

5.1. a), c) Ezek a leképezések mátrixleképezések, így lineárisak, a leképezések mátrixszorzással felírva:

$$\begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

b), d) Az

$$(x, y, z, w) \mapsto (x+y, y+z, 1),$$

$$(x, y, z, w) \mapsto (x+y, y+z, w+1)$$

leképezések a nullvektort nem a nullvektorba viszik, ezek tehát nem lineárisak.

e) Ez két lineáris leképezés kompozíciója, így maga is lineáris.

f) f lineáris leképezés (ld. 5.5. tétel 4) állítása a $k=3$ értékre).

5.2. a) Ez az x -tengellyel $\pi/12$, azaz 15° -ot bezáró egyenesre való tükrözés (ld. 5.9. tétel), ui.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & -\cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}.$$

b) A két forgatás szorzata

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

c) 1. megoldás: Két olyan transzformációt keresünk, melyek egy $(x, y, 1)$ alakú vektort $(x', y', 1)$ alakúba visznek, hisz a $z=1$ egyenletű sík helyben marad. Az ezekhez tartozó mátrixok szorzata adja a választ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. megoldás: Keressük meg három megfelelően kiválasztott lineárisan független vektor képét! Mindhárom mutasson a $z=1$ sík egy pontjába: tekintsük pl. a $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$ vektorokat! Ekkor keressett $\mathbf{T}$ mátrix és a belőlük – mint oszlopvektorokból – képzett mátrix szorzata a vektorok képeiből álló mátrixot adja. Innen kiszámolható $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 & \frac{1}{2} + 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ahonnan egy mátrixinvertálás és szorzás után

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3. Az $[A, B] = AB - BA$ kommutátorleképezés lineáris, hisz lineáris transzformációk szorzata (kompozíciója) és különbsége is lineáris. Másrészt $AB = BA$ pontosan akkor teljesül, ha $[A, B] = AB - BA = O$, ahol O a zérusleképezés.

5.4. A determináns csak az 1×1 -es mátrixokon lineáris, ui. $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezésre $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. $n=1$ esetén a képtér 1 dimenziós, a megter 0 dimenziós, hisz $\det[a] = a$.

A determináns definíciója és soronkénti additívítása igazolja, hogy a determinánsfüggvény a mátrix $n-1$ sorának rögzítése mellett egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely homogén és additív, így lineáris. Ha a determináns rögzített $n-1$ sora között van lineáris összefüggés, akkor a determináns értéke mindig 0, így a képtér 0 dimenziós, a magter n dimenziós. Ellenkező esetben a képtér 1 dimenziós (az egész $\mathbb{R}$), így a magter $n-1$ dimenziós. Ez épp a rögzített $n-1$ vektor által kifeszített tér, hisz ha az n -edik vektor ebbe esik, a determináns értéke 0.

5.5. Egy ilyen könnyű megadni, hisz ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor az $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ közt bijektív, és lineáris, így izomorfizmus. A bijekció igazolásához csak azt kell megmutatni, hogy a sortérnek a nullvektoron kívül nincs olyan $\mathbf{y}$ vektora, melyre $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ volna. Ez igaz, hisz $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. A másik leképezés $\mathbf{A}^\top$, amely ugyan $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{A})$ leképezés, de a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy izomorfizmus, így inverze is az.

5.6. A 3.60. tétel szerint minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként. Tegyük hozzá, e felbontás egyértelmű, hisz ha $\mathbf{S} + \mathbf{F} = \mathbf{S}' + \mathbf{F}'$, ahol $\mathbf{S}$ és $\mathbf{S}'$ szimmetrikus, $\mathbf{F}$ és $\mathbf{F}'$ ferdén szimmetrikus, akkor $\mathbf{S} - \mathbf{S}' = \mathbf{F}' - \mathbf{F}$, azaz egy szimmetrikus mátrix egyenlő egy ferdén szimmetrikussal, ez azonban csak a zérusmátrixra áll fenn, így $\mathbf{S} - \mathbf{S}' = \mathbf{O}$, azaz $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$ és hasonlóan $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. A feladatbeli leképezések tehát egyértelműek.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrixhoz a szimmetrikus, ill. ferdén szimmetrikus részét rendelő $\mathbf{S} : \mathbf{A} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)$, ill. $\mathbf{F} : \mathbf{A} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)$ leképezéseket (ld. 3.60. tétel). Mindkettő lineáris, hisz tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(c\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \frac{1}{2}(c\mathbf{A} + \mathbf{B} + c\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top) \\ &= c\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^\top) \\ &= c\mathbf{S}(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(c\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \frac{1}{2}(c\mathbf{A} + \mathbf{B} - c\mathbf{A}^\top - \mathbf{B}^\top) \\ &= c\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top) + \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}^\top) \\ &= c\mathbf{F}(\mathbf{A}) + \mathbf{F}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Jelölje $\mathcal{S} \leq \mathbb{R}^{n \times n}$ az n -edrendű szimmetrikus mátrixok alterét, és $\mathcal{F} \leq \mathbb{R}^{n \times n}$ az n -edrendű ferdén szimmetrikus mátrixok alterét. Világos, hogy $\mathcal{I}_m(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ és $\mathcal{I}_m(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Ha $\mathbf{S}$ szimmetrikus, $\mathbf{F}$ ferdén szimmetrikus, akkor $\mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{O}$, $\mathbf{F} = \mathbf{O} + \mathbf{F}$ a felbontásuk, így $\mathcal{S}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$, $\mathcal{S}(\mathbf{F}) = \mathbf{O}$, $\mathcal{F}(\mathbf{S}) = \mathbf{O}$, $\mathcal{F}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$. Ebből következik, hogy $\mathcal{Ker}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$, $\mathcal{Ker}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}$. Az $\mathcal{S}$ tér egy bázisát alkotják azok a mátrixok, melyek főátlójában van egy 1-es, egyebütt 0, továbbá azok, melyekben a főátló fölött van egy 1-es, annak főátlóra szimmetrikus helyén ugyancsak, egyebütt 0. E bázis elemszáma $n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = (n+1)n/2$, tehát $\dim \mathcal{S} = (n+1)n/2$. Hasonlóképp $\mathcal{F}$ egy bázisát alkotják azok a mátrixok, melyekben a főátló felett van egy 1-es, annak főátlóra szimmetrikus helyén egy -1 -es. Ezek száma $(n-1) + \dots + 2 + 1 = n(n-1)/2$, így $\dim \mathcal{F} = n(n-1)/2$. (Ld. még 5.31. a) feladat).

5.7. Igen, alteret alkotnak, hisz a 0 nyomú mátrixok halmaza zárt az összeadásra és skalárral szorzásra nézve. Ez egy $n^2 - 1$ dimenziós altér, hisz a képtér 1 dimenziós, a mátrixok tere pedig n^2 dimenziós.

5.8. Az $x + y + z + w = 0$ egyenlet megoldásai

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t-u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E $\mathcal{V}$ vektorteret teret 3 lineárisan független vektor feszíti ki (függetlenségük a 2-dik, 3-dik, 4-dik koordinátákból látható). Így a véges dimenziós terek jellemzéséről szóló 5.28. tétel szerint $\mathcal{V} \simeq \mathbb{R}^3$.

5.9. a) Az $\mathbf{X} \mapsto \text{vec}(\mathbf{X})$ leképezésben a standard bázis $\mathbf{e}_i$ vektorába az $\mathbf{E}_i$ mátrix képződik, ahol $\mathbf{E}_i \mapsto \text{vec}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Az $\mathbf{X}$ mátrixhoz a szimmetrikus összetevőjét rendelő leképezés és mátrixa a vektorizált alakjuk között:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{11} & \frac{x_{12}+x_{21}}{2} \\ \frac{x_{21}+x_{12}}{2} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \frac{x_{21}+x_{12}}{2} \\ \frac{x_{12}+x_{21}}{2} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

b) Az $\mathbf{X}$ mátrixhoz a ferdén szimmetrikus összetevőjét rendelő leképezés és mátrixa a vektorizált alakjuk között:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{11} & \frac{x_{12}-x_{21}}{2} \\ \frac{x_{21}-x_{12}}{2} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \frac{x_{21}-x_{12}}{2} \\ \frac{x_{12}-x_{21}}{2} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

c) Adott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{AX} + \mathbf{XA}$ vektorizált alakja

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \text{vec}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XA} = \begin{bmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} & x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} \\ x_{21}a_{11} + x_{22}a_{21} & x_{21}a_{12} + x_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

Innen a vektorizált alak és a $\mathbf{B}$ mátrix, melyre $\mathbf{B} \text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XA})$:

$$\text{vec}(\mathbf{AX} + \mathbf{XA}) = \begin{bmatrix} 2a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{21}x_{12} \\ a_{21}x_{11} + (a_{11} + a_{22})x_{21} + a_{21}x_{22} \\ a_{12}x_{11} + (a_{11} + a_{22})x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{12}x_{21} + a_{21}x_{12} + 2a_{22}x_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & (a_{11} + a_{22}) & 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 & (a_{11} + a_{22}) & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{21} & 2a_{22} \end{bmatrix}.$$

5.10. Az $\mathcal{S} : \mathbf{X} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T)$ leképezés vetítés, hisz lineáris leképezés (ld. az 5.6. feladatot), és $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$, ui. bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ szimmetrikus, és szimmetrikus mátrix szimmetrikus része önmag, azaz $\mathcal{S}(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$. Hasonlóképp igazolható, hogy az $\mathcal{F} : \mathbf{X} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^T)$ leképezés is vetítés. (A 7.37. feladatban azt is meg fogjuk mutatni, hogy e vetítés merőleges vetítés!)

5.11. 19737656

5.12. 1) Ha a $V = (0, 0, v)$ pontból vetítjük az $X = (x, y, z)$ pontot, és vetülete $X' = (x', y', 0)$, akkor e három pont egy egyenesbe esik, azaz a $\overrightarrow{VX}$ vektor nemnulla konstansszorosa a $\overrightarrow{VX'}$ vektor, vagyis $c(x, y, z - v) = (x', y', -v)$. Innen

$$c = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{-v}{z-v} \leadsto x' = \frac{x}{1 - \frac{z}{v}}, y' = \frac{y}{1 - \frac{z}{v}}.$$

2) Az $(x, y, z) \mapsto (\frac{x}{1 - \frac{z}{v}}, \frac{y}{1 - \frac{z}{v}}, 0)$, de még az $(x, y, z, 1) \mapsto (\frac{x}{1 - \frac{z}{v}}, \frac{y}{1 - \frac{z}{v}}, 0, 1)$ leképezés sem lineáris, mivel z a nevezőben szerepel, de az $1 - \frac{z}{v}$ -vel való beszorzás után kapott $(x, y, 0, 1 - \frac{z}{v})$ homogén koordináták alakkal – mely változatlanul az $(x', y', 0)$ pontot reprezentálja –, lineáris leképezést kapunk, melynek egyszerűen felírható a mátrixa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 - \frac{z}{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) A (v_1, v_2, v) pontból való vetítéshez előbb eltoljuk a teret $(-v_1, -v_2, 0)$ vektorral, így visszavezettük

a feladatot az előzőre, majd a vetületet visszatoljuk. Az eredmény tehát e három transzformációnak megfelelő mátrixok szorzata, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix}$$

E mátrix az $(x, y, z, 1)$ vektort a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_1}{v} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{v_2}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - v_1 \frac{z}{v} \\ y - v_2 \frac{z}{v} \\ 0 \\ 1 - \frac{z}{v} \end{bmatrix}$$

vektorba viszi, mely a

$$P = \left(\frac{x - v_1 \frac{z}{v}}{1 - \frac{z}{v}}, \frac{y - v_2 \frac{z}{v}}{1 - \frac{z}{v}}, 0 \right)$$

pont homogén koordinátás alakja. Tehát P a vetületi vektor. (Világos, hogy csak akkor keletkezik az xy síkon vetület, ha $v \neq z$, ekkor $1 - \frac{z}{v} \neq 0$, tehát oszthatunk vele. Ha $v = z$, akkor a vetület egy végtelen távoli pont lesz melynek homogén koordinátája $(x - v_1, y - v_2, 0, 0)$.)

5.13. a) Igaz. b) Igaz, a nyom invariáns a hasonlóságra. c) Hamis, pl. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tehát $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, de a két mellékátlóbeli összeg különböző. d) Hamis. e) Igaz, ez épp a rang, ami invariáns a hasonlóságra.

5.14. a) E feladat megoldásához egyelőre a természetes geometriai képzeletünkre hagyatkozunk, később azonban alaposan megvizsgáljuk a lineáris algebra eszközeivel is az itt felmerülő kérdéseket az ortogonális mátrixokról szóló részben (ld. 7.66. definíció). Vegyük észre, hogy a $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ vektor hossza 3, és az $\frac{1}{3}(2, 1, -2)$, $\frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$ vektorok ortonormált bázist alkotnak, azaz egymásra merőleges egységvektorok. Ráadásul a harmadik vektor a megadott $\mathbf{v}$ vektorral egyirányú. Az e vektorokból mint sorvektorokból képzett

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix az $\frac{1}{3}\mathbf{v}$ vektort a $(0, 0, 1)$ vektorba képzi. A z-tengely körüli, és így a $(0, 0, 1)$ vektort helyben hagyó 60° -os forgatás mátrixa (ld. 5.10. példa):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Így a $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{FQ}$ mátrix lesz a $\mathbf{v}$ vektor egyenesre körüli forgatás mátrixa. Vegyük észre még, hogy mivel $\mathbf{Q}$ sorvektorai páronként merőleges egységvektorokból állnak, a $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{Q}$ inverze megegyezik a transzponáltjával. A keresett mátrix tehát

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{FQ} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} & \frac{13}{18} & \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{9} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{9} & \frac{13}{18} \end{bmatrix}.$$

b) Ha az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vetítünk, akkor e sík vektorai helyben maradnak, pl. a síkot kifeszítő $(1, -1, 0)$ és $(1, 0, -1)$ vektorok. Ugyanakkor ha a $(2, 1, 2)$ irányvektorú egyenes mentén vetítünk, akkor e vektor képe a zérusvektor. Van tehát három független vektorunk, melyekről tudjuk, hogy a P vetítés, illetve annak $\mathbf{P}$ mátrixa melyiket hova viszi:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E vektorokból képzett mátrixokra és a vetítés $\mathbf{P}$ mátrixára tehát

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan kifejezhető $\mathbf{P}$ egy invertálás után:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Az előző ponthoz hasonlóan itt is ugyanazok a vektorok választhatók bázisvektoroknak, de itt a síkot kifeszítő vektorok képe lesz a nullvektor, azaz a leképezés

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

E vektorokból képzett mátrixokra és a vetítés $\mathbf{P}$ mátrixára tehát

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ahonnan kifejezhető $\mathbf{P}$ egy invertálás után:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésül beszorozhatjuk e mátrixot a három bázisvektorral.

5.15. E lineáris leképezés megadásához elég megadni egy bázis képét. Mivel $\dim(\mathcal{K}er A) = 3$, ezért három bázisvektornak kell a nullvektorba, másik kettőnek két független vektorba képződnie. Például legyen a leképezés a következő:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{0}, \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{0}, \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{0},$$

ahol $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ az $\mathbb{R}^5$, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ az $\mathbb{R}^3$ standard bázisa. E leképezésre $\mathcal{K}er A = \text{span}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5)$, $\mathcal{I}m A = \text{span}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$. Így a leképezés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.16. A mátrix a standard bázisvektorok képvektoraiból áll, azaz $[\mathbf{e}_n | \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_{n-1}]$, kifejtve

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.17. Az áttérés mátrixai permutáló mátrixok. Permutáló mátrix inverze a transzponáltja, és a permutáló mátrixszal való balról szorzás a sorokat, míg a transzponáltjával való jobbról szorzás az oszlopokat transzformálja, így ugyanazt a permutációt kell a sorokon és az oszlopokon is végrehajtani. Tehát a

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

jelölésekkel $\mathbf{A}_B = \mathbf{B}_{B \leftarrow \mathcal{E}} \mathbf{A}_{\mathcal{E}} \mathbf{B}_{\mathcal{E} \leftarrow B}$, azaz

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 44 & 45 & 43 & 41 & 42 \\ 54 & 55 & 53 & 51 & 52 \\ 34 & 35 & 33 & 31 & 32 \\ 14 & 15 & 13 & 11 & 12 \\ 24 & 25 & 23 & 21 & 22 \end{bmatrix},$$

és hasonlóképp

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 33 & 31 & 32 & 35 & 34 \\ 13 & 11 & 12 & 15 & 14 \\ 23 & 21 & 22 & 25 & 24 \\ 53 & 51 & 52 & 55 & 54 \\ 43 & 41 & 42 & 45 & 44 \end{bmatrix}.$$

5.18. Az eredmények:

$$a) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, b) \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Az $\mathbf{i} = (1, 0)$ képét megkaphatjuk pl. az $y = 2x$ és a rá merőleges és az $(1, 0)$ ponton átmenő $y =$

$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ egyenesek metszéspontjának meghatározásával: $(x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. A $\mathbf{j} = (0, 1)$ képe hasonlóképp az $y = 2x$ és a rá merőleges és az $(0, 1)$ ponton átmenő $y = -\frac{1}{2}x + 1$ egyenesek metszéspontjába mutat: $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$. A válasz e két vektorból mint oszlopvektorból képzett mátrix lesz.

b) Az a) feladatban megkapott mátrixból a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérés mátrixával számolható:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B &= \mathbf{T}_{B \leftarrow \mathcal{E}} \mathbf{P}_{\mathcal{E}} \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Bár itt is számolhatnánk az áttérés mátrixával, de egyszerűbb fejben számolni! Az $y = 2x$ egyenesre való merőleges vetítés nyilván helyben hagyja az első bázisvektort, és a rá merőleges másodikat a $\mathbf{0}$ -ba viszi! Így a vetítés mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.19. A $3\mathbf{I}$ mátrix nem hasonló a másik kettőhöz, azok viszont hasonlóak egymáshoz. Ezt pl. úgy igazoljuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

egyenletben a mátrixszorzások elvégzése után kapott négyismeretlenes egyenletrendszernek kiválasztjuk egy megoldását, és ellenőrizzük, hogy invertálható mátrixot adnak-e. Az

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix például megfelel.

A másik esetben a

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

egyenlet kifejtve a

$$\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

egyenlőségre vezet, amiből $c = d = 0$, az $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix viszont biztosan nem invertálható, tehát a két mátrix nem hasonló.

5.20. A hasonlóságot igazolja az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi + i \sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi - i \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.21. A $\mathcal{B} = \{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}, \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{x}, \dots, \mathbf{A}^2\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a

$$c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} + c_{n-2}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{x} + \dots + c_1\mathbf{A}\mathbf{x} + c_0\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (*)$$

csak $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ esetén áll fenn. Szorozzuk be a (*) egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{n-1}$ -nel, kapjuk hogy $c_0\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $c_0 = 0$. Ezután szorozzuk be (*) mindkét oldalát $\mathbf{A}^{n-2}$ -nel. Kapjuk, hogy $c_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ahonnan $c_1 = 0$. Az $\mathbf{A}$ csökkenő kitevőjű hatványaival tovább folytatva a beszorzást, sorban kapjuk, hogy az összes c_i együttható 0, tehát a vektorok függetlenek, így $\mathcal{B}$ bázis. Legyen tehát $\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}, \dots, \mathbf{b}_{n-1} = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}$. Az $\mathbf{A}$ mátrix hatása e bázison: $\mathbf{A}\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1}$, ahol $i = 0, 1, \dots, n-2$. Így $\mathbf{A}$ mátrixa e bázisban

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint minden n -edrendű n indexű nilpotens mátrix hasonló $\mathbf{N}$ -hez. A hasonlóság tranzitív, így bármely két n -edrendű n indexű nilpotens mátrix hasonló egymáshoz.

5.22. Az 5.15. tétel szerint egy P lineáris transzformáció pontosan akkor vetítés, ha $P^2 = P$, és ekkor P az $\mathcal{I}m P$ -re vetít $\mathcal{Ker} P$ mentén. Ha a $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vetítés mátrixa $\mathbf{P}$, akkor P az $\mathcal{Ker}(P) = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ mentén vetít $\mathcal{I}m(P) = \mathcal{O}(\mathbf{P})$ -re, ahol $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathbb{R}^n$. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ egy bázisa, $\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ a $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ egy bázisa. E vektorokra $\mathbf{P}\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$, ha $i \leq r$, és $\mathbf{P}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, ha $i > r$. Így a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bázisban a $\mathbf{P}$ mátrixa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Mivel e mátrix nyoma r , és a nyom invariáns a hasonlóságra nézve, ezért minden r rangú vetítőmátrix nyoma r .

5.23. Ha $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{C}$, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{X} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{X} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

5.24. Az áttérések mátrixait és az 5.18. a) feladat eredményét is használva:

$$\begin{aligned} a) & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ b) & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.25. Először megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ugyanannak az L lineáris leképezésnek a mátrixai, akkor azonos a rangjuk. Ehhez legyen $\mathbb{R}^n$ két bázisa $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, $\mathbb{R}^m$ két bázisa $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$, legyenek az áttérések mátrixai $\mathbf{V}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}}$ és $\mathbf{W}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}$ továbbá legyen $[\mathbf{L}]_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{A}$

és $[\mathbf{L}]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{B}$. Végül legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor, $\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ és e vektorok koordinátás alakjai legyenek $\mathbf{x}_{\mathcal{A}}, \mathbf{x}_{\mathcal{B}}, \mathbf{y}_{\mathcal{A}'}, \mathbf{y}_{\mathcal{B}'}$. A mátrixok közti kapcsolat leolvasható az alábbi diagramról:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\mathbf{B} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}} & \mathbf{y}_{\mathcal{B}'} \\ \mathbf{V}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}} \uparrow & & \downarrow \mathbf{W}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} \\ \mathbf{x}_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\mathbf{A} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}}} & \mathbf{y}_{\mathcal{A}'} \end{array}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} &= \mathbf{V}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}} \mathbf{x}_{\mathcal{A}}, & \mathbf{y}_{\mathcal{B}'} &= \mathbf{W}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} \mathbf{y}_{\mathcal{A}'}, \\ \mathbf{y}_{\mathcal{A}'} &= \mathbf{L}_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} \mathbf{x}_{\mathcal{A}}, & \mathbf{y}_{\mathcal{B}'} &= \mathbf{L}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{L}]_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{W}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} [\mathbf{L}]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{V}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}} \\ &= \mathbf{W}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Használjuk a szorzat rangjára vonatkozó becslést (3.22. tétel). Mivel a szorzat rangja legfeljebb annyi, mint bármelyik tényezőjéé, ezért

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) &= r(\mathbf{W}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}) \leq r(\mathbf{B}), \\ r(\mathbf{B}) &= r(\mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-1}) \leq r(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Így $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. Innen még a nullítások azonossága is adódik:

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B})).$$

Megmutatjuk, hogy ha $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r$, akkor van olyan L lineáris leképezés és két bázispár, melyekben L mátrixa $\mathbf{A}$, ill. $\mathbf{B}$. Ehhez $\mathbf{A}$ -t és $\mathbf{B}$ -t is elemi sor- és oszlopműveletekkel hozzuk

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

alakra. Az elemi sorműveletek elemi mátrixokkal való balról szorzással, míg az oszlopműveletek jobbról szorzással is elvégezhetők. Az elemi mátrix, és így szorzatuk is invertálható, így azt kapjuk, hogy vannak olyan elemi mátrixok szorzataként kapott $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ mátrixok, hogy

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{A} \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3 \mathbf{B} \mathbf{E}_4,$$

amiből

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \mathbf{E}_3 \mathbf{B} \mathbf{E}_4 \mathbf{E}_2^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V},$$

ahol $\mathbf{W} = \mathbf{E}_3^{-1} \mathbf{E}_1$, $\mathbf{V} = \mathbf{E}_4 \mathbf{E}_2^{-1}$. Legyen L az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ mátrixleképezés, és a két bázispár egyike legyen a standard $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ bázispár. E bázispárban L mátrixa

épp **B**. A másik bázispár legyen a **V** és **W** oszlopvektoraiból álló **C**, **D** bázispár. Ekkor az áttérések mátrixai épp $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{C}}$ és $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{D}}$, és így

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\mathbf{L}]_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} = \mathbf{W}_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} [\mathbf{L}]_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{E}_n} \mathbf{V}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{A}} \\ &= \mathbf{W}_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{A}}.\end{aligned}$$

Ezt szemlélteti az alábbi diagram is.

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{B} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{E}_n} & \\ \mathbf{V}_{\mathcal{E}_n \leftarrow \mathcal{A}} \uparrow & \mathbf{x}_{\mathcal{E}_n} \xrightarrow{\quad} \mathbf{y}_{\mathcal{E}_m} & \downarrow \mathbf{W}_{\mathcal{E}_m \leftarrow \mathcal{A}'}^{-1} \\ & \mathbf{x}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\quad} \mathbf{y}_{\mathcal{A}'} & \\ & \mathbf{A} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}} & \end{array}$$

5.26. Az érvényes koordináták tartománya korlátos, így a skalárral szorzás és az összeadás művelete is kivezet belőle, vagyis nem vektortér.

5.27. 1) Minden vektortérnek egyetlen zéruseleme van, ui. ha $\mathbf{0}$ és $\mathbf{0}'$ is zéruselem, akkor $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$, azaz $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

2) Minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vektornak egyetlen additív inverze van: $(-1)\mathbf{u}$, ui. ha $\mathbf{v}$ additív inverz, azaz $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + (-1)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}.\end{aligned}$$

3) Ha valamely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Adjunk ui. az $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$ mindkét oldalához $-\mathbf{u}$ -t. Ekkor $-\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{u}$, azaz $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

4) Ha $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, akkor mindkét oldalához $-\mathbf{u}$ -t adva $-\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{w}$, így $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

5) Ha $c \in \mathbb{F}$ és $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, akkor $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$ pontosan akkor áll fenn, ha $c = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

M2 szerint $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Legyen $\mathbf{u}$ egy tetszőleges vektor. Ekkor $c\mathbf{u} + c\mathbf{0} = c(\mathbf{u} + \mathbf{0}) = c\mathbf{u}$, amiből a 3) állítás szerint $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ezzel igazoltuk, hogy ha $c = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Ezután igazoljuk, hogy ha $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, akkor $c = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy $c \neq 0$. Ekkor c^{-1} létezik, így

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = (c^{-1}c)\mathbf{u} = c^{-1}(c\mathbf{u}) = c^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

6) Az 5.48. definícióbeli A1 igazolása a többi kiköteből:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= -\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v} - \mathbf{v} \\ &\stackrel{D2}{=} -\mathbf{u} + (1+1)\mathbf{u} + (1+1)\mathbf{v} - \mathbf{v} \\ &\stackrel{D1}{=} -\mathbf{u} + (1+1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} \\ &\stackrel{D2}{=} -\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}.\end{aligned}$$

7) M3 kicserélhető A4-re:

(M3 $\Rightarrow$ A4) $\forall \mathbf{u} : \mathbf{0} = 0\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$.

(A4 $\Rightarrow$ M3) $0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$. Mivel A4 szerint $0\mathbf{u}$ -hoz van olyan $\mathbf{v}$, hogy $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + \mathbf{v}$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0\mathbf{u} + \mathbf{v} \\ &= (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} \\ &= 0\mathbf{u}.\end{aligned}$$

5.28. Ellenőrizzük a vektortér axiómáit.

a) Az $\mathbb{R}$ test, így $u, v \in \mathbb{R}_Q$ esetén $u + v \in \mathbb{R}_Q$, és $u \in \mathbb{R}_Q, q \in \mathbb{Q}$ esetén $qu \in \mathbb{R}_Q$, tehát a két művelet nem vezet ki $\mathbb{R}_Q$ -ból. Másrészt a vektortér axiómák mindegyike azonnal következik a testaxiómákból (pl. az $\mathbb{R}_Q$ -beli összeadás kommutatív és asszociatív, mivel az $\mathbb{R}$ -ben mint testben azok...). Így $\mathbb{R}_Q$ vektortér.

b) Az $\mathcal{U} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz valós számokból áll, így $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$. E halmaz nem üres (pl. $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathcal{U}$). Ha $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tetszőleges racionális számok, azaz $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathcal{U}$ két tetszőleges eleme $\mathcal{U}$ -nak, és $q \in \mathbb{Q}$ tetszőleges racionális szám, akkor

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathcal{U} \\ q(a + b\sqrt{2}) &= qa + qb\sqrt{2} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Az első egyenlőség azt igazolja, hogy $\mathcal{U}$ zárt az összeadásra, míg a második azt, hogy zárt a skalárral szorzásra nézve. Tehát $\mathcal{U} \leq \mathbb{R}_Q$, azaz $\mathcal{U}$ vektortér, és altere az $\mathbb{R}_Q$ vektortérnek.

c) Minden test vektortér önmaga fölött, így $\mathbb{C}$ is. Az $a + ib \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$ művelettartó az összeadásra és a valós skalárral való szorzásra nézve, bijektív, tehát izomorfizmus $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ és $\mathbb{R}^2$ között. (Tehát $\mathbb{C}$ önmaga fölött egy 1 dimenziós tér, bázisa bármely nemnulla komplex szám, míg $\mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött 2 dimenziós, és az egyik bázisa $\{1, i\}$.)

5.29. a) Ha a mindkét irányban végtelen sorozatokban nincs jelölve, hogy melyik elem számít 0 indexűnek, akkor az összeadás nem értelmezhető, így nem alkotnak vektorteret, ha viszont jelölve van, akkor igen.

b) $\mathbb{Z}$ nem test, az egészelemű sorozatok nem alkotnak vektorteret.

c) Igen.

d) Igen. Egyedül az összeadásra való zártságot kell ellenőrizni, a konstanssal való szorzás nyilvánvaló, hisz az egyetlen nemnulla konstans az 1.

e) Igen. $\mathcal{V}$ a megadott műveletekkel vektortér, minden axióma teljesül. Az összeadás kommutativitása és asszociativitása a szorzás azonos tulajdonságai miatt teljesül, zérusvektor az $(1, 1)$ pont, melyre

$$\mathbf{0} + (x, y) = (1, 1) + (x, y) = (1x, 1y) = (x, y),$$

és

$$\mathbf{0}(x, y) = (x^0, y^0) = (1, 1),$$

de hasonlóan egyszerűen igazolható a többi axióma is, például

$$\begin{aligned} c(d(x, y)) &= c(x^d, y^d) = ((x^d)^c, (y^d)^c) \\ &= (x^{cd}, y^{cd}) = (cd)(x, y), \\ 1(x, y) &= (x^1, y^1) = (x, y), \\ (c + d)(x, y) &= (x^{c+d}, y^{c+d}) = (x^c x^d, y^c y^d) \\ &= (x^c, y^c) + (x^d, y^d) = c(x, y) + d(x, y). \end{aligned}$$

5.30. a) Az 1 nyomú mátrix c -szeresének nyoma c , tehát e halmaz nem zárt a skalárszorozásra, nem altér.

e) Az $y''(x) + y(x) = 2x$ egyenletet nem elégíti ki a zérusfüggvény, tehát e differenciálegyenletet kielégítő függvények nem alkotnak alteret.

b), c), d) Az összes többi esetben látható, hogy a feltételt kielégítő elemek összege és skalárszorosa is a megadott részhalmazba tartozik, és a zérusfüggvény, ill. a zérusmátrix is eleme a részhalmaznak, tehát mindegyikük altér.

5.31. Mindhárom esetben kiegészítő alterekről van szó, ami annak ellenőrzésével igazolható legegyszerűbben, hogy a tér minden eleme egyértelműen áll elő a két altérbeli elem összegeként. Ez igaz

- a) $\mathbb{R}^{n \times n}$ minden mátrixára, mert azok egyértelműen állnak elő egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként (ld. 3.60. tétel és 5.6. feladat),
- b) minden – az egész számegegyenesen értelmezett – valós függvény egyértelműen áll elő egy páros és egy páratlan függvény összegeként,
- c) a tér minden vektora egyértelműen bontható fel egy síkba és egy vele nem párhuzamos egyenesbe eső vektor összegére $\mathbb{R}^3$ -ben.

5.32. a) Az $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ hat permutáló mátrixa lineárisan összefüggő, ui. az 1-determinánsúak és a -1 -determinánsúak összege is az egyesekből álló mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

így ezek különbsége a zérusmátrix, azaz van nemtriviális lineáris kombináció, mely a zérusmátrixot adja.

b) A $\cos(x)$ és a $\cos(2x)$ függvények a differenciálható függvények terében lineárisan függetlenek. Ha ui. lineárisan összefüggők lennének, akkor bármely $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ pontokban fölvetett értékeik vektorai is összefüggők lennének. E három függvény $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$ helyeken fölvetett értékeinek vektorai

	$\cos(x)$	$\cos(2x)$
$x_1 = 0 :$	1	1
$x_2 = \frac{\pi}{2} :$	0	-1

E két vektor pedig független. De kiszámolhatjuk a Wronski-determinánsukat is, mely egy másik megoldást ad e feladatra:

$$\begin{aligned} W(\cos(x), \cos(2x)) &= \begin{vmatrix} \cos(x) & \cos(2x) \\ -\sin(x) & -2\sin(2x) \end{vmatrix} \\ &= -2\sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \neq 0, \end{aligned}$$

hisz pl. az értéke $\pi/2$ -ben -1 .

c) Az $x^2 + 1$, $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$ polinomok ugyan-csak lineárisan függetlenek. Ez háromféleképp is igazolható. 1. Az együtthatók vektorai $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, amik függetlensége a polinomok függetlenségét is bizonyítja. 2. Az előző kérdéshez hasonlóan kereshetünk három olyan helyet, melyben fölvetett értékeik vektorai függetlenek:

	$x^2 + 1$	$x^2 + x$	$x^2 + x + 1$
$x_1 = 0 :$	1	0	1
$x_2 = 1 :$	2	2	3
$x_3 = -1 :$	2	0	1

E három vektor pedig független, hisz a belőlük képzett determináns értéke $-2 \neq 0$. 3. Kiszámolhatjuk a Wronski-determinánsukat, amely ha legalább egy pontban nem 0, akkor a függvények lineárisan függetlenek:

$$\begin{aligned} W(x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1) &= \begin{vmatrix} x^2 + 1 & x^2 + x & x^2 + x + 1 \\ 2x & 2x + 1 & 2x + 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \end{aligned}$$

ami egyetlen pontban sem 0.

5.33. Mint az 5.59. tételben megfogalmaztuk, megmutatjuk, hogy a

$$B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^{**}, \text{ ahol } (B\mathbf{v})\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{v})$$

leképezés megadja a két tér közti izomorfizmust.

Először megmutatjuk, hogy $B\mathbf{v} : \mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{F}$ lineáris leképezés, azaz $B\mathbf{v} \in \mathcal{V}^{**}$. Legyen $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \in \mathcal{V}^*$ és $c \in \mathbb{F}$. Ekkor

$$\begin{aligned} B\mathbf{v}(c\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*) &= (c\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^*)(\mathbf{v}) \\ &= c\mathbf{x}^*(\mathbf{v}) + \mathbf{y}^*(\mathbf{v}) \\ &= cB\mathbf{v}(\mathbf{x}^*) + B\mathbf{v}(\mathbf{y}^*). \end{aligned}$$

Ezután belátjuk, hogy $B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^{**}$ lineáris. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

$$B(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cB\mathbf{x} + B\mathbf{y}.$$

Ehhez elég azt igazolni, hogy tetszőleges $\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*$ funkcionálban az egyenlőség bal és jobb oldalán álló függvény azonos értéket vesz fel:

$$\begin{aligned} (B(c\mathbf{x} + \mathbf{y}))(\mathbf{v}^*) &= \mathbf{v}^*(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= c\mathbf{v}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^*(\mathbf{y}) \\ &= c(B\mathbf{x})(\mathbf{v}^*) + (B\mathbf{y})(\mathbf{v}^*) \\ &= (cB\mathbf{x} + B\mathbf{y})(\mathbf{v}^*). \end{aligned}$$

B injektivitásához elég megmutatni, hogy $B\mathbf{v} = \mathbf{0}^{**}$ csak $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ esetén áll fenn.

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} = \mathbf{0}^{**} &\leadsto \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{V}^* : (B\mathbf{v})(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}^{**}(\mathbf{x}^*) \\ &\leadsto \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{V}^* : \mathbf{x}^*(\mathbf{v}) = 0. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ez végtelen dimenziós esetben a kiválasztási axióma alkalmazásával bizonyítható, itt csak a véges dimenziós esetet mutatjuk meg. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Mivel egy lineáris leképezést elég megadni egy bázis elemein, válasszunk olyan bázist, melynek egyik vektora $\mathbf{v}$, és legyen $\mathbf{x}^*(\mathbf{v}) = 1$, $\mathbf{x}^*$ értéke a többi bázisvektorban tetszőlegesen megadható.

Végül véges dimenziós esetben tudjuk, hogy injektív lineáris leképezés azonos dimenziójú terek között bijekció, és $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}^{**}$. Ez bizonyítja, hogy $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^{**}$.

5.34. a), b), c), d) Az M_h , A , J_s és $\mathcal{L}$ leképezés lineáris, mivel bármely $f, g \in C_{[a,b]}^0$ (d) esetén $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = [0, \infty)$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} M_h(cf + g) &= (cf + g)h = cfh + gh \\ &= cM_h(f) + M_h(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(cf + g) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (cf + g) \\ &= c \frac{1}{b-a} \int_a^b f + \frac{1}{b-a} \int_a^b g \\ &= cA(f) + A(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_s(cf + g) &= \int_a^b (cf + g)s = c \int_a^b fs + \int_a^b gs \\ &= cJ_s(f) + J_s(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(cf(t) + g(t)) &= \int_0^\infty (cf(t) + g(t)) \\ &= c \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st} dt \\ &= c\mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)). \end{aligned}$$

e) T nem lineáris, hisz például nem homogén, ui.

$$T(-f) = \int_a^b |-f| = \int_a^b |f| \neq - \int_a^b |f| = -T(f).$$

5.35. A D -nek bal inverze J , vagy J -nek jobb inverze D , mivel

$$(D \circ J)(f(x)) = \left(\int_a^x f \right)' = f(x),$$

de

$$(J \circ D)(f(x)) = \int_a^x f' = f(x) - f(a) \neq f(x).$$

De ha csak azon $f \in C_{[a,b]}^1$ függvényeket tekintjük, melyekre $f(a) = 0$, akkor ezen az altéren D és J inverzei egymásnak, hisz

$$(J \circ D)(f(x)) = \int_a^x f' = f(x).$$

5.36. Mindegyik rendszer lineáris, hisz

a) az

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_0(x)$$

leképezés lineáris, mivel a D^k deriválás-operátor folytonos függvényre vett szorzata és ezek összege lineáris leképezés.

b) egy függvényhez deriváltjainak adott lineáris kombinációját rendelő leképezés lineáris, egy függvényhez a 0-ban (vagy a deriváltja 0-ban) felvett értékét rendelő leképezés lineáris (ld. Dirac-delta), így a belőlük képzett rendezett hármas is lineáris leképezés, tehát a megadott kezdetiérték-probléma az

$$L : y(x) \mapsto \begin{bmatrix} y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) \\ y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

leképezés mellett az

$$L(y(x)) = \begin{bmatrix} h(x) \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

alakot veszi fel. Itt $\mathcal{V}$ lehet pl. az $\mathbb{R}$ -en kétszer folytonosan differenciálható függvények $C_{\mathbb{R}}^2$ tere, míg $\mathcal{W} = C_{\mathbb{R}}^0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Másik értelmezési lehetőséget kapunk e feladatra, ha a vektorteret szűkítjük le azon kétszer folytonosan differenciálható függvényekre, melyekre $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$. Ekkor $\mathcal{W} = C_{\mathbb{R}}^0$.

c) az

$$L : y(t) \mapsto \int_0^\infty y(t)e^{-xt} dt$$

leképezés lineáris, így az

$$\int_0^\infty y(t)e^{-xt} dt = h(x)$$

egyenlet lineáris rendszer.

5.37. Először tegyük fel, hogy az összeg direkt összeg, és tekintsük a kiválasztott $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) vektorok összegét: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i$. A $\mathbf{v}$ vektor ezen előállítására egyértelmű, hisz direkt összegekről van szó, így ha a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan összefüggők lennének, azaz valamelyikük kifejezhető lenne a többi lineáris kombinációjaként, akkor találnánk másik előállítását is $\mathbf{v}$ -nek. Ellentmondás.

Ezután tegyük fel, hogy az összeg nem direkt összeg, azaz van olyan $\mathbf{v}$ vektor, melynek két különböző összegként való előállítása is létezik:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i, \quad (\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i \in \mathcal{V}_i).$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^k (\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i) = \mathbf{0},$$

ahol a $\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i \in \mathcal{V}_i$ és legalább egyike e különbségeknek nem $\mathbf{0}$, így nem függetlenek.

5.38. $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ függvény bilineáris, azaz lineáris mindkét változójában, ugyanis

$$\begin{aligned} b(\mathbf{cu} + \mathbf{v}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{cu} + \mathbf{v})^T \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{cu}^T \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{y} \\ &= cb(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{y}), \\ b(\mathbf{x}, \mathbf{cu} + \mathbf{v}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}(\mathbf{cu} + \mathbf{v}) = c\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{v} \\ &= cb(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ha b bilineáris és $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{e}'_j$, ahol $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ az $\mathbb{R}^m$ standard bázisa, akkor

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n x_i b(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) & \dots & b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}'_1) & \dots & b(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}'_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.39. a) $\mathcal{P} \simeq \mathbb{R}^n$, az izomorfizmus lehet a

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

leképezés. Másrészt a

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (*)$$

kifejezésbeli mátrix Vandermonde-mátrix – jelölje $\mathbf{X}$ –, mely invertálható, hisz determinánsa csak akkor lenne 0, ha az x_i értékek között lennének azonosak. A J leképezésben a $\mathcal{P}$ helyett a vele izomorf $\mathbb{R}^n$ -beli $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ vektorokkal kifejezve az integrál értékét:

$$\begin{aligned} J(p) &= \int_a^b a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} dx \\ &= \left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} \right]_a^b \\ &= \begin{bmatrix} b-a & \frac{b^2-a^2}{2} & \dots & \frac{b^n-a^n}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Így a (*) egyenletből kifejezve a polinom együtthatóit kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a & \frac{b^2-a^2}{2} & \dots & \frac{b^n-a^n}{n} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1}.$$

b) Jelölje $\mathcal{P}$ az n -nél kisebb fokú polinomok n dimenziós vektorterét és legyen

$$P_i : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}; p \mapsto p(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

P_i eleme $\mathcal{P}$ duális terének, hisz lineáris funkcionál. Megmutatjuk, hogy lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_n P_n = 0,$$

ahol 0 jelöli a zérusfunkcionált. Értékeljük ki mindkét oldalt egy tetszőleges $\mathcal{P}$ -beli p polinomban. Kapjuk, hogy

$$c_1 p(x_1) + c_2 p(x_2) + \dots + c_n p(x_n) = 0. \quad (**)$$

Tekintsük a következő polinomokat (melyek egyébként $\mathcal{P}$ bázisát adják):

$$e_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j).$$

Mivel $e_i(x_j) = 0$, ha $i \neq j$ és $e_i(x_i) \neq 0$, továbbá p foka legfeljebb $n-1$, ezért a $p = e_i$ helyettesítéssel (**) egyenletből a következőt kapjuk:

$$c_1 e_i(x_1) + c_2 e_i(x_2) + \dots + c_i e_i(x_i) + \dots + c_n e_i(x_n) = 0,$$

amiből $c_i = 0$. Így az P_i függvények lineárisan függetlenek $\mathcal{P}^*$ -ban, és mivel $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{P}^* = n$, ezért egyúttal bázist is alkotnak. Akkor viszont bármely lineáris $L \in \mathcal{P}^*$ funkcionál kifejezhető az P_i -k lineáris kombinációjaként, így a tételbeli integrállal definiált J funkcionál is.

5.40. a) $\delta(c\varphi + \psi) = c\varphi(0) + \psi(0) = c\delta(\varphi) + \delta(\psi)$, ahol $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$, $c \in \mathbb{R}$, tehát δ lineáris. Folytonos is, hisz ha $\varphi_n \rightarrow \varphi$, akkor $\varphi_n(0) \rightarrow \varphi(0)$.

b) $T'_H(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} H\varphi' = -\int_0^{\infty} \varphi' = [\varphi]_0^{\infty} = \varphi(0) = \delta(\varphi)$.

c) $1 + (2x-1)H(x-1) + 2\delta(x-1)$.

d) Az $L'(\varphi) = -L(\varphi')$ ismételt alkalmazásával.

e) (a) $\sin x - H(x-\pi) \sin x$,

(b) $\sin x - H(x-\frac{\pi}{2}) \cos x$,

(c) $H(\frac{\pi}{2}-x)(\sin x - 1) + 1$.

5.41. a) Egy valós $\mathbf{D}$ diád $\mathbf{D} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = [u_i v_j]$ alakú mátrix, aminek nyoma $\text{tr } \mathbf{D} = \sum_i u_i v_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. A $\mathbf{D}$ mátrix oszloptere $\mathcal{O}(\mathbf{D}) = \mathcal{O}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \text{span}(\mathbf{u})$, így e tér egy $\mathbf{cu}$ vektorának képe

$$\mathbf{D}(\mathbf{cu}) = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T)(\mathbf{cu}) = \mathbf{cu}(\mathbf{v}^T \mathbf{u}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{D} \mathbf{cu},$$

tehát az oszloptér vektorait e mátrix az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\mathbf{D})$ -szeresébe viszi.

b) Minden ilyen $\mathbf{P}$ vetítőmátrix hasonló egy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

mátrixhoz, melynek nyoma $\text{tr}(\mathbf{P}) = k$, a képtér dimenziója.

c) Az $\mathbb{R}^{n \times n}$ tér standard bázisa az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixokból áll, melyekben az i -edik sor j -edik eleme 1, a többi 0. Mivel minden $1 \leq i, j, k, l \leq n$ indexre

$$\mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} = \begin{cases} \mathbf{O}, & \text{ha } j \neq k, \\ \mathbf{E}_{il}, & \text{ha } j = k, \end{cases}$$

ezért $i \neq j$ esetén $\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{1j}$, így az $L(\mathbf{XY}) = L(\mathbf{YX})$ képlet szerint

$$L(\mathbf{E}_{ij}) = L(\mathbf{E}_{i1} \mathbf{E}_{1j}) = L(\mathbf{E}_{1j} \mathbf{E}_{i1}) = L(\mathbf{O}) = 0.$$

Másrészt $L(\mathbf{E}_{ii}) = L(\mathbf{E}_{i1}\mathbf{E}_{1i}) = L(\mathbf{E}_{1i}\mathbf{E}_{i1}) = L(\mathbf{E}_{11})$.
Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy tetszőleges mátrix. Ekkor

$$\begin{aligned} L(\mathbf{A}) &= L\left(\sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} L(\mathbf{E}_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} L(\mathbf{E}_{ii}) = L(\mathbf{E}_{11}) \operatorname{tr}(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

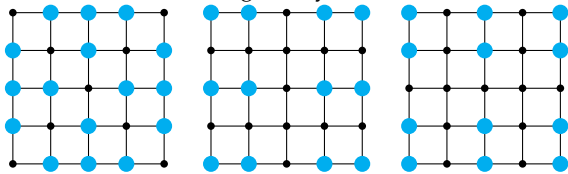
$L(\mathbf{I}) = L(\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22} + \dots + \mathbf{E}_{nn}) = nL(\mathbf{E}_{11})$, másrészt
 $L(\mathbf{I}) = n$, így $L(\mathbf{E}_{11}) = 1$, tehát $L = \text{tr}$.

5.42. a) Az L homogén, mivel $\mathbb{F}_2$ -ben csak két elem van, a 0 és az 1, így $L(c\mathbf{M}) = cL(\mathbf{M})$ fennáll minden c -re. Az $L(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = L(\mathbf{M}) + L(\mathbf{N})$ is teljesül, hisz pontosan azok a lámpák gyulladnak fel, amelyek páratlan sok szomszédját megnyomjuk. Az $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ mátrixban egy pozíció szomszédaiban lévő 1-esek száma pedig azonos paritású az $\mathbf{M}$ -beli szomszédos 1-esek és $\mathbf{N}$ -beli szomszédos 1-esek száma összegének paritásával.

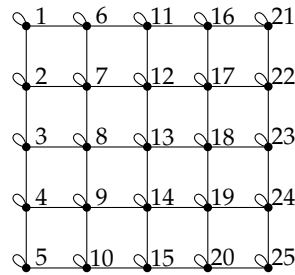
b) Az L lineáris leképezés, és a játék megoldásán az $L(\mathbf{M}) = \mathbf{1}_{5 \times 5}$ megoldását értjük, ahol $\mathbf{M}$ az ismeretlen. Ha „lényegében” csak az ábrázolt minta – és így a hozzá tartozó $\mathbf{M}$ – az egyetlen megoldás, akkor annak négy elforgatottja is. Eszerint a megoldások halmaza 4 elemű, így a nulltér is. A nulltér elemei azokat az $\mathbf{N}$ mátrixokat tartalmazzák, melyekre $L(\mathbf{N}) = \mathbf{0}_{5 \times 5}$, azaz amely szerinti gombok megnyomása után visszakapjuk a lámpák eredeti állapotát. Ezeket megkapjuk, ha az $\mathbf{M}$ -et és három további elforgatottját kivonjuk $\mathbf{M}$ -ből. De F_2 -ben nincs különbség összeadás és kivonás között, így képezhetjük az összegüket. A négy mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A különbségeikként kapott négy mátrixot inkább grafikusan ábrázoljuk elhagyva a nullmátrixnak megfelelő ábrát, amin nincs gombnyomás:



c) Keressük tehát azt az $L \in \mathbb{F}_2^{25 \times 25}$ mátrixot, melyre $L \text{vec}(\mathbf{X}) = \text{vec}(\mathbf{Y})$ pontosan akkor áll fenn, ha $L(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, ahol $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{F}_2^{5 \times 5}$. Ehhez csak annak a gráfnak a szomszédsági mátrixát kell felírunk, amely gráf csúcsai egy 5×5 -ös négyzetrács pontjai, élei a vízszintesen vagy függőlegesen szomszédos csúcsokat kötik össze, és minden csúcsba képzelünk még egy hurokét is:



Az illeszkedési mátrix számítógépen blokkokból gyorsan összerakható:

[illegible]

E mátrix redukált lépcsős alakja

[illegible]

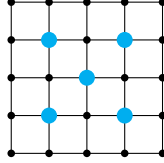
E mátrixból leolvasható, hogy $r(\mathbf{L}) = 23$, továbbá a 24-dik és 25-dik oszlopából a nulltér két eleme, melyek egyébként megfelelnek a fent ábrázolt három nemnulla megoldás közül az első kettőnek. (E két oszlop utolsó két eleme 0, az ábrák szerint azonban az első esetben a felső, a második esetben az alsó 0 helyett 1 áll a megoldásvektorban. Miért?)

d) Az $[L|I]$ mátrix egy sorában a jobb oldali részben egyetlen 1-es szerepel, az ennek megfelelő gomb megnyomása esetén az L -beli részben lévő lámpák váltanak állapotot.

Az elemi sorműveletek közül a hozzáadás $S_i \leftarrow S_j$ művelet azt jelenti, hogy az i -edik sor jobb oldalán jelölt gombok mellett a j -edik sorban 1-essel jelölt gombokat is megnyomjuk. A mátrix bal felében ezután is a gombnyomások eredménye látható. A sorcsere csak annyit tesz, hogy a gombok megnyomása után a lámpák állapotában történő változásról az i -edik és j -edik

sorban eddig tárolt információt most a másik sorban tároljuk.

e) Az $\mathbf{L}$ rangja és nullitása már a $\text{rref}(\mathbf{L})$ -ből is látható, eszerint $r(L) = 23$, $\text{null}(L) = 2$. A $\text{rref}[\mathbf{L}|\mathbf{I}_{25}]$ mátrix utolsó két sorából leolvasható, hogy összesen csak öt olyan oszlop van az $\mathbf{I}$ -ben, melyre a feladat megoldható, azaz csak öt olyan lámpa van, mely egy-magában felkapcsolható. Ezeket mutatja a következő ábra:



f) Adjuk össze a kapott 25×50 -es mátrix jobb felében lévő oszlopvektorokat. A kapott vektorban az 1-esek az összes lámpa felkapcsolásához megnyomandó gombokat mutatják. Persze az összes megoldáshoz jóval egyszerűbb megoldani az $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{1}_{25}$ egyenletrendszert pl. a $\text{rref}[\mathbf{L}|\mathbf{1}_{25}]$ mátrix segítségével.

5.43. Legyen $\mathbf{L}$ egy valós négyzetes mátrix, L a hozzá tartozó mátrixleképezés, és legyen egy $\mathcal{B}$ bázisról a standardra bázisra való áttérés mátrixa $\mathbf{B}$. Ekkor L mátrixa $\mathcal{B}$ -ben $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{B}$, L' mátrixa $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{B}$. Mivel általában

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{L}^T(\mathbf{B}^T)^{-1} \neq \mathbf{B}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{B},$$

ezért szinte bármit próbálunk, az jó lesz. Pl. ha

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \{(2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\},$$

akkor L és L' $\mathcal{B}$ -beli mátrixai nem transzponáltjai egy-

másnak:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kivételt csak a $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$ mátrixok, azaz az ortogonális mátrixok jelentenek.

5.44. Az $A^T\mathbf{w}^*$ leképezés lineáris, hisz az $(A^T\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) = \mathbf{w}^*(A\mathbf{v})$ egyenlőség jobb oldalán két lineáris leképezés ($\mathbf{w}^*$ és A) kompozíciója áll. Így az A^T leképezés létezik, $\mathcal{W}^*$ -ből $\mathcal{V}^*$ -ba képez, csak azt kell még belátni, hogy lineáris. Legyen $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^* \in \mathcal{W}^*$, és $c \in \mathbb{F}$. Ekkor

$$\begin{aligned} A^T(c\mathbf{u}^* + \mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) &= (c\mathbf{u}^* + \mathbf{w}^*)(A\mathbf{v}) \\ &= c\mathbf{u}^*(A\mathbf{v}) + \mathbf{w}^*(A\mathbf{v}) \\ &= c(A^T\mathbf{u}^*)(\mathbf{v}) + (A^T\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) \\ &= (cA^T\mathbf{u}^* + A^T\mathbf{w}^*)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

fennáll minden $\mathbf{v}$ -re, így $A^T(c\mathbf{u}^* + \mathbf{w}^*) = cA^T\mathbf{u}^* + A^T\mathbf{w}^*$, azaz A^T lineáris leképezés.

5.45. Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$. Mivel $\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | \dots | A\mathbf{e}_n]$ és $\mathbf{A}^T = [A^T\mathbf{f}_1^* | \dots | A^T\mathbf{f}_m^*]$, azaz

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\mathbf{f}_i \quad \text{és} \quad A^T\mathbf{f}_k^* = \sum_{i=1}^n a_{ik}^*\mathbf{e}_i^*,$$

ezért

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_k^*, A\mathbf{e}_j \rangle &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \langle \mathbf{f}_k^*, \mathbf{f}_i \rangle = a_{kj} \\ \langle A^T\mathbf{f}_k^*, \mathbf{e}_j \rangle &= \sum_{i=1}^n a_{ik}^* \langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j \rangle = a_{jk}^*. \end{aligned}$$

Tehát A^T mátrixa a duális bázisokban $\mathbf{A}^T$.