22. Mindhárom determinánst a következőképpen számíthatjuk ki. Legyen $\mathbf{A}$ a determinánshoz tartozó mátrix. Tekintsük az $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ determinánst. Ezt könnyű kiszámítani (hisz a főátlón kívül csak nullák állnak), s ennek négyzetgyöke lesz a determináns értéke. Ezek alapján a három determináns értéke:

$$a^2 + b^2, \quad (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2, \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4.$$

4.23. A determinánsok szorzási szabályát is felhasználva:

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_2y_1 - x_1y_2 & -x_2y_2 + x_1y_1 \end{vmatrix} \\ = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

A négy ill. a nyolc négyzet összegére vonatkozó analóg összefüggések hasonlóan bizonyíthatóak. (Hurwitz bebizonyította, hogy ha n négyzetszám összegére igaz a feladatbelivel analóg összefüggés, akkor $n = 1, 2, 4$ vagy 8.)

4.24. Először igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrixszal való szorzás a sík bármely egyenesének pontjait egy egyenes pontjaiba vagy egyetlen pontba viszi. Bármely egyenes pontjaiba mutató $\mathbf{r}$ vektorok $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + \mathbf{b}$ alakba írhatók, ahol $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ adott vektorok. E vektorok képe

$$\mathbf{A}\mathbf{r} = t\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b},$$

ami $\mathbf{A}\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ esetén egy egyenes vektoregyenlete, míg $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ esetén egy ponté. Ezért egy téglalap képének meghatározásához elég csak kiszámolni a téglalap 4 csúcsának képét. Ez kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}.$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott paralelogramma oldalvektorai (ax, cx) és (by, dy) , és így területe

$$|(ax)(dy) - (cx)(by)| = |ad - bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe független a téglalap helyzetétől, és mindig a téglalap területének $|\det \mathbf{A}| = |ad - bc|$ -szerese.

4.25. Legyen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ az $\mathbb{R}^n$ három bázisa. Az áttérés mátrixait jelölje $\mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}$, $\mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$, ... Az „azonos orientációjú” reláció ekvivalenciareláció, ui. reflexív, hisz $\mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{I}$ melynek determinánsa 1, ami pozitív. A reláció szimmetrikus, hisz ha $\det \mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} > 0$, akkor $\det \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \det \mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = 1/\det \mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} > 0$. Végül e reláció tranzitív, hisz ha $\det \mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} > 0$ és $\det \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} > 0$, akkor $\det \mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{C}} = \det(\mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}) = \det(\mathbf{T}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}) \det(\mathbf{T}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}) > 0$.

4.26. Valós $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixok esetén a válaszok: a) Igaz. b) Igaz. c) Igaz. d) Igaz. e) Hamis. Mátrixok összegének determinánsa általában nem egyenlő determinánsaik összegével (ld. a 4.27. b) feladatot). f) Hamis. Egy aldetermináns értéke bármilyen előjelel lehet, az előjeles aldeterminánst belőle úgy kapjuk, hogy páratlan $i + j$ esetén megszorozzuk -1 -gyel. g) Hamis. h) Hamis. Csak azokon a helyeken folytonos függvénye a mátrix elemeinek, ahol a determinánsa nem 0. i) Hamis, a megfordítása igaz. j) Hamis, a megfordítása igaz.

4.27.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 8.$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ = 1 + 16 - 4 - 4 = 9.$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4.28. Az első sor minden eleme páros, az első oszlop minden eleme osztható 3-mal, a második oszlop minden eleme osztható 5-tel, tehát minden kígyó osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ -cal, így az összegük is. A feladat megoldható úgy is, hogy e számokat kiemeljük az adott sorokból/oszlopokból, és a megmaradt determináns egészelemű, így determinánsa is az.

4.29. Csak egyetlen kígyó áll csupa páratlan számból, így a kígyók összegére bontásnál csak annak determinánsa páratlan, a többi páros, összegük tehát páratlan, vagyis nem lehet 0.

4.30. Megadjuk, hogy melyik sorban hányadik elem lesz a kígyóba választva. A 12 kígyó: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2413, 3142, 3214, 3421, 4123, 4231, 4312. Ezek alapján a 12 determináns – a kígyó elemeket négyzettel jelölve:

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4.31. Annak valószínűsége, hogy a determináns értéke 0, legfőlegb n/s . A konkrét esetben $s = 199$, $n = 3$, így a determinánsok legfőlegb $3/199 \approx 0.015$ -ed részének 0 az értéke. Ez egy durva becslés, valószínűleg ennél jóval kisebb a pontos érték.

4.32. a) A második sor vagy a harmadik oszlopot érdemes választani. A determináns értéke -6 .

b) Egy olyan determinánst kell konstruálni, melynek van egy nulla értékű aldeterminánsa. Pl. a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke 1, de a 9-hez tartozó aldetermináns értéke 0, így a második sor vagy oszlop szerinti kifejtésben e szám 0-val szorozódik, vagyis nem befolyásolja a determináns értékét, bármilyen számmal kicserélhető.

4.33. Igen. Tekintsük a determináns első sor szerinti kifejtését! Ha mindegyik elemhez tartozó előjeles aldetermináns 0 lenne, akkor a mátrix szinguláris lenne, így valamelyik elemhez tartozó aldetermináns nem 0. Legyen pl. $A_{1j} \neq 0$. Ekkor a kifejtés

összes többi tagját összevonva kapjuk, hogy $\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + c$. Mivel $A_{1j} \neq 0$, ezért az $a_{1j}A_{1j} + c = 0$ egyenlet megoldható a_{ij} -re, tehát ennek az elemnek a megváltoztatása 0-vá teszi a determinánst.

4.34. Ha az i -edik sor elemeit az u -adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u -adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Másoljuk az i -edik sort az u -adik helyére, tehát minden k -ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^n a_{uk}A_{uk}$, azaz e determináns u -adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

4.35. A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases} \quad (4.9)$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases} \quad (4.10)$$

A sorokra vonatkozó képlet mátrixszorzatos alakba írva $\mathbf{A} \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$.

4.36. A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^T = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ui. $[a_{ij}]$ i -edik sorának és $[A_{ij}]^T$ u -adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u -adik sorának skaláris szorzata a (??) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

4.37. Ha a legnagyobb közös osztó $d > 1$ lenne valamelyik sorban vagy oszlopban, akkor d -t kiemelve kapjuk, hogy még $\det(\frac{1}{d}\mathbf{A})$ is egész, így d osztója $\det(\mathbf{A})$ -nak. Ez ellentmond annak, amit a 194 oldalon igazoltunk, hogy $|\det(\mathbf{A})| = 1$.

4.38. a) Rögzítsük az I halmazt, és igazoljuk, hogy az $\mathbf{A}$ összes K kígyója pontosan egy olyan J indexhalmazhoz tartozik, hogy a kígyóbeli elemek (i, j) indexpárjaira vagy $i \in I$ és $j \in J$, vagy $i \in \bar{I}$ és $j \in \bar{J}$. Így minden kígyó determinánsa pontosan egyszer szerepel a feladatbeli első képletben. Az előjel kiszámításához a determináns sorait és oszlopait rendezzük át úgy, hogy az $A_{I,J}$ aldetermináns a bal felső sarokba kerüljön. Ehhez

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \dots + (i_k - 1) + (j_1 - 1) + (j_2 - 1) + \dots + (j_k - 1) = \sum I + \sum J - 2k,$$

aminek paritása azonos a $\sum I + \sum J$ paritásával. A mások kifejezés hasonlóan igazolható.

b) Az első és harmadik sor szerint kifejtve:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \\ & (-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+3+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 6 - (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 0 - 1 \cdot (-3) \\ & = -15 \end{aligned}$$

4.39. a) $-6 \cdot 6 = -36$, mert a blokkmátrixok determinánsára vonatkozó tétel szerint a bal felső 2×2 -es és a jobb alsó 3×3 -as determinánsok szorzata adja az eredményt.

b) Az $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ blokkosításban legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a 4.38. tétel szerint – kihasználva hogy $\mathbf{A}$ invertálható – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \det \mathbf{A} \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-3) = 3. \end{aligned}$$

4.40. Egy példa a következő:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ahol $\det \mathbf{M} = -1$, $\det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{D} - \det \mathbf{B} \det \mathbf{C} = (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2.$$

4.41. a) A determináns a 2, -1, -2, 1 számokból képezett Vandermonde-determináns, így értéke:

$$\begin{aligned} & (-1-2)(-2-2)(1-2)(-2-(-1)) \\ & \cdot (1-(-1))(1-(-2)) = 72. \end{aligned}$$

b) Vandermonde-determináns; értéke -2880.

c) A determináns két Vandermonde-determináns

összegére bomlik:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{vmatrix} \\ & = (b-a)(c-a)(c-b) \\ & \quad \times [(d-a)(d-b)(d-c) + (e-a)(e-b)(e-c)]. \end{aligned}$$

4.42. Ha $pqrs \neq 0$, akkor szorozzuk be az első sort p -vel, a másodikat q -val, a harmadikat r -rel, a negyediket s -sel, majd a negyedik oszlopból emeljük ki $pqrs$ -t; így egy Vandermonde-determinánst kapunk:

$$\begin{aligned} D &= \frac{pqrs}{pqrs} \begin{vmatrix} p^3 & p^2 & p & 1 \\ q^3 & q^2 & q & 1 \\ r^3 & r^2 & r & 1 \\ s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \\ &= (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r). \end{aligned}$$

Ha $pqrs = 0$, például $s = 0$, akkor az eredeti determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy

$$D = pqr \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ q^2 & q & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezekből rövid átalakítás után látható, hogy az összefüggés ebben az esetben is fennáll.

4.43. $a_1 = \det[1] = 1$, $a_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, az $(n \times n)$ -es determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

4.44. Indukcióval bizonyítunk. $k = 2$ esetén az állítás igaz, hisz

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & -1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}}{\det(a_1)} = \frac{a_2 a_1 + 1}{a_1} = a_2 + \frac{1}{a_1}.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $k-1$ értékre. Megmutatjuk, hogy akkor igaz k -ra is. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{1}{\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}.$$

Ha a determinánst kifejtjük első sora szerint, az adódik, hogy $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$. Ezt p_{k-1} -gyel osztva kapjuk az igazolandó formulát.

4.45. Wronski-determinánsuk $W(e^x, xe^x, x^2 e^x) = 2e^{3x}$, ami sehol nem 0 (így legalább egy pontban nem 0), tehát lineárisan függetlenek.

4.47. a) $x = 2$, $y = -1$, b) $(x, y, z) = (3, 1, 1)$,

c) $(x, y, z) = (3, 4, 5)$, d) $(x, y, z, w) = (0, 1, 0, 2)$.

$$4.48. \text{ a) } -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{8}{-8} = -1, \text{ b) } \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = 6.$$

4.49. a) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix determinánsa 1, ezért inverze megegyezik az előjeles aldeterminánsok előbb kiszámolt mátrixával.

b) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix determinánsa 16, ezért az inverz mátrix

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ megegyezik az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltjával. Ennek mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felsőháromszög-mátrix inverze felsőháromszög-mátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles aldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többi is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mi lehet e feladat általánosítása, és mi a válasz?

d) A mátrixból csak egy nemnulla kigyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det \mathbf{B} = 16$. Az inverz kiszámításához nem kell sok aldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt a szimmetria miatt a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$f) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$g) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}.$$

h) Az inverz

$$\frac{1}{abc} \begin{bmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix},$$

és mivel $abc \neq 0$, így mindhárom tört létezik. Az $abc = 0$ esetben a mátrix nem invertálható.

4.50. a) 5. Legegyszerűbb, ha az első sor 2-szeresét hozzáadjuk a második, és 3-szorosát a harmadik sorhoz.

b) A három eredmény: 1, 2, 4. Mivel mindhárom test esetén ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, csak más modulus szerinti maradék lesz az eredmény, legegyszerűbb, ha az egészek fölött számolunk, és annak maradékait tekintjük. Valóban, az egészek fölött -1 a determináns, és $-1 \bmod 2 = 1$, $-1 \bmod 3 = 2$, $-1 \bmod 5 = 4$.

4.51. Python-kód egy $\mathbb{F}_2 = \text{GF}(2)$ fölötti mátrix és determinánsa kiírására:

```
>>> import numpy.linalg as nl
>>> import galois
>>> GF = galois.GF(2)
>>> A = GF.Random((5,5))
>>> A
GF([[1, 0, 0, 1, 0],
    [1, 1, 1, 0, 0],
    [1, 1, 0, 1, 0],
    [0, 0, 0, 0, 1],
    [1, 0, 1, 0, 1]], order=2)
>>> nl.det(A)
GF(0, order=2)
>>> A = GF.Random((5,5))
>>> nl.det(A)
GF(1, order=2)
Sage-kód egy  $\mathbb{F}_2$  fölötti véletlen mátrix és determinánsa kiírására:
sage: random_matrix(GF(2), 5)
[1 0 0 1 1]
[1 1 1 0 1]
[1 1 1 0 0]
[1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0]
sage: _.det()
1
```

Hány olyan $\mathbb{F}_2^{5 \times 5}$ -beli mátrix van, amelynek determinánsa nem 0? Az első sora bármelyik vektor lehet, kivéve a $\mathbf{0}$ vektort, így $2^5 - 1$ lehetőség van.

A második sor nem lehet ez a vektor és a $\mathbf{0}$ vektor, ez $2^5 - 2$ lehetőség. A harmadik vektor nem lehet az előző két vektor által kifeszített altér, melynek a $\mathbf{0}$ vektorral együtt $2^2 = 4$ eleme van, e vektor kiválasztására tehát $2^5 - 2^2$ lehetőség adódik. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy az összes független vektorötösök – azaz a nemnulla értékű determinánsok – száma $(2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)(2^5 - 2^2)(2^5 - 2^3)(2^5 - 2^4)$. Ha ezt elosztjuk az összes $\mathbb{F}_2^{5 \times 5}$ -beli mátrixok számával, 0.2980-t kapunk, így a determináns 0.7020 valószínűséggel lesz 0.

4.52.

- Egy vektort, mely merőleges a megadott vektorokra, és azzal/azokkal jobbrendszer alkot.
- Segítség: használjuk fel, hogy egy $n - 1$ dimenziós P paralelepipedon térfogata megegyezik annak az n dimenziós Q paralelepipedonnak a térfogatával,

melyet a P -ből úgy kapunk, hogy a P -t kifeszítő vektorokhoz n -edik vektorként egy egységvektort adunk, mely merőleges a többire.

- Pozitív. Ehhez épp az kellett, hogy a bázisvektorokat ne az első, hanem az utolsó sorba vagy oszlopba írjuk.

4.53. Az előző feladat szerint a kért vektort a következőképp kaphatjuk meg:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$$

azaz a negyedik vektor $(0, 0, -1, 1)$. Így a paralelepipedon térfogata $\sqrt{2}$.