

6.1. Az állítások mind közvetlenül következnek a sajátérték definíciójából. Nevezetesen

$$a) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{x} = (\lambda + 1)\mathbf{x},$$

$$b) \quad \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x},$$

$$c) \quad (\mathbf{A} - \nu\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} - \nu\mathbf{x} = (\lambda - \nu)\mathbf{x},$$

$$d) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x} \\ = (\lambda + \mu)\mathbf{x},$$

$$e) \quad \mathbf{ABx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{A}\mu\mathbf{x} = \mu\mathbf{Ax} = \mu\lambda\mathbf{x} \\ = \lambda\mu\mathbf{x},$$

$$f) \quad (\nu\mathbf{A})\mathbf{x} = \nu\mathbf{Ax} = \nu\lambda\mathbf{x} \\ = (\nu\lambda)\mathbf{x}.$$

g) Ha $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{B}$ -nek a 0 nem lehet sajátértéke, így $\mu \neq 0$, tehát μ^{-1} létezik. Ha $\mathbf{Bx} = \mu\mathbf{x}$, akkor $\mathbf{B}^{-1}$ -gyel és μ^{-1} -gyel szorozva

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} = \mu^{-1}\mathbf{x},$$

és így

$$h) \quad \mathbf{AB}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mu^{-1}\mathbf{x} = \mu^{-1}\mathbf{Ax} = \mu^{-1}\lambda\mathbf{x} \\ = \lambda\mu^{-1}\mathbf{x}.$$

6.2. Mind a négy állítás igaz.

6.3. A zérustér nem lehet sajátaltér, hisz sajátvektor csak nemzérus-vektor lehet.

Tetszőleges λ esetén az $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$ mátrixnak minden nemnulla vektor sajátvektora, és más ilyen tulajdonságú mátrix nincs. Ha ui. minden nemnulla vektornak λ a sajátértéke, akkor $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$. Ha pedig volna $\mathbf{A}$ -nak két különböző sajátértéke, pl. $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két saját pár, akkor $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ nem sajátvektor, ui. $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{x} = \nu(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ semmilyen ν esetén nem áll fenn, mivel $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ függetlenek.

6.4. Ha $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), akkor $(\mathbf{A}^2 - \lambda^2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz $(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, így $(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ szinguláris mátrix, tehát legalább egyikük szinguláris, azaz $-\lambda$ vagy λ sajátérték.

Az $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak sajátpárja $(1, (1, 0))$, de az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak sem az $(1, (1, 0))$, sem a $(-1, (1, 0))$ nem sajátpárja, bár 1 és -1 is sajátértéke.

6.5. Ha $\chi(x) = -x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, akkor mivel $(\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)(\lambda_3 - x) = -x^3 + x^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - x(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

ezért $a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $a_1 = -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1$ és $a_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

6.6. A e) állítás hamis, a többi igaz.

Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor karakterisztikus polinomjaik és így sajátértékeik is megegyeznek, azaz $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \chi_{\mathbf{B}}(x)$ és a $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ halmaz egyenlő a $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ halmazzal. Így az a), b) és c) igaz, hisz

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3 = \det(\mathbf{B}),$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \text{tr}(\mathbf{B}),$$

$$\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \chi_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}.$$

Az is igaz továbbá, hogy a sajátértékek bármely szimmetrikus függvénye is azonos a két mátrixra. d) Az

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

függvény szimmetrikus, hisz ha a változókat valamely permutációjukra cseréljük, a függvény nem változik. Mivel (μ_1, μ_2, μ_3) a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ egy permutációja, ezért

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1.$$

e) Ugyanakkor az

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1,$$

függvény nem szimmetrikus, mert például az x_2 és x_3 cseréje esetén $f(x_1, x_3, x_2) \neq f(x_1, x_2, x_3)$, ui.

$$x_1^2x_3 + x_3^2x_2 + x_2^2x_1 \neq x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1.$$

Tehát ez az állítás nem igaz.

6.7. A $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 6 & 1 \\ 1 & 8 - \lambda & 1 \\ 1 & 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 44\lambda + 40.$$

A lehetséges racionális gyökök a racionálisgyök-teszt szerint $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40$. (Az nem biztos, hogy e polinomnak egyáltalán van racionális gyöke, de ha van, akkor az egész szám.) Jobb híján haladjunk sorban a lehetséges racionális gyökökön. Az 1 nem gyök, ui. a

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 14 & -44 & 40 \\ \hline 1 & -1 & 13 & -31 & 9 \end{array}$$

táblázat szerint $p(1) = 9$. Nem gyök a -1 sem:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 14 & -44 & 40 \\ \hline -1 & -1 & 15 & -59 & 99 \end{array}$$

A 2 gyök, ui.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 14 & -44 & 40 \\ \hline 2 & -1 & 12 & -20 & 0 \end{array}$$

E táblázatból a $(\lambda - 2)$ -vel való osztás hányadosa is leolvasható:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 12\lambda - 20).$$

A másodfokú polinom gyökei már próbálkozás nélkül a megoldóképlettel adódnak, 2 és 10. A $\mathbf{A}$ sajátértékei tehát $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 10$.

6.8. A $\chi_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ karakterisztikus polinom alakja $-\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. Az $\mathbf{A}$ főminorai:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 40,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 18, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18,$$

3, 8, 3.

Az $\mathbf{A}$ determinánsa a karakterisztikus polinom konstans tagja, így $a_0 = 40$. A 2×2 -es főminorok összege $-\lambda$ együtthatója: $a_1 = -(18 + 8 + 18) = -44$. Az 1×1 -es főminorok, azaz a főátlóbeli elemek összege a λ^2 együtthatója, így $a_2 = 3 + 8 + 3 = 14$. Tehát $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$.

6.9. a) A $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomja $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$, sajátpárjai $(4, (1, 1))$ és $(1, (-2, 1))$, azaz mindkét sajátaltér 1 dimenziós, melyet a megadott sajátvektor feszít ki. Van két független sajátvektor, hisz a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

b) $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$, a mátrix sajátpárjai $(6, (1, 4, 1))$, $(0, (1, -2, 1))$, $(-1, (-5, 1, 2))$, a sajátalterek tehát $\text{span}((1, 4, 1))$, $\text{span}((1, -2, 1))$, $\text{span}((-5, 1, 2))$.

c) $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$, a mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{23} = -1$, azaz a -1 kétszeres algebrai multiplicitású sajátérték. Sajátpárjai $(1, (-1, 2, 0))$, $(-1, (1, -2, 1))$, azaz a -1 geometriai multiplicitása csak 1, így legföljebb csak két független sajátvektor konstruálható, míg a mátrix rendje 3.

d) $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$, a sajátpárok $(2, (1, 1))$, $(-1, (-2, 1))$.

e) $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 20$, a sajátértékek komplex számok, a sajátpárok a komplex sajátvektorokkal $(-4 + 2i, (-2 - 2i, 1))$, $(-4 - 2i, (-2 + 2i, 1))$.

f) A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakban azonnal leolvasható a mátrixról, mivel az alsóháromszög-mátrix, így $\chi(\lambda) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)^2$, a sajátértékek $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{34} = 1$. A sajátpárok $(2, (0, 0, 1, 0))$, $(2, (0, 0, 0, 1))$, $(1, (0, -1, 0, 1))$, azaz a sajátalterek $\text{span}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ és $\text{span}((0, -1, 0, 1))$. Eszerint a 2 algebrai és geometriai multiplicitása is 2, míg az 1 algebrai multiplicitása 2, de a geometriai csak 1, így nincs négy független sajátvektor az $\mathbb{R}^4$ térben.

6.10. a) A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja azonnal leolvasható a mátrixról, mivel az felsőháromszög-mátrix, így $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$. A 2 algebrai multiplicitása 1, így geometriai multiplicitása is szükségképpen 1. Az 1 algebrai multiplicitása 2, azonban a geometriai multiplicitáshoz meg kell határoznunk sajátaltere dimenzióját, mert az lehet 1 vagy

2 is. A $\lambda = 1$ -hez tartozó sajátaltér:

$$\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ami alapján $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ összes vektora

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 1$ -hez tartozó sajátaltér tehát $\text{span}((1, 0, 0))$, így a geometriai multiplicitása 1.

b) Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2. \end{aligned}$$

A racionálisgyök-teszt szerint szóba jöhető racionális gyökök $\pm 1, \pm 2$. Egyszerű behelyettesítés a Horner-módszerrel mutatja, hogy a -1 gyök, sőt kétszeres multiplicitású, és a harmadik gyök 2:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2 & 0 & \\ \hline 2 & -1 & 0 & & \end{array}$$

Tehát a sajátértékek $\lambda_{12} = -1$ és $\lambda_3 = 2$. A 2 egyszeres algebrai, így egyszeres geometriai multiplicitású. Elég tehát csak a $\lambda = -1$ -hez tartozó sajátalteret meghatározni.

$$\text{rref}(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ami alapján a sajátaltér, azaz az $\mathcal{N}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ vektorai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = -1$ -hez tartozó $\text{span}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ sajátaltér 2 dimenziós, így a -1 algebrai és geometriai multiplicitása is 2.

c) A karakterisztikus polinomról könnyen észrevehetjük, hogy egy kéttagú összeg köbe, ui.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 & -3 \\ -1 & 5 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 \\ &= (4 - \lambda)^3, \end{aligned}$$

így mindhárom sajátérték 4. A sajátaltér dimenziójának meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrixot:

$$\text{rref}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz a megoldás egyparaméteres, így a sajátaltér egydimenziós. (Csak a teljesség kedvéért, a sajátaltér vektorai

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

alakúak, azaz a sajátaltér $\text{span}((1, -1, 1))$.

d) A karakterisztikus polinom és így a sajátértékek azonosak az előző feladatbelivel, ui.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 4 & 10-\lambda & -4 \\ 4 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = (4-\lambda)^3, \end{aligned}$$

azaz mindhárom sajátérték 4. A sajátaltér dimenziójának meghatározásához lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrixot (hozhatnánk redukált lépcsős alakra is, de az egyszerűség kedvéért csak egészekkel számolunk):

$$\text{rref}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

amiből látható, hogy a sajátaltér a $2x + 3y - 2z = 0$ egyenletű sík, ami 2 dimenziós, így a 4 geometriai multiplicitása 2. (Nem volt kérdés, csak a teljesség kedvéért megadjuk a sajátalteret explicit módon is. Az $2x + 3y - 2z = 0$ egyenlet megoldása a $z = t$, $y = 2s$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} -3s+t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

így a sajátaltér $\text{span}((-3, 2, 0), (1, 0, 1))$, ami valóban 2 dimenziós.)

e) A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja leolvasható a mátrixról, mivel az felsőháromszög-mátrix:

$$\chi(\lambda) = (1-\lambda)^2(-2-\lambda)^2.$$

Ennek gyökei a sajátértékek: $\lambda_{12} = 1$ és $\lambda_{34} = -2$. Mindkettő algebrai multiplicitása 2. Mivel

$$\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$, azaz a sajátaltér összes vektora

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

alakú. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér tehát $\text{span}((0, 0, 0, 1))$, így geometriai multiplicitása 1. Mivel

$$\begin{aligned} \text{rref}(\mathbf{A} - (-2)\mathbf{I}) &= \text{rref}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ vektorai

$$\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

alakúak. A $\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér tehát $\text{span}((0, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 0))$, így a -2 geometriai multiplicitása 2.

6.11. Az $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke, azaz nincs olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz ha nincs olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Ez azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{A}$ -nak az 1 nem sajátértéke.

6.12. a) Van, pl. egy forgatómátrix, ha a forgatás szöge nem többszöröse π -nek. b) Nincs, mivel a karakterisztikus polinom valós együtthatós harmadfokú polinom, melynek mindig van valós gyöke. c) Van, pl. az a blokkmátrix, melynek mindkét 2×2 -es blokkja egy forgatómátrix. A forgatás szöge egyik esetben sem többszöröse π -nek. d) Nincs, páratlan fokú valósegyütthatós polinomnak mindig van valós gyöke.

6.13. Mivel $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_3$, ezért $\mathbf{A}^{2023} = \mathbf{A}$, így elég csak az $\mathbf{A}$ sajátpárjait meghatározni: $(-1, (-1, 1, 0))$, $(1, (-4, 3, 0))$, $(1, (-2, 0, 3))$, a két sajátaltér $\text{span}((-1, 1, 0))$, $\text{span}((-4, 3, 0), (-2, 0, 3))$.

$\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja $\chi(x) = x^2 - 3x - 4$, így a sajátértékek $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, a sajátpárok $(4, (2, 3))$, $(-1, (-1, 1))$. Ebből $\mathbf{B}^{10}$ sajátpárjai $(4^{10}, (2, 3)) = (1048576, (2, 3))$, $(1, (-1, 1))$.

6.14. a) Legyen $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ekkor $p''(x) = 6ax + 2b$, így a $p''(x) = \lambda p(x)$, azaz a

$$6ax + 2b = \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

egyenletnek csak $\lambda = 0$ esetén van megoldása, és ekkor $a = b = 0$. Tehát a sajátaltér a legfeljebb elsőfokú polinomokból áll, vagyis $\mathcal{P}_2$ vagy másként kifejezve $\text{span}(x, 1)$. A feladat megoldható úgy is, hogy felírjuk a leképezés $\{x^3, x^2, x, 1\}$ bázisra vonatkozó mátrixát. Az $(a, b, c, d) \mapsto (0, 0, 6a, 2b)$ leképezés mátrixa e leképezésbeli vektorokkal

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6a \\ 2b \end{bmatrix}.$$

E mátrix sajátpárjai $(0, (0, 0, 1, 0))$, $(0, (0, 0, 0, 1))$, ami megfelel az előzőleg kapott eredménynek.

b) $p(x) = a_{2022}x^{2022} + a_{2021}x^{2021} + \dots + a_1x + a_0$, $x p'(x) = 2022a_{2022}x^{2022} + 2021a_{2021}x^{2021} + \dots + 2a_2x^2 + a_1x$. Az együtthatók vektorán e leképezést és a λ -szorost összevetve

$$\begin{bmatrix} a_{2022} \\ a_{2021} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2022a_{2022} \\ 2021a_{2021} \\ \vdots \\ 2a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{2022} \\ a_{2021} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

Innen e leképezés mátrixa $\text{diag}(2022, 2021, \dots, 1, 0)$, így a sajátpárok az együtthatóvektorok terén $(k, \mathbf{e}_k)$, a polinomok terén (k, x^k) , ahol $k = 0, 1, \dots, 2022$.

c) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $p''(x) = 6ax + 2b$, így az $(x^2 + 1)p''(x) = \lambda p(x)$, azaz a

$$6ax^3 + 2bx^2 + 6ax + 2b = \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

egyenletnek csak $\lambda = 6$, $\lambda = 2$ és $\lambda = 0$ esetén létezik megoldása. $\lambda = 6$ esetén a sajátalter $\text{span}(x^3 + x)$, $\lambda = 2$ esetén $\text{span}(x^2 + 1)$, $\lambda = 0$ esetén bármely legfeljebb elsőfokú polinom sajátvektor, azaz a sajátalter $\text{span}(x, 1)$. A feladat megoldható úgy is, hogy felírjuk a leképezés $\{x^3, x^2, x, 1\}$ bázisra vonatkozó mátrixát. Az $(a, b, c, d) \mapsto (6a, 2b, 6a, 2b)$ leképezés mátrixa e leképezésbeli vektorokkal

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a \\ 2b \\ 6a \\ 2b \end{bmatrix}.$$

E mátrix sajátpárjai $(6, (1, 0, 1, 0))$, $(2, (0, 1, 0, 1))$, $(0, (0, 0, 1, 0))$, $(0, (0, 0, 0, 1))$, ami megfelel az előzőleg kapott eredménynek.

d) Az $(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x^2 + 1)$ osztás hányadosa $ax + b$, maradéka $(c - a)x + (d - b)$. Az együtthatóvektorokon a leképezést és a λ -szorost összevetve

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c - a \\ d - b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Az egyenlőség $\lambda = 0$ esetén a $c - a = 0$, $d - b = 0$ feltételeket teljesítő polinomokra áll, azaz a 0-hoz tartozó sajátalteret az $x^3 + x$ és az $x^2 + 1$ polinomok feszítik ki, míg $\lambda = 1$ esetén a sajátalter a legfeljebb elsőfokú polinomokból áll, mely teret az x és az 1 polinomok feszítik ki. Ugyanerre az eredményre jutunk a leképezés

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixának sajátértégeit és sajátaltereit kiszámolva.

e) E leképezés nem lineáris, hisz a zéruspolinom képe nem a zéruspolinom, így a kérdés értelmetlen.

6.15. A karakterisztikus polinomot megadó

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

determinánsból csak két kígyó választható ki, ezek determinánsai $(1-x)^3(-x)$ (a főátlóbeli elemek szorzata), és $-(-1)(1-x)(-x)(1) = (1-x)(-x)$, ui. ezt a kígyót egy sorcserével tudjuk diagonális alakra hozni, ezért az elemek szorzatát 1-gyel meg kell szorozni. E két determináns összege

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}}(x) &= (1-x)^3(-x) + (1-x)(-x) \\ &= (1-x)(-x)[(1-x)^2 + 1] \\ &= (1-x)(-x)(x^2 - 2x + 2) \\ &= x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Gyökei és így sajátértékei: $0, 1, 1 \pm i$. Ezek közül $\mathbb{Q}$ -ba és $\mathbb{R}$ -be csak kettő esik. A mátrix harmadik sora zérusor, ezért a determináns 0, a nyom pedig 3. A karakterisztikus polinomban valóban 0 a konstans tag és x^3 együtthatója valóban $-3 = (-1)^{4-1}3$. Végül ellenőrzésképpen a négy gyök összege és szorzata:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + (1+i) + (1-i) &= 3 = \text{tr}(\mathbf{A}) \\ 0 \cdot 1 \cdot (1+i) \cdot (1-i) &= 0 = \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

$\chi_{\mathbf{B}}(x)$ kiszámításához két részdetermináns értékét kell összeszoroznunk, ahonnan a gyöktényezőző alak is könnyen számolható:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{B}}(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(x^2+1)(x^2-x-1) \\ &= (1-x)(i-x)(-i-x) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - x \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - x \right) \\ &= -x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - 1. \end{aligned}$$

A sajátértékek: $1 \in \mathbb{Q}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$, $\pm i \in \mathbb{C}$. $\det(\mathbf{B}) = -1$ (a polinom konstans tagja), $\text{tr}(\mathbf{B}) = (-1)^{5-1}2 = 2$ (az x^4 együtthatója), és a sajátértékek szorzata és összege is ezt mutatja:

$$\begin{aligned} 1 \cdot i \cdot (-i) \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= -1 = \det(\mathbf{B}), \\ 1 + i - i + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 2 = \text{tr}(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

6.16. a) Az $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Mivel $\mathbf{M}$ konstrukciójából következik, hogy minden sorában 1 az elemek összege, így az $\mathbf{1}$ vektor (jobb) sajátvektor, mely a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozik. A feladatban leírt „weben szörfölő” modell szerint egy dokumentumnak annál nagyobb a rangja minél gyakrabban jár arra a szörfölő. Ha x_i annak valószínűségét jelöli, hogy milyen valószínűséggel van a szörfölő egy adott pillanatban a gráf i -edik csúcsában, akkor az

$$y_j = \sum_{i=0}^{n-1} x_i m_{ij}$$

összeg (a teljes valószínűség tétele szerint) annak valószínűségét adja, hogy a szörfölő milyen valószínűséggel lesz a következő lépésben a j -edik csúcsban. Ez az y_j összeg épp az $\mathbf{x}^T \mathbf{M}$ vektor j -edik koordinátája, és az $\mathbf{y}$ vektor is valószínűségeloszlás, ui.

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i m_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \sum_{j=0}^{n-1} m_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i = 1.$$

Azt tudjuk, hogy az 1 sajátérték, így tartozik hozzá bal sajátvektor is, melyre $\mathbf{x}^T \mathbf{M} = \mathbf{x}^T$. Ha ennek az $\mathbf{x}$ vektornak minden koordinátája pozitív (ezt a 10. fejezetben bizonyítani fogjuk), akkor megválasztható úgy, hogy koordinátáinak összege 1 legyen, így $\mathbf{x}$ valószínűségeloszlás, és azt fejezi ki, hogy a szörfölő minden lépés után változatlanul az $\mathbf{x}$ eloszlás szerinti eséllyel lesz a gráf valamely pontjában. Eszerint megtaláltuk azt az eloszlást, mely egyúttal megadja a dokumentumok rangját is. Az i -edik dokumentum előbb van a rangsorban mint a j -edik, ha $x_i > x_j$.

c) Az $\mathbf{M} = (1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{8}\mathbf{1}_{8 \times 8}$ mátrix lebegőpontos számokkal közelített elemekkel a $d = 0.15$ paraméterválasztással:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{bmatrix}.$$

E mátrix 1-hez tartozó bal sajátvektora

$$\mathbf{x} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100).$$

Eszerint a dokumentumok sorrendje 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7.

6.17. $\chi(x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ mindkét mátrix karakterisztikus polinomja.

6.18. Szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós, ferdén szimmetrikusé tiszta imaginárius, nilpotensé 0, ortogonálisé 1 abszolút értékű.

6.19. Az első mátrix ferdén szimmetrikus, így sajátértékei tiszta imaginárius számok. Valóban, $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda$, sajátértékei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{23} = \pm\sqrt{3}i$. (Mivel $0 = 0i$, a 0 tiszta imaginárius szám is.) A hozzájuk tartozó sajátvektorok

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{23} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A második mátrix oszlopvektorai páronként merőleges egységvektorok, tehát a mátrix ortogonális:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{5}{3}\lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda + 1$, gyökei a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{23} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}i$. (Ezek abszolút értéke láthatóan 1.) A hozzájuk tartozó sajátvektorok

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{23} = \begin{bmatrix} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mindkét előző mátrixnál elég az egyik komplex sajátértékhez kiszámolni a sajátvektort, a másik sajátpár annak konjugáltja.

A harmadik mátrix nilpotens, ugyanis $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, így ebből azonnal adódik, hogy $\chi(\lambda) = -\lambda^3$. (Természetesen az $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ kiszámolásával is ezt kapjuk.) A 0 geometriai multiplicitása 2, két független sajátvektor lehet pl. $\mathbf{x}_1 = (-2, 1, 0)$ és $\mathbf{x}_2 = (3, 0, 1)$.

Mivel a negyedik mátrix szimmetrikus, sajátértékei valósak. Valóban, $\chi(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^2 - 16\lambda$, sajátértékei 0, -2, -2, 4, a hozzájuk tartozó sajátalterek

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 & \quad \text{span}((-1, 1 - 1, 1)), \\ \lambda_{23} = -2 & \quad \text{span}((-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)), \\ \lambda_4 = 4 & \quad \text{span}((1, 1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Az utolsó mátrix ferdén szimmetrikus, $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 + 4$, $\lambda_{12} = \sqrt{2}i$, $\lambda_{34} = -\sqrt{2}i$. Sajátpárok: $(\sqrt{2}i, (-1, -\sqrt{2}i, 1, 0))$, $(\sqrt{2}i, (-\sqrt{2}i, 1, 0, 1))$, a másik két sajátpár ezek elemenkénti konjugáltja.

6.20. Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \lambda\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{Ax} - \nu\mathbf{Ix} = \lambda\mathbf{x} - \nu\mathbf{x} \\ &\rightsquigarrow (\mathbf{A} - \nu\mathbf{I})\mathbf{x} = (\lambda - \nu)\mathbf{x} \\ &\rightsquigarrow (\mathbf{A} - \nu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x} = (\lambda - \nu)^{-1}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

tehát $((\lambda - \nu)^{-1}, \mathbf{x})$ az $(\mathbf{A} - \nu\mathbf{I})^{-1}$ mátrix sajátpárja. Kihasználtuk, hogy $\lambda \neq \nu$, így létezik $(\lambda - \nu)^{-1}$, és $\nu \notin \sigma(\mathbf{A})$, így az $\mathbf{A} - \nu\mathbf{I}$ mátrixnak a 0 nem sajátértéke, így invertálható.

Fordítva, ha $((\lambda - \nu)^{-1}, \mathbf{x})$ az $(\mathbf{A} - \nu \mathbf{I})^{-1}$ sajátpárja, akkor

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \nu \mathbf{I})\mathbf{x} &= (\lambda - \nu)\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} - \nu\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \nu\mathbf{x} \\ &\rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \end{aligned}$$

tehát $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ sajátpárja.

6.21. Használjuk a 6.38. tételt, mely szerint $\chi_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \chi_{\mathbf{Y}\mathbf{X}}$, ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ azonos típusú négyzetes mátrixok. Ekkor

$$\chi_{\mathbf{ABC}} = \chi_{\mathbf{A}(\mathbf{BC})} = \chi_{(\mathbf{BC})\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{BCA}}.$$

A második állítást igazoló példaként legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{ABC} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{CBA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így $\chi_{\mathbf{ABC}}(x) = x^2 - x$, $\chi_{\mathbf{CBA}}(x) = x^2$.

6.22. A 4.37. tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{M}}(x) &= |\mathbf{M} - x\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A} - x\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - x\mathbf{I} \end{vmatrix} \\ &= |\mathbf{A} - x\mathbf{I}| |\mathbf{D} - x\mathbf{I}| \\ &= \chi_{\mathbf{A}}(x) \chi_{\mathbf{D}}(x), \end{aligned}$$

ami igazolja az állítást is.

6.23. Ha $\mathbf{A}$ minden sorösszege c , akkor $\mathbf{A}\mathbf{1} = c\mathbf{1}$, azaz a $(c, \mathbf{1})$ sajátpár. Ekkor $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{c}\mathbf{1}$, azaz az $\mathbf{A}^{-1}$ minden sorában $\frac{1}{c}$ a sorösszeg. E gondolatmenetet megismételve az oszlopösszegekre és a $(\mathbf{1}, c)$ bal sajátpárra, kapjuk hogy $\mathbf{A}^{-1}$ is bővös négyzet.

6.24. Ha $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ nem invertálható, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ egyenletnek van nemtriviális megoldása, azaz $\lambda = 1$ egy sajátérték. De $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, így minden sajátértéke imaginárius, tehát az 1 nincs köztük.

Legyen $\mathbf{Q} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I})$. Definíció szerint $\mathbf{Q}$ ortogonális, ha $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, azaz ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ (ld. a 6.33. tételt és a megelőző megjegyzést). Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I})((\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I}))^T \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A}^T + \mathbf{I})(\mathbf{A}^T - \mathbf{I})^{-1} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I})(-\mathbf{A} + \mathbf{I})(-\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \\ &= (-1)(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A})(-1)(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1} \\ &= (-1)(-1)\mathbf{I} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Közben kihasználtuk, hogy

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{A} + \mathbf{I}),$$

hisz mindkettő egyenlő $\mathbf{I}^2 - \mathbf{A}^2$ -tel.

Megjegyezzük, hogy ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ egy sajátpárja, tehát λ tiszta imaginárius, akkor

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\mathbf{x}$$

és $|\frac{1+\lambda}{1-\lambda}| = 1$. Erre is építhető bizonyítás, de ahhoz e mátrixok unitér diagonalizálhatóságára is szükség van (ld. a 8. fejezetet).

6.25. A mátrix plusz diád determinánsáról szóló 4.40. tétel szerint invertálható $\mathbf{A}$ mátrixra

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T) = \det(\mathbf{A})(1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}).$$

Ezt felhasználva az $\mathbf{A} + \mathbf{x}_k\mathbf{v}^T$ karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(\mathbf{A} + \mathbf{x}_k\mathbf{v}^T - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} + \mathbf{x}_k\mathbf{v}^T) \\ &= \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(1 + \mathbf{v}^T(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{x}_k) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \right) \left(1 + \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{x}_k}{\lambda_k - \lambda} \right) \\ &= \left(\prod_{i \neq k} (\lambda_i - \lambda) \right) (\lambda_k - \lambda + \mathbf{v}^T\mathbf{x}_k) \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_k + \mathbf{v}^T\mathbf{x}_k - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda). \end{aligned}$$

Ha a λ_k sajátértéket ν -re akarjuk cserélni az $\mathbf{A}$ -hoz egy diád hozzáadásával és a többi sajátérték megtartása mellett, akkor olyan $\mathbf{v}$ vektort keresünk, melyre $\lambda_k + \mathbf{v}^T\mathbf{x}_k = \nu$, azaz $\mathbf{v}^T\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T\mathbf{v} = \nu - \lambda_k$. Erre pl. a

$$\mathbf{v} = \frac{(\nu - \lambda_k)\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k}$$

vektor megfelel.

6.26. Legyen λ az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy sajátértéke, és legyen $\mathcal{V}$ a λ -hoz tartozó sajátaltér. Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ tetszőleges nemnulla vektor, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} && \text{szorozzuk } \mathbf{B}\text{-vel} \\ \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{B}\mathbf{x} && \mathbf{A} \text{ és } \mathbf{B} \text{ felcserélhető} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ha $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kész vagyunk, mert $(0, \mathbf{x})$ a $\mathbf{B}$ egy sajátpárja, tehát $\mathbf{x}$ közös sajátvektor. Ha nem, vegyük a $\mathcal{V}$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ bázisát, legyen $\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ a standard bázisra való áttérés mátrixa, és legyen $\hat{\mathbf{B}}$ az $\mathcal{B} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ mátrixleképezés $\mathcal{V}$ -re való megszorításának mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban. Ez egy $m \times m$ -es mátrix, hisz $\dim \mathcal{V} = m$ és $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ teret önmagába képi. Eszerint tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vektor $\mathcal{B}$ -beli $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ koordinátás alakjára

$$\mathbf{B}\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}, \text{ azaz } \mathbf{B}\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}\hat{\mathbf{B}}.$$

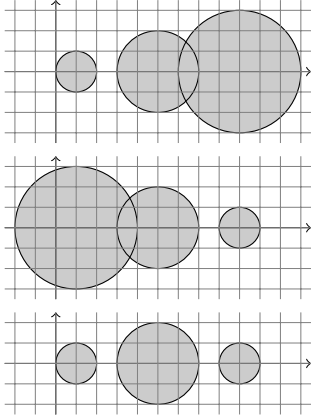
Legyen ezután $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ a $\hat{\mathbf{B}}$ mátrix egy tetszőleges sajátvektora, ekkor $\mathbf{x}$ a $\mathbf{B}$ sajátvektora, tehát $\mathbf{x}$ az $\mathbf{A}$ -nak és $\mathbf{B}$ -nek is sajátvektora.

Az állítás valós mátrixokra valós sajátértékekkel és valós sajátvektorokkal nem igaz, hisz semmi nem garantálja, hogy akár $\mathbf{A}$ -nak, akár $\hat{\mathbf{B}}$ -nak létezzék valós sajátvektora. Például ha $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ forgatómátrix,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F} \end{bmatrix},$$

akkor $\mathbf{A}$ minden valós sajátvektora az xy síkban van, míg $\mathbf{B}$ minden sajátvektora a zw síkban, tehát nincs közös valós sajátvektoruk.

6.27. Mivel valós elemű mátrix komplex gyökei párosával egymás konjugáltjai, ezért ha egy Gersgorin-kör diszjunkt a többitől, abban csak egy valós sajátérték lehet. A $\mathbf{B}$ mátrix sorok szerinti Gersgorin-körei azt mutatják, hogy az 1-közepű 1-sugarú körben egy valós sajátérték van. Mivel a másik két kör metszi egymást, ezért a másik két sajátérték még lehetne nem valós. Az oszlopok szerinti 9-közepű 1-sugarú Gersgorin-kör viszont egy újabb valós sajátértéket garantál, így a harmadik is szükségképpen az. Ezt mutatja a sorok és oszlopok szerinti halmazok metszete is. A sajátértékek a $[0, 2]$, $[3, 7]$ és $[8, 10]$ intervallumokba esnek (ld. az alábbi ábrán).



A második mátrix egy Gersgorin-köre diszjunkt a többitől, így legalább egy, de akkor legalább két valós sajátértéke van, mivel a komplexek száma páros. Valóban, a sajátértékek: $7, 2, 1 \pm 2i$.

6.28. Az $\mathbf{A}$ mátrix soronként domináns főátlójú, ha bármely főátlóbeli elemére $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ minden Gersgorin-körének középpontja messzebb van az origótól, mint amekkora a sugara, azaz a 0 szám egyik Gersgorin-körben sincs benne, tehát a 0 nem sajátérték, így $\mathbf{A}$ invertálható.

6.29. a) Ha $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, ahol

$$d_1 = 1, d_k = \sqrt{\frac{b_1 b_2 \dots b_{k-1}}{c_1 c_2 \dots c_{k-1}}},$$

akkor egyszerű beszorzás igazolja, hogy

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{D}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{b_1 c_1}} & \sqrt{b_1 c_1} & & & \\ & a_2 & \sqrt{b_2 c_2} & & \\ & \sqrt{b_1 c_1} & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1} c_{n-1}} \\ & & & \sqrt{b_{n-1} c_{n-1}} & a_n \end{bmatrix}.$$

Mivel $\hat{\mathbf{T}}$ szimmetrikus ezért sajátértékei valósok, és $\mathbf{T} \sim \hat{\mathbf{T}}$, ezért ezek egyúttal $\mathbf{T}$ sajátértékei is.

b) Ha λ a $\mathbf{T}$ egy sajátértéke, akkor $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}$ is a feladatban kikötött tulajdonságokkal rendelkező tridiagonális Jacobi-mátrix. Első sorát és utolsó oszlopát elhagyva a

$$\begin{bmatrix} c_1 & a_2 - \lambda & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 - \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ & & & \ddots & a_{n-1} - \lambda \\ & & & & c_{n-1} \end{bmatrix}$$

felsőháromszög-mátrixot kapjuk, melynek főátlóbeli elemei $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ nem nullák, mivel $b_i c_i > 0$. Így e mátrix rangja $n - 1$, azaz $r(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \geq n - 1$. Másrészt $r(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \leq n - 1$, mivel λ sajátérték. Így $r(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = n - 1$, tehát λ geometriai multiplicitása 1. (A következő fejezetek diagonalizálhatóságra vonatkozó eredményeiből következik, hogy mivel $\hat{\mathbf{T}}$ szimmetrikus, ezért diagonalizálható, így $\mathbf{T} \sim \hat{\mathbf{T}}$ miatt $\mathbf{T}$ is diagonalizálható, így sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitásai azonosak, tehát λ algebrai multiplicitása is 1. A következőkben ezek felhasználása nélkül adunk egy bizonyítást.)

Elég megmutatnunk, hogy ha egy szimmetrikus $\mathbf{S}$ mátrixnak λ_1 egy egyszeres geometriai multiplicitású sajátértéke, akkor algebrai multiplicitása is 1. Legyen $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$ sajátpár, ahol $\mathbf{x}_1$ egységvektor. Legyen a $\text{span}(\mathbf{x}_1)^\perp$ tér egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Ekkor a $\mathbf{Q} = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n]$ mátrixra $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Mivel $\mathbf{S} \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$, ezért $\mathbf{S} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$. $\mathbf{S}$ szimmetrikus, így

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^T \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{S} \mathbf{Q})^T \\ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v} & \mathbf{X}^T \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{X}$ szimmetrikus. Az $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda_1 - \lambda) \det(\mathbf{X} - \lambda \mathbf{I}_{n-1})$, és a hasonlóság miatt ez megegyezik $\mathbf{S}$ karakterisztikus polinomjával. Tegyük fel, hogy $(\lambda_1, \mathbf{y})$ sajátpárja $\mathbf{X}$ -nek, azaz $\mathbf{X} \mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{y}$. Ekkor

$$\mathbf{S} \left(\mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \mathbf{y} \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

azaz $(\lambda_1, \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix})$ sajátpárja $\mathbf{S}$ -nek, de ez ellentmondás, mivel

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \notin \text{span}(\mathbf{x}_1).$$

Ezzel igazoltuk, hogy λ_1 algebrai multiplicitása is 1.

6.30. a) Hamis, függetleneknek is kell lenniük.

b) Igaz. c) Hamis, az $\mathbb{F}$ testbe is kell esnie mindegyik

sajátértéknek. *d)* Hamis, az is szükséges, hogy az algebrai és geometriai multiplicitások megegyezzenek. *e)* A kérdés így értelmetlen, de az állítás igaz, hogy „*A* pontosan akkor diagonalizálható minden bázisban, ha $\mathbf{A} = c\mathbf{I}_n$, ahol $c \in \mathbb{F}$ ”.

6.31. *a), b), c)* mindegyike igaz, *d)* hamis, ugyanis egy sajátaltér egy vektora többféleképp is előállhat e sajátaltér vektorainak lineáris kombinációjaként. A *d)* állítás úgy javítható, hogy „*V* minden vektora egyértelműen előáll az *L* minden egyes sajátaltéréből vett egy-egy sajátvektorának összegeként”.

6.32. *a)* Igaz. *b)* Hamis. Az ugyan igaz, hogy minden valós diagonalizálható *A* mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T$$

alakban, ahol az $\mathbf{x}_i$ vektor a λ_i -hez tartozó jobb sajátvektor, $\mathbf{y}_i$ pedig a hozzá tartozó bal sajátvektor, de sem az nem igaz, hogy ez a felbontás egyértelmű lenne, sem az, hogy az $\mathbf{x}_i$ és $\mathbf{y}_i$ vektorok szabadon megválaszthatóak a λ_i -hez tartozó sajátvektorok közül. Ha az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ sajátfelbontásban az $\mathbf{x}_i$ vektorok a *C* mátrix oszlopvektorai, akkor az $\mathbf{y}_i^T$ vektorok a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix sorvektorai kell hogy legyenek.

6.33. *a)* A 30° -os forgatásnak nincs valós sajátértéke, de komplex sajátértékei egymás konjugáltjai, így különbözőek, tehát $\mathbb{R}$ fölött nem, de $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható. *b)* Az egyenesre való tükrözésnek két különböző sajátértéke van, így diagonalizálható, diagonális alakja $\text{diag}(1, -1)$. *c)* Az egyenesre való vetítésnek is két különböző sajátértéke van, így diagonalizálható, diagonális alakja $\text{diag}(1, 0)$.

6.34. *a)* A $p(x) \mapsto p''(x)$ ($p \in \mathcal{P}_4$) leképezés nem diagonalizálható, mert az egyetlen sajátértékének algebrai multiplicitása 4, a geometriai 2.

b) A $p(x) \mapsto xp'(x)$ ($p \in \mathcal{P}_{2023}$) leképezés mátrixa az $\{x^{2022}, \dots, x^2, x, 1\}$ bázisban diagonális, így diagonalizálható.

c) A $p(x) \mapsto (x^2 + 1)p''(x)$ ($p \in \mathcal{P}_4$) leképezés minden sajátértékének megegyezik az algebrai és geometriai multiplicitása, diagonalizálható, diagonális alakja $\text{diag}(6, 2, 0, 0)$.

d) Diagonális alakja $\text{diag}(1, 1, 0, 0)$.

6.35. *a)* $\chi(x) = x^2 - 4x - 5$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Nem diagonalizálható, mert a $\lambda = 1$ algebrai multiplicitása 2, de a geometriai csak 1.

c) A sajátértékek leolvashatók a mátrix főátlójából,

mivel alsóháromszög-mátrix.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d) Mivel e mátrix az *a)* feladatbeli és a $-\mathbf{I}$ mátrixokból álló blokkdiagonális mátrix, ezért minden fejen is számolható:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e) Nem diagonalizálható, ui. a $\lambda = 2$ négyszeres algebrai, de csak háromszoros geometriai multiplicitású sajátérték.

f) Az $\mathbf{1}_{2023 \times 2023}$ mátrix azokat a vektorokat, amelyek utolsó koordinátája 1, egy másik -1 és a többi 0, a nullvektorba viszi. Ez 2022 darab 0 sajátértékhez tartozó sajátvektor. A csupa 1-esből álló 1 vektor vektor a 2023 sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel ezek a sajátvektorok lineárisan függetlenek, a mátrix diagonalizálható, diagonális alakja

$\text{diag}(2023, 0, \dots, 0)$, az $\mathbf{1}_{n \times n}$ sajátfelbontása:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2023 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}.$$

g) Ha $a = b$, akkor lényegében visszkapjuk az f) feladatot, a diagonális alak $\text{diag}(na, 0, \dots, 0)$. Ha $a \neq b$, a sajátvektorok megegyeznek az előző pontbeliekkel, de az $\mathbf{1}_n$ az $a + (n-1)b$ sajátértékhez, míg a $(0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1)$ alakúak a $b - a$ sajátértékhez tartoznak. A sajátfelbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + (n-1)b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}.$$

6.36. $p(1) = p(3) = p(-1) = p(5) = 1$, így mindkét mátrixra a helyettesítési érték egyenlő a spektrálevetítők összegével, ami mindig $\mathbf{I}$. A teljesség kedvéért megadjuk a két mátrix spektrálevetítőjét, ami a sajátfelbontás diadikus alakjából is leolvasható figyelembe véve hogy mindkét esetben vannak többszörös sajátértékek:

$$\begin{aligned} c) \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}. \\ d) \quad & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.37. A spektrálevetítők a $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 = \mathbf{A}$ egyenletrendszerből:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{A}}{2}, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{\mathbf{I} - \mathbf{A}}{2}.$$

Mivel a spektrálfelbontás $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 + (-1)\mathbf{P}_2$, ezért

$$\mathbf{A}^n = 1^n \mathbf{P}_1 + (-1)^n \mathbf{P}_2,$$

azaz $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$, így $\mathbf{A}^{2023} + \mathbf{A}^{2024} = \mathbf{A} + \mathbf{I}$.

6.38. a) A spektrálevetítőkre vonatkozó egyenletrendszerből ki tudjuk fejteni a spektrálevetítőket:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 &= \mathbf{I} & \mathbf{P}_1 &= \frac{1}{6}\mathbf{A}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{I}, \\ -\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + 2\mathbf{P}_3 &= \mathbf{A} & \leadsto \mathbf{P}_2 &= -\frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A} + \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + 4\mathbf{P}_3 &= \mathbf{A}^2 & \mathbf{P}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3}\mathbf{I}. \end{aligned}$$

b) A válasz azonos az a)-belivel.

c) $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + 2^{10}\mathbf{P}_3 = 341\mathbf{A}^2 - 340\mathbf{I}$.

6.39. Az egyszerűség kedvéért oldjuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{k-1} \end{bmatrix} \quad (*)$$

egyenletrendszert. A Cramer-szabály szerint p_i két Vandermonde-determináns hányadosa. Mivel a sajátértékek különbözőek, az egyenletrendszer megoldható, a nevezőbeli determináns nem 0. A számláló i -edik oszlopában a jobb oldali vektor szerepel, ezért azt több szorzatból tudjuk felírni:

$$p_i = \frac{\prod_{l < i < j} (\lambda_j - \lambda_l) \prod_{j=1}^{i-1} (a - \lambda_j) \prod_{j=i+1}^k (\lambda_j - a)}{\prod_{l < j} (\lambda_j - \lambda_l)}.$$

Egyszerűsítve a $\prod_{l < i < j} (\lambda_j - \lambda_l)$ tényezővel, és az $i < j$ indexnek megfelelő tényezőket a számlálóban és nevezőben is -1 -gyel szorozva kapjuk, hogy

$$p_i = \frac{\prod_{j \neq i} (a - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Kérdés, megtehetjük-e, hogy az a helyébe a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot, a p_i ismeretlen helyébe a $\mathbf{P}_i$ mátrixot helyettesítjük? Igen, hisz a (*) egyenletrendszer megoldása közben végzett testműveletek (tényezők felcserélése, skalárral osztás, kiemelés...) a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k &= \mathbf{I} \\ \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k &= \mathbf{A} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \lambda_1^{k-1} \mathbf{P}_1 + \lambda_2^{k-1} \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k^{k-1} \mathbf{P}_k &= \mathbf{A}^{k-1} \end{aligned}$$

egyenletrendszeren is változtatás nélkül elvégezhetők, hisz $\mathbf{A}$ hatványai között a szorzás felcserélhető, a skalárral szorzás/osztás műveleti tulajdonságai pedig ugyanazok.

6.40. Először megmutatjuk, hogy ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak $(\lambda, \mathbf{x}_1)$ egy jobb, $(\mathbf{x}_2^T, \lambda)$ egy bal sajátpárja, akkor $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$ esetén λ algebrai multiplicitása legfeljebb 2. Válasszuk $\mathbf{x}_1$ -et és $\mathbf{x}_2$ -t egységvektornak, és egészítsük ki $\mathbb{R}^n$ ortonormált $\mathcal{Q} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ bázisává. (Azt, hogy ezt mindig megtehetjük, magától értetődőnek tűnhet, de alaposan majd csak a 7. fejezetben tárgyaljuk.) Ekkor a $\mathbf{Q} = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n]$ mátrix a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ áttérés mátrixa. A $\mathcal{Q}$ bázisban $\mathbf{A}$ alakja legyen $\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$. Az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ alakja a $\mathcal{Q}$ bázisban $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ill. $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$. A $\mathbf{B}\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1$ egyenletből következik, hogy $\mathbf{B}$ első oszlopa a $(\lambda, 0, \dots, 0)$ vektor,

míg az $\mathbf{e}_2^T \mathbf{B} = \lambda \mathbf{e}_2^T$ egyenletből, hogy a második sora $(0, \lambda, 0, \dots, 0)$. A

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & ? & ? & \dots & ? \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ? & ? & \dots & ? \end{bmatrix}$$

mátrixnak λ legalább kétszeres algebrai multiplicitású sajátértéke, ami a $\det(\mathbf{B} - x\mathbf{I})$ determináns kifejtéséből leolvasható. Így ha λ algebrai multiplicitása 1, $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mathbf{y}^T, \lambda)$ sajátpárok, akkor $\mathbf{y}^T \mathbf{x} \neq 0$, így értelmes a

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{xy}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}$$

kifejezés. $\mathbf{P}$ vetítés, hisz

$$\mathbf{P}^2 = \frac{\mathbf{xy}^T \mathbf{xy}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{x} \mathbf{y}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{y}^T \mathbf{x})\mathbf{y}^T}{(\mathbf{y}^T \mathbf{x})^2} = \frac{\mathbf{xy}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} = \mathbf{P}.$$

$\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ térre vetít, hisz $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \leq \text{span}(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, ui.

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{xy}^T \mathbf{v}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{v}}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} \mathbf{x},$$

és $\dim \mathcal{O}(\mathbf{P}) = 1$. Végül megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ mentén vetít, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Az 5.15. tétel szerint ha $\mathbf{P}$ vetítőmátrix, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ is, mely $\mathcal{O}(\mathbf{P})$ mentén vetít $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$ -re. $(\mathbf{y}^T, \lambda)$ bal saját pár, azaz $\mathbf{y}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^T$, azaz $(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\perp$. Másrészt $\mathbf{y}^T \mathbf{P} = \mathbf{y}^T \frac{\mathbf{xy}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} = \frac{(\mathbf{y}^T \mathbf{x})\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T$, így $\mathbf{y} - \mathbf{P}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{I} - \mathbf{P}^T) = \mathcal{O}(\mathbf{P}^T) = \mathcal{N}(\mathbf{P})^\perp$. Tehát $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\perp \leq \mathcal{N}(\mathbf{P})^\perp$, vagyis $\mathcal{N}(\mathbf{P}) \leq \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Ugyanakkor $\dim \mathcal{O}(\mathbf{P}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 1$, így $\dim \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \dim \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = n - 1$, tehát igazoltuk, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

E bizonyítás lényegében ugyanígy megy komplex esetre is a

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{xy}^H}{\mathbf{y}^H \mathbf{x}}$$

mátrixszal.

6.41. Az eredmény

$$p(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $p(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ polinom sajátértékekben fölvetett értékei: $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 2$. Ezt legegyszerűbben a Horner-módszerrel tudjuk kiszámolni:

	1	-6	11	-7	4	-1
1	1	-5	6	-1	3	2
2	1	-4	3	-1	2	3
3	1	-3	2	-1	1	2

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátpárjai $(1, (1, 0, 0))$, $(2, (2, 1, 0))$, $(3, (9, 6, 2))$, így a sajátfelbontás

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Mivel $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$ és

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= p(\text{diag}(1, 2, 3)) = \text{diag}(p(1), p(2), p(3)) \\ &= \text{diag}(2, 3, 2), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^5 - 6\mathbf{A}^4 + 11\mathbf{A}^3 - 7\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} - 2\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.42. A diagonalizálható mátrixokat számítógép nélkül is megtalálhatjuk, hisz a zérus- és egység mátrix diagonális alakú, tehát diagonalizálható, míg azok a mátrixok, melyeknek 0 és 1 a két sajátértéke, ugyancsak, hisz különböznek a sajátértékei. Ide tartozik a következő hat mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Annak ellenőrzése, hogy a maradék nyolc mátrix egyike sem diagonalizálható, azt kell ellenőrizni, hogy vagy nincs gyöke $\mathbb{F}_2$ -ben a karakterisztikus polinomnak, vagy a két sajátérték azonos, de a sajátaltér csak 1 dimenziós. Az első esetre példa következő két mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezek mindegyikének karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = x^2 + x + 1,$$

aminek nincs $\mathbb{F}_2$ -ben gyöke, mert se $x = 0$, se $x = 1$ nem gyök, így diagonalizálható sem lehet. (Számolás közben felhasználtuk, hogy $\mathbb{F}_2$ fölött $-1 = 1$, így $-x = x$.) A sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitásának különbözősége miatt $\mathbb{F}_2$ fölött nem diagonalizálható még a következő hat mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eszerint az $\mathbb{F}_2^{2 \times 2}$ -beli 16 mátrix fele diagonalizálható, fele nem.

6.43. a) Véletlen valós mátrix sajátértékei közt 0 valószínűséggel vannak azonosak, tehát a sajátértékek 1 valószínűséggel különböznek, az ilyen mátrixok pedig diagonalizálhatók.

b) A 2×2 -es 0-1-mátrixok közül kettő diagonális alakú, tehát diagonalizálható, nevezetesen a zérus-mátrix és az egység-mátrix, azaz a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok. Hat továbbiról azonnal látjuk, 0 és 1 a két sajátértékük, tehát különböző racionális számok, így diagonalizálhatók:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak -1 és 1 , az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak 2 és 0 a két sajátértéke, így ezek is diagonalizálhatók. Ez így 10 diagonalizálható mátrix a 16 lehetséges mátrix közül. A

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok sajátértékei

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

és ezek nem elemei $\mathbf{Q}$ -nak, végül a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok nem diagonalizálhatók nem csak $\mathbf{Q}$, de $\mathbb{R}$, sőt $\mathbf{C}$ fölött sem, mert sajátértékük algebrai multiplícitása 2 , de geometriai multiplícitása csak 1 . E mátrixok 2×2 -es Jordan-blokkok, ami a következő szakasz témája. Tehát a 16 mátrix közül 10 diagonalizálható, így egy 2×2 -es 0-1-mátrix $\mathbf{Q}$ fölött $10/16 = 5/8$ eséllyel diagonalizálható.

6.44. $\mu \mathbf{y}^T \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, azaz $(\mu - \lambda) \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$, ami $\lambda \neq \mu$ miatt csak $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$, azaz $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ esetén állhat fenn.

6.45. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ szimultán diagonalizálhatók, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix ($\mathbf{C}$ oszlopai alkotják a közös bázist), hogy $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}_2$, akkor $\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1$, így

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B} &= \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{B} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Fordítva, tegyük fel, hogy a diagonalizálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok felcserélhetők. A 6.26. feladatban láttuk (ott komplex mátrixokra, ami biztosítja hogy létezen sajátértékük, de azt itt biztosítja a diagonalizálhatóságuk), hogy van közös sajátvektoruk. Esetünkben ezekből közös bázis képezhető, aminek mélyén az a tény áll, hogy $\mathbf{A}$ -nak a $\mathbf{B}$ minden $\mathcal{U}$ sajátaltére invariáns altére, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, és hasonlóképp $\mathbf{B}$ -nek az $\mathbf{A}$ minden $\mathcal{V}$ sajátaltére invariáns altére, azaz $\mathbf{A}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, amit a 6.26. feladatban igazoltunk.

Az $\mathbf{A}$ sajátértékei számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $\mathbf{A}$ -nak egyetlen sajátértéke λ , és diagonalizálható, akkor $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}$. Ekkor $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$ bármely diagonalizálható $\mathbf{B}$ mátrixra, és $\mathbf{B}$ -nek bármely bázisa, melyben $\mathbf{B}$ -t diagonalizálja, diagonalizálja $\mathbf{A}$ -t is, hisz $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}$ bármely bázisban. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden mátrixra, melynek legfeljebb k különböző sajátértéke van. Legyen tehát a $k+1$ sajátértékkel rendelkező $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke λ , melynek algebrai multiplícitása legyen m , és legyen $\mathbf{A}$ diagonális alakja

$$\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix},$$

ahol így már $\lambda \notin \sigma(\mathbf{\Lambda})$ és $\mathbf{\Lambda}$ -nak k különböző sajátértéke van. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ felcserélhetők, így $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C}$ is. Blokkosítsuk az utóbbi mátrixot $\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ alakban úgy, hogy az $\mathbf{X}$ mátrix $m \times m$ -es legyen. Ekkor a felcserélhetőség következményeképp

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \\ \lambda \mathbf{U} &= \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{U}(\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}) &= \mathbf{O}, \\ \mathbf{\Lambda} \mathbf{V} &= \lambda \mathbf{V} & (\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V} &= \mathbf{O}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{I}$ nem szinguláris diagonális mátrix, ezért $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{O}$. $\mathbf{B}$ diagonalizálható, ezért a $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ mátrix is, ami egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is diagonalizálható, hisz $\mathbf{X}$ csak a $\text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ téren, $\mathbf{Y}$ csak a $\text{span}(\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$ téren hat! Így van olyan invertálható $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix}$ mátrix, hogy $\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{X} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{D}_1$, $\mathbf{Z}_2^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{Z}_2 = \mathbf{D}_2$, ahol $\mathbf{D}_1$ és $\mathbf{D}_2$ diagonális mátrixok. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{Z} &= (\mathbf{C} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{I}_m & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{Z} &= (\mathbf{C} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C} \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Minthogy a fenti két mátrix is felcserélhető, felcserélhető a $\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}$ és a $\mathbf{D}_2$ mátrix is, és mivel az előbbinek csak k sajátértéke van, ezek már, s velük $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ is szimultán diagonalizálható.

6.46. a), b) Igaz, hisz ha $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, és így $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^2\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, és ezt folytatva minden nemnegatív k -ra $\mathbf{A}^k\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, így minden p polinomra is $p(\mathbf{A})\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

c) Igaz. Ha $\mathbf{A}$ invertálható és $\mathcal{V}$ invariáns altér, akkor $\dim \mathcal{V} = \dim(\mathbf{A}(\mathcal{V}))$, így $\mathbf{A}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$. Ha $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, akkor valamely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{w}$, és $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$. Így $\mathbf{A}^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$.

d) Hamis. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátaltérre és így invariáns altérre is a $\text{span}((1, 0))$ tér, hisz a képe a zérusvektor. Ugyanakkor

$$\mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $\mathbf{A}^T$ -nak $\text{span}((1, 0))$ nem invariáns altérre.

6.47. a) $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ nem altér, így nem is invariáns altér.

b), c) $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ és $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ invariáns altérek, ui. egyrészt altérek, másrészt bármely elemük képe is az altérben van. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ és $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{V} + \mathcal{W}$, így

$$\mathbf{A}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{V} + \mathcal{W}.$$

Ha $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ és így

$$\mathbf{A}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}.$$

d) $\mathcal{V}^\perp$ általában nem invariáns altér. Például ha A a valós test fölötti lineáris leképezés, $\mathcal{I}m A$ valódi altér az egész térben, és $(\mathcal{I}m A)^\perp$ képe nem csak a nullvektorból áll, akkor $(\mathcal{I}m A)^\perp$ nem invariáns altér, hisz képe $\mathcal{I}m A$ -ban van. Egy egyszerű példa ilyen mátrixra az, amelynek első sora csupa 1-esből áll, a többi eleme 0.

6.48. a), b), c) E három mátrix nem Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, de mindegyik azzá tehető egyetlen elem megváltoztatásával, amit színesen megjelöltünk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{1} & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \textcolor{blue}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A kék 1-est 0-ra, a 2-est 1-re vagy 0-ra változtatva Jordan-mátrixokat kapunk.

d), e), f) E mátrixok Jordan-mátrixok, mert Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixok. A d)- és e)-beli mátrix két, az f)-beli három Jordan-blokkból áll.

6.49. A tétel ebben a formában nem igaz, de mindegyik felsorolt feltétel igazgá teszi! A tétel úgy lesz teljes, ha hozzátesszük, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke $\mathbb{F}$ -beli, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ lineáris tényezőkre bomlik $\mathbb{F}$ fölött. Ha $\mathbb{F}$ algebrailag zárt, azaz minden $\mathbb{F}$ fölötti nem konstans polinom minden gyöke $\mathbb{F}$ -beli, akkor az előzőleg megfogalmazott feltétel automatikusan teljesül.

6.50. a), b), c) Igaz.

d) Hamis. Hiányzik, hogy s a legkisebb adott tulajdonságú kitevő. Helyesbítve: „ $\mathbf{A}$ legnagyobb λ -blokk mérete s , ha s az a legkisebb kitevő, melyre $r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^s) = r((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s+1})$ ”.

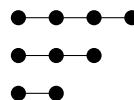
6.51. Egy mátrix és hatványai rangja és a nullitása invariáns a hasonlóságra nézve, és minden nilpotens mátrix hasonló egy olyan Jordan-mátrixhoz, melynek minden Jordan-blokkja a 0 sajátértékhez tartozik, azaz főátlójában nullák vannak. E Jordan-mátrix hatványaiban a kitevő eggyel való növelésére a Jordan-blokkban az 1-esek egy lépéssel távolodnak a főátlótól, és számuk eggyel csökken. Ha egy Jordan-blokk k -adrendű, akkor a mátrix k -adik hatványában már zérusmátrixszá válik, így a magasabb hatványokban már nem befolyásolja a rang csökkenését. Így ha $\mathbf{J}^{i-1}$ hatványban még b darab Jordan-blokkban van 1-es, akkor a $\mathbf{J}^i$ hatványban legfeljebb b -ben, azaz $r_{i-1} - r_i = b$, de $r_i - r_{i+1} \leq b$. Eszerint $r_{i-1} - r_i \geq r_i - r_{i+1}$. Átrendezve kapjuk, hogy $r_{i-1} + r_{i+1} \geq 2r_i$.

A rang-nullitási tétel (2.87. tétel) szerint a rang és a nullitás összege n , így a nullítások sorozata monoton növekvő és konkáv. Ha $n_i = \text{null}(\mathbf{N}^i)$, akkor $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k = n$, $n_i - n_{i-1} \geq n_{i+1} - n_i$, azaz $n_{i-1} + n_{i+1} \leq 2n_i$.

Ha a rangok r_i (vagy a nullítások n_i) sorozatát ismerjük, könnyen konstruálhatunk olyan nilpotens mátrixot, melynek hatványai a megadott sorozatot adják. A konstrukció a nullítások sorozatából kicsit egyszerűbb. Olyan Jordan-mátrixot kreálunk, melyben a Jordan-blokkok rendje szerinti csökkenő sorozatban vannak a főátlóban. Először képzünk n_1 darab 1×1 -es blokkot. Ezek közül megnövelünk $n_2 - n_1$ darabot 2×2 -esre (ez menni fog, mert $n_2 - n_1 \leq n_1 - n_0 = n_1$). A megnöveltek közül $n_3 - n_2$ -t tovább növelünk 3×3 -asra, aminek ismét nincs akadálya, stb. Végül egy

$$(n_1 - n_0) + (n_2 - n_1) + \dots + (n_k - n_{k-1}) = n_k = n$$

rendű mátrixot kapunk. A Jordan-láncok diagramján még egyszerűbb mindezt szemlélni. Pl. a 0, 3, 6, 8, 9 sorozat a következő struktúrához vezet:



6.52. Az $\mathbf{A}$ felsőháromszög-mátrix, így sajátértékei a főátlóbeli elemek, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. A 3-hoz tartozó sajátalteret a homogén lineáris $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg:

$$\text{rref}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \text{rref} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ami alapján $\mathcal{N}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ összes vektora az $\mathbf{x} = (x, y, z)$ jelöléssel:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

A $\lambda = 3$ -hoz tartozó sajátaltér tehát $\text{span}((1, 0, 0))$. Vizsgáljuk meg az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatványait, melyik a legnagyobb hatvány, mely még nem a zérusmátrix! Az első és második hatvány még nem a zérusmátrix:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$. Mivel $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$, ezért van olyan $\mathbf{x}_3 = (x, y, z)$ vektor, hogy $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$.

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint bármely vektor, amelyben $z \neq 0$ ilyen, legyen például $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)$. Ekkor az $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}_2$ vektorokat kiszámolva a következő láncot kapjuk:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Miután egyetlen Jordan-láncot kaptunk, a Jordan-mátrix egyetlen Jordan-blokkból áll:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisról a standra való áttérés mátrixa $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$, így $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Megismételjük e konkrét esetre az általános levezetést: az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ hatása a Jordan-lánc elemein

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2,$$

ezt átalakítva

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 3\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3,$$

ami mátrixszorzatalakba írható:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ebből leolvasható $\mathbf{A}$ alakja az $\mathcal{X}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ mátrix az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa, így $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$ valóban az $\mathbf{A}$ alakja az $\mathcal{X}$ bázisban, másrészt $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1}$.)

6.53. A karakterisztikus polinom

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2 - \lambda)^3,$$

azaz $\lambda_{123} = 2$. Mivel $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért két blokkból áll a Jordan-mátrix.

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldva a sajátaltér $\text{span}((-1, 0, 1), (0, 1, 0))$, másrészt pl. $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ olyan vektor, melyre $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így egy Jordan-lánc induló vektora lehet. A két Jordan-lánc:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ jelöléssel a Jordan-felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1}$, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.54. A láncok száma 4, mert $10 - r(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 4$. d_k és n_k a következő táblázatból számolható mechanikusan:

k	0	1	2	3	4
r_k	10	6	4	2	0
d_k		4	2	2	2
n_k			2	0	2

Tehát a k hosszú láncok n_k száma: $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, $n_4 = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{y}_2 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{y}_3 &\quad \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{y}_4 \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{z}_1 &&&& \\ \mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-3\mathbf{I}} \mathbf{w}_1 &&&& \end{aligned}$$

Így e lineáris transzformáció mátrixa a

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1\}$$

jáataltér 4 dimenziós, így a Jordan-láncok száma négy:

$$\text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Mivel $\text{rref}(\mathbf{A}^2) = \text{rref}(\text{rref}(\mathbf{A})\mathbf{A}) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, és $\mathbf{A}^3 = \mathbf{O}$, így a legnagyobb Jordan-blokk 3×3 -as. Innen ki is található a Jordan-féle normálmatrix, hisz 7 csak egyféleképp írható fel négy pozitív egész összegként, ha az egyik szám 3: $7 = 3 + 2 + 1 + 1$. Egy három hosszú Jordan-láncot bármely vektor elindít, melynek első koordinátája nem 0 (hisz $\mathbf{A}^2$ sajátaltérben minden vektor benne van, melynek első koordinátája 0). Pl. az $\mathbf{e}_1$ -ből induló Jordan-lánc a következő:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_6$ és $\mathbf{e}_7$ is eleme a sajátaltérnek, ezért ráadásra is látható, hogy $\mathbf{e}_5$ olyan vektor, mely sem a Jordan-lánc által kifeszített térben, sem a sajátaltérben, sem ezek összegében nincs benne, így egy másik lánc indul belőle:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így az áttérés mátrixa és a Jordan-féle normálmatrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A teljesség kedvéért

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.58. Első lépésként meghatározzuk az $\mathbf{A} - \mathbf{0I} = \mathbf{A}$ és az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangjait.

$$\text{rref } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\text{rref}(\mathbf{A}^2)$ kiszámolásához felhasználhatjuk az előző eredményt, $\mathbf{A}^2$ helyett $\text{rref}(\mathbf{A})\mathbf{A}$ -val számolva, hisz $\text{rref}(\text{rref}(\mathbf{A})\mathbf{A}) = \text{rref}(\mathbf{A}^2)$:

$$(\text{rref } \mathbf{A})\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}(\mathbf{A}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezután kiválasztjuk a nullterek bázisaiból a Jordan-bázis megfelelő elemeit. A redukált lépcsős alakokból meg tudjuk adni $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A}^2)$ bázisait. Ezeket oszlopvektorokként egyetlen mátrixba írva, az első oszlopokba $\mathcal{N}(\mathbf{A}^2)$, a továbbiakba $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ bázisát, ki tudjuk választani $\mathcal{N}(\mathbf{A}^2)$ azon vektorait, melyek nincsenek benne $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ -ban, tehát Jordan-láncok kezdő vektorai lehetnek.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$\underbrace{\quad}_{\mathcal{N}(\mathbf{A}^2)} \quad \underbrace{\quad}_{\mathcal{N}(\mathbf{A})}$

A redukált lépcsős alakból látható, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A}^2)$ bázisának első két vektora nem sajátvektor, így ezeket választjuk a Jordan-láncok indító vektorainak. A két Jordan-lánc:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \xleftarrow{\mathbf{A}} (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \xleftarrow{\mathbf{A}} (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

Folytassuk hasonlóképp a $\lambda = 1$ sajátértékkel. $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ és $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ redukált lépcsős alakja

$$\text{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A nullterek bázisai, és azokból a Jordan-bázis elemei:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{\mathcal{N}(\mathbf{B})} \quad \underbrace{\quad}_{\mathcal{N}(\mathbf{B}^2)}$

ahol $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$. A redukált lépcsős alakból látható, hogy az $\mathcal{N}((\mathbf{A} - \mathbf{I})^2)$ teret kifeszítő második vektor nem sajátvektor, így abból indítható a 2 hosszú Jordan-lánc. Így a két Jordan-lánc:

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \xleftarrow{\mathbf{A} - \mathbf{I}} (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

A Jordan-bázis minden vektorát kiszámoltuk, így a Jordan-mátrix és az áttérés mátrixa is felírható:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és ebből a Jordan-felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, ahol egy mátrixinvertálás után

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.59. $\chi(x) = -x^3 + 4x^2 - 9x + 10$, gyökei a sajátértékek: $2, 1 \pm 2i$. Három különböző sajátérték, tehát $\mathbf{C}$ fölött a mátrix diagonalizálható. A komplex sajátfelbontás egyúttal a komplex $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ Jordan-felbontás is, ahol:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ 3 & 1+2i & 1-2i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2}i & -i & \frac{1}{2}+i \\ -\frac{3}{2}i & i & \frac{1}{2}-i \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{bmatrix}.$$

Ebből felírható a valós $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{J}_\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}$ felbontás is, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) A karakterisztikus polinom könnyen számolható kézzel is, mivel $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ blokkfelsőháromszög-mátrix, így determinánsa

$$\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \\ = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda) \\ = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(1-\lambda).$$

A zárójeleket szükségtelen felbontani, csak az esetleges ellenőrzés kedvéért írjuk le:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 12\lambda^3 + 16\lambda^2 - 12\lambda + 4.$$

Mivel $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ gyökei $\lambda = 1 \pm i$, ezért e sajátértékek kétszeres algebrai multiplicitásúak, és sajátérték még a $\lambda = 1$. A $\lambda = 1 - i$ -hez tartozó sajátaltér a redukált lépcsős alak alapján

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

csak 1 dimenziós, mivel $\mathcal{V}_{1+i} = \text{span}(i, 1, 0, 0, 0)$. A $\lambda = 1 + i$ geometriai multiplicitása ugyancsak 1, így a normálalak

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1-i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} i & -2 & -i & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A valós normálfelbontás ennek alapján (az $a = 1$, $b = -1$ választással és így az $1 + i$ -hez tartozó Jordan-lánc valós és imaginárius részével a $\mathbf{B}$ mátrixban) $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{J}_\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{J}_\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.60. Ha az $\mathcal{U}$ altér r dimenziós, akkor A a $\mathcal{V}$ bázisának első r elemét $\mathcal{U}$ -ba viszi, így ezek koordinátás alakjában az első r elemet kivéve mindegyik 0, így A első r oszlopában az $(r+1)$ -edik sortól kezdve csak 0-k állnak, azaz A alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{U}$ egy $r \times r$ -es mátrix.

6.61. Tekintsük a véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti $\mathcal{V}$ vektorteret, és legyen $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ egy lineáris transzformáció, illetve legyen $\mathbf{A}$ a $\mathcal{V}$ egy adott bázisára vonatkozó mátrixa az A -nak. Ha A (ill. $\mathbf{A}$) karakterisztikus polinomja lineáris tényezőkre bomlik $\mathbb{F}$ fölött, és A -nak s különböző sajátértéke van, akkor a λ_i sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorok és a nullvektor vektorteret alkotnak. Jelölje ezt $\mathcal{V}_i$. Ekkor

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_s.$$

Igaz továbbá, hogy $\mathcal{V}_i$ az A -ra ($\mathbf{A}$ -ra) nézve invariáns altér, és $\mathcal{V}_i = \text{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i}) = \mathcal{N}((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i})$, ahol m_i a λ_i -hez tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete az A Jordan-féle normálalakjában.

Tekintsük az A (ill. az $\mathbf{A}$) egy Jordan-bázisát, és jelölje $\mathcal{W}_j$ a j -edik Jordan-lánc vektorai által generált alteret. Ekkor $\mathcal{W}_j$ invariáns altér A -ra ($\mathbf{A}$ -ra) nézve, és

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{W}_j = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_k,$$

ahol k a Jordan-bázis Jordan-láncainak száma.

6.62. Összesen öt hasonlósági osztályba sorolhatók a mátrixok. Egy-egy Jordan-mátrix minden osztályból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.63. A 6.61. feladatban felírtuk a Jordan-tételt direkt összeg segítségével, mely szerint ha A -nak s különböző sajátértéke van, akkor a λ_i sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorok és a nullvektor alkotta vektorteret $\mathcal{V}_i$ -vel jelölve

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_s,$$

ahol $\mathcal{V}_i$ az A -ra nézve invariáns altér, és $\mathcal{V}_i = \text{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i})$, és m_i a λ_i -hez tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete az A Jordan-féle normálalakjában. Mivel B felcserélhető A -val, ezért $A - \lambda_i I$ -vel is, így ha $(\lambda_i, \mathbf{v})$ általánosított sajátpárja A -nak, akkor

$$\mathbf{0} = B(A - \lambda_i I)^{m_i} \mathbf{v} = (A - \lambda_i I)^{m_i} B \mathbf{v},$$

azaz $(\lambda_i, B \mathbf{v})$ is általánosított sajátpár. Eszerint B -nek a $\mathcal{V}_i$ invariáns altere. Ekkor a $B|_{\mathcal{V}_i}$ leképezések Jordan-bázisainak uniója az A -nak is általánosított sajátvektorokból álló bázisa lesz. (Ez nem feltétlenül Jordan-bázisa A -nak.) Mátrixokra a bizonyítás ugyanígy megy.

6.64. A Jordan-felbontás $\varepsilon \neq 1$ esetén

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

míg $\varepsilon = 1$ esetén $\mathbf{A}$ normálalakban van, így a normál-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\varepsilon = 1$ helyen a $\mathbf{J}_{\varepsilon}$ mátrix nem folytonos függvénye ε -nak.

6.65. Tekintsük az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, illetve a hozzá tartozó $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés valós sajátértékekhez tartozó sajátaltéréinek direkt összegét $\mathcal{U}$, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$. Ez invariáns altere A -nak. Az $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n$ ugyancsak invariáns altér, hisz egy $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n$ vektor egyrészt $\mathcal{U}$ -beli, másrészt valós, mivel $\mathbf{A}$ valós elemű. Így az $A|_{\mathcal{U} \cap \mathbb{R}^n}$ lineáris transzformáció minden sajátértéke valós, így van valós vektorokból álló Jordan-bázisa. Az A eredeti, $\mathcal{U}$ -ba eső bázisvektorait ezekre cserélve igazoltuk az állítást.

6.66. Az egyszerűség kedvéért ne 1-től, hanem 0-tól sorszámozzuk a sorokat és oszlopokat. A $\{0, 1, \dots, 2m-1\}$ indexhalmazon a p_m permutáció legyen

$$p_m : i \mapsto \begin{cases} 2i, & \text{ha } 0 \leq i < m, \\ 2i+1 \bmod 2m, & \text{ha } m \leq i < 2m. \end{cases}$$

Példaként a p_2 -höz és p_3 -hoz tartozó permutálómátrixok

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrixokban az egyesek lólépésben (egy jobbra, kettő le) követik egymást. Nyilvánvaló, hogy az (i, i) pozícióban ($0 \leq i < m$) λ -kat a $(p_m(i), p_m(i)) = (2i, 2i)$ helyekre, a $\bar{\lambda}$ -kat a (i, i) -ről a $(p_m(i), p_m(i)) = (2i+1, 2i+1)$ pozícióba teszi. Az 1-esek indexe eredetileg $(i, i+1)$ alakú, ezeket a permutáció $0 \leq i < i+1 < m$ esetén a $(2i, 2i+2)$, vagy $(m \leq i < i+1 <$

2m) a $(2i+1, 2i+3)$ pozícióba viszi, tehát két elemmel az átló fölé. Különböző 1-esek különböző pozícióba kerülnek, és az össz-számuk kiadja a kettővel az átló feletti helyek számát: $(m-1) + (m-1) = 2m-2$.

6.67. Ha A -nak s különböző sajátértéke van, akkor a λ_i sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorok és a nullvektor alkotta vektorteret $\mathcal{V}_i$ -vel jelölve $\mathbb{C}^n$ (ill. $\mathbb{R}^n$, ha minden sajátérték valós) előáll

$$\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_s$$

alakban (ld. A 6.61. feladat). Ez épp azt jelenti, hogy a tér minden vektora egyértelműen előáll egy-egy különböző sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektor összegeként.

6.68. Legyen J és $\bar{J}$ alakja

$$\begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & J_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & J_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} J_{p_1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & J_{p_2} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & J_{p_k} \end{bmatrix},$$

ahol $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ az $(1, 2, \dots, k)$ egy permutációja. Legyen P az a permutáló mátrix, mely az egységmátrixból a sorok p permutációjával kapható meg. Képezzünk P -ből blokkmátrixot úgy, hogy i -edik sorát és p_i -edik oszlopát helyettesítsük a J_i rendjével azonos számú sorral, ill. oszloppal, az (i, p_i) helyen lévő 1-es helyébe pedig írjunk egy egységmátrixot. Az így kapott mátrix lesz C . Például legyen

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor P és belőle a C származtatása a fentiek szerint

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\bar{J} = CJC^T$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

6.69. $A \sim A^T$, azaz $CAC^{-1} = A^T$ azzal ekvivalens, hogy valamely C mátrixszal, és az $A = XJX^{-1}$ a Jordan-felbontással $A^T = (X^T)^{-1}J^T X^T = CXJX^{-1}C^{-1}$, azaz

$$J^T = (X^T C X) J (X^T C X)^{-1},$$

vagyis $J^T \sim J$. Elég tehát csak Jordan-mátrixokra igazolni az állítást.

Legyen C az a mátrix, melynek mellékátlója csupa egyes, egyebütt nullák vannak. Mivel $C^{-1} = C = C^T$, ezért a $CJ^T C^T$ a J^T -ből sorainak és oszlopainak fordított sorrendbe való felírásával kapható meg. Így ha J Jordan-blokk, akkor $CJ^T C^T = J$, azaz $J \sim J^T$. Ha J Jordan-mátrix, akkor $CJ^T C$ nem J , hanem abból a blokkok fordított sorrendbe való felírásával kapott mátrix, de azt tudjuk, hogy az hasonló J -hez (ld. a 6.68. feladatot), ami igazolja az állítást. Egy-szerű példán szemléltetve:

$$\begin{aligned} J^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J. \end{aligned}$$

6.70. a) Ha az n -edrendű A mátrix λ sajátértékének k az indexe, akkor választható úgy a Jordan-bázis, hogy e bázisban $A - \lambda I$ alakja

$$C^{-1}(A - \lambda I)C = A_\lambda = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X \end{bmatrix}$$

legyen, ahol Λ csak λ -hoz tartozó Jordan-blokkokat tartalmaz, rendje m , ami egyenlő λ algebrai multiplisitásával, X pedig felsőháromszög-mátrix, főátlójában zérustól különböző elemekkel. A Λ -beli legnagyobb Jordan-blokk k -adrendű, így ha $l < k$, $\Lambda^l \neq \mathbf{O}$ és

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^l &\sim A_\lambda^l = \begin{bmatrix} \Lambda^l & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X^l \end{bmatrix}, \\ (A - \lambda I)^k &\sim A_\lambda^k = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ha Λ^l -ben az i -edik az első sor, melyben van a főátló felett 1-es, és az a j -edik oszlopban van, akkor $0 < i < j \leq m$ és

$$\begin{bmatrix} \Lambda^l & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X^l \end{bmatrix} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i, \quad \begin{bmatrix} \Lambda^l & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X^l \end{bmatrix} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

Ekkor $\mathbf{e}_i \in \mathcal{N}(A_\lambda^l) \cap \mathcal{O}(A_\lambda^l)$. Ugyanakkor $\mathcal{N}(A_\lambda^k) \cap \mathcal{O}(A_\lambda^k) = \{\mathbf{0}\}$, hisz $\mathcal{N}(A_\lambda^k)$ egy bázisa $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, míg $\mathcal{O}(A_\lambda^k)$ egy bázisa $\{\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Mivel az $\mathcal{N}(A_\lambda^l)$ és az $\mathcal{O}(A_\lambda^l)$ terek dimenzióinak összege n , ezért k az a legkisebb kitevő, melyre

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{N}((A - \lambda I)^k) \oplus \mathcal{O}((A - \lambda I)^k).$$

b) $\dim \mathcal{N}((A - \lambda I)^k) = \text{null} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & X^k \end{bmatrix}$ egyenlő Λ rendjével, azaz m -mel.

6.71. Legyen $\mathbf{A}$ spektrálfelbontása

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_s \mathbf{P}_s,$$

ahol $\mathbf{A}$ -nak s különböző sajátértéke van, melyek közt λ_1 domináns, azaz $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, ha $i > 1$. Eszerint $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, egyébként a konjugáltja is sajátérték lenne, aminek azonos lenne az abszolút értéke, bár különbözne tőle.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \lambda_1^k \mathbf{P}_1 + \lambda_2^k \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_s^k \mathbf{P}_s \rightsquigarrow \\ \left(\frac{\mathbf{A}}{\lambda_1}\right)^k &= \mathbf{P}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{P}_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{P}_s \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}_1. \end{aligned}$$

Így bármely $\mathbf{y}$ vektorra $(\mathbf{A}^k/\lambda_1^k)\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{P}_1\mathbf{x}_0$, ahol $\mathbf{P}_1\mathbf{x}_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = \text{span}(\mathbf{x})$. Eszerint ha az $\mathbf{x}_0$ vektor $\mathbf{x}$ irányú összetevője nem a $\mathbf{0}$ vektor, akkor $\mathbf{P}_1\mathbf{x}_0$ a λ_1 -hez tartozó sajátvektor.

Ebből – mivel alapesetben nem ismerjük sem a λ_1 sem $\mathbf{P}_1$ értékét – úgy lesz „módszer”, hogy képzünk egy $\mathbf{x}_k$ sorozatot az $\mathbf{A}$ -val való szorzással, azaz $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}/c_k$, ahol c_k egy megfelelő konstans, mellyel megakadályozzuk, hogy az $\mathbf{x}_k$ hossza ∞ -hez vagy 0 -hoz konvergáljon. Legkönnyebben számolható megoldás, ha c_k az $\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ legnagyobb abszolút értékű koordinátája. Így $\mathbf{x}_k$ legnagyobb abszolút értékű koordinátája mindig 1 . E módszerrel a gyakorlatban nem csak a sajátvektorra, hanem λ_1 értékére is jó közelítést kapunk, hisz

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_k\|} \approx \lambda_1,$$

ha k elegendően nagy.

6.72. Felsőháromszög-mátrixok Kronecker-szorzata felsőháromszög-mátrix, így sajátértékei a főátlóból leolvashatók. Ekkor az $\sigma(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = [\lambda_i \mu_j]$ összefüggés is nyilvánvaló. Egyébként írjuk fel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ Jordan-felbontását: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}_\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{J}_\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})(\mathbf{J}_\mathbf{A} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{B})(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{D}^{-1}) \\ &= (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})(\mathbf{J}_\mathbf{A} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{-1}, \end{aligned}$$

ami igazolja, hogy $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \sim \mathbf{J}_\mathbf{A} \otimes \mathbf{J}_\mathbf{B}$, így sajátértékei azonosak, ami igazolja az állítást.

6.73. Mindegyik mátrixnak 0 és 1 a két sajátértéke, ezért meg kell vizsgálni, hogy a megadott függvények és esetleg bizonyos deriváltjaik értelmezve vannak-e e két helyen. Mindhárom függvény az 1 helyen akárhányszor differenciálható, így az 1 -hez bármekkora Jordan-blokkok tartozhatnak.

a) A $\sqrt[3]{x}$ függvény még igen, de az $\frac{1}{3}x^{-2/3}$, a deriváltja már nincs értelmezve a 0 -ban, így a 0 -hoz csak 1×1 -es Jordan-blokkok tartozhatnak, azaz csak $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ van értelmezve e függvény spektrumán, vagyis csak ezeknek a mátrixoknak értelmezzük a köbgyökét.

b) A $\sqrt[3]{x^4}$ függvény és deriváltja még értelmezve van 0 -ban, de a második derivált már nem ($f(x) =$

$x^{4/3}$, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$, $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3}$), így a 0 -hoz csak legfeljebb 2×2 -es Jordan-blokkok tartozhatnak, azaz csak $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ van értelmezve e függvény spektrumán.

c) A $\sqrt[3]{x^7}$ függvény, valamint első és második deriváltja értelmezve van a 0 -ban, de a harmadik derivált már nem ($f(x) = x^{7/3}$, $f'(x) = \frac{7}{3}x^{4/3}$, $f''(x) = \frac{28}{9}x^{1/3}$, $f^{(3)}(x) = \frac{28}{27}x^{-2/3}$). Így a 0 -hoz csak legfeljebb 3×3 -as Jordan-blokkok tartozhatnak, azaz mind a négy megadott mátrix értelmezve van e függvény spektrumán.

6.74. a) Hamis. b) Igaz. c) Igaz. d) Igaz.

Legyen $p(x) = x^2 - 5x + 4$. A feladat szerint $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, azaz p annullálja $\mathbf{A}$ -t. Mivel p főegyütthatója 1 és a gyökei különbözőek, ezért ez egyúttal az $\mathbf{A}$ minimálpolinomja is, vagyis ez a legkisebb fokú 1 -főegyütthatós annulláló polinom. Az f -hez tartozó és egyértelműen létező h Hermite-polinom így elsőfokú, vagyis $h(x) = cx + d$ alakú, melyre $f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) = c\mathbf{A} + d\mathbf{I}$. Mivel $h(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ezért

$$(h + p)(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) + p(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) + \mathbf{O} = f(\mathbf{A}),$$

de hasonlóképp $(h + 2p)(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})$ is igaz, vagyis létezik olyan másodfokú polinom, melybe helyettesítve $\mathbf{A}$ -t $f(\mathbf{A})$ -val azonos eredményt kapunk, de ilyen másodfokú polinom több is van, ez már nem egyértelmű.

6.75. Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mátrixra $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n$ pontosan akkor konvergens, ha vagy $\rho(\mathbf{A}) < 1$, vagy $\rho(\mathbf{A}) = 1$, ahol $\lambda = 1$ az egyetlen sajátérték a spektrálkörön, és a $\lambda = 1$ geometriai és algebrai multiplicitása azonos. E tétel feltételeinek nem felel meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix, mert $|\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i| = 1$, így az 1 sugarú spektrálkörön az 1 -en kívül más sajátérték is van. $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixnak az 1 kétszeres algebrai multiplicitású sajátértéke, de a sajátaltér $\text{span}((1, 0, 0, 0))$, ami 1 dimenziós, így a határérték itt sem létezik. Ezt másként is láthatjuk, hisz a bal felső 2×2 -es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ blokk a hatványozás során mindig önmagával szorozódik, azaz $\mathbf{A}^k$ bal felső blokkja $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, így $[\mathbf{A}^k]_{12} \rightarrow \infty$, ahogy $k \rightarrow \infty$. A többi mátrixnak létezik a határérték.

ke. Fejben számolva látszik, hogy az

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \text{ és a } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixok spektrálsugara $2/3$, ill. $1/\sqrt{2}$, azaz mindkettő kisebb 1-nél, így a mátrixhatványok határértéke létezik és mindkét esetben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixról látható, hogy az 1 algebrai és geometriai multiplicitása is 3, tehát létezik a határérték, ami megegyezik az 1-hez tartozó $\mathbf{P}_1$ spektrálvetítővel. Mivel $\mathbf{A}$ láthatóan diagonalizálható, ezért $\mathbf{P}_1$ -et ki tudjuk fejteni a spektrálfelbontást tartalmazó

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}$$

egyenletrendszerből. A második egyenlet kétszereséből kivonva az elsőt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}_1 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k.$$

Végül az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixnak az 1 a spektrálkörén van, és mivel az algebrai multiplicitása 1 a geometriai meg legföljebb annyi, mint az algebrai, de legalább 1, így az algebrai és a geometriai multiplicitás megegyezik. Tehát létezik a határérték, ami egyenlő az 1-hez tartozó $\mathbf{P}_1$ spektrálvetítővel. Ellentétben az előző mátrixszal, ez nem diagonalizálható, mert az $1/2$ kétszeres algebrai és egyszeres geometriai multiplicitású, így a spektrálfelbontás nem segít. A $\mathbf{P}_1$ spektrálvetítő meghatározható abból, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ mentén vetít $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ -re. Mivel

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \text{span}((1, 0, 0, 0))$, $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \text{span}((1, -\frac{1}{2}, 0, 0), (1, 1, -\frac{1}{2}, 0), (1, 1, 1, -1))$. A $\mathbf{P}_1$ vetítőmátrixra tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6.76. A Neumann-sorokról szóló tétel szerint egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mátrixra a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n$$

sor pontosan akkor konvergens, ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$, és ez esetben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Az a) és c) esetén a spektrálsugár 1, d) esetén nagyobb mint 1, így ezekben az esetekben a hatványsor divergens. A b)-beli $\mathbf{A}$ mátrixra $\rho(\mathbf{A}) = \frac{2}{3} < 1$, így a hatványsor konvergens, és egy mátrixinvertálás után

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 58\frac{2}{3} & 8 & \frac{4}{3} & 0 \\ 1254 & 171 & 24 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.77. a) Használjuk fel, hogy

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad (\sqrt[3]{x})'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}, \quad (\sqrt[3]{x})^{(3)} = \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}.$$

Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jelöléssel $f(8) = 2$, $f'(8) = \frac{1}{12} = \frac{1}{2^2 \cdot 3}$, $f''(8)/2! = -\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} = -\frac{1}{288}$, $f(8)/3! = \frac{5}{2^8 \cdot 3^4} = \frac{5}{20736}$, így

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{\frac{1}{3}} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2^2 \cdot 3} & -\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} & \frac{5}{2^8 \cdot 3^4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2^2 \cdot 3} & -\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2^2 \cdot 3} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) A mátrix egyetlen sajátértéke $\lambda = 4$, Jordan-felbontása gyorsan kiadódik, mert az $(1, 0, 0)$ vektorból indul egy Jordan-lánc:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$, ezért az $f(x) = e^{2x}$ jelöléssel $f(4) = e^8$, $f'(4) = 2e^8$, $f''(4) = 4e^8$. Ha $A = CJC^{-1}$, akkor $e^{2A} = Ce^{2J}C^{-1}$, és

$$\exp \left(2 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^8 & 2e^8 & \frac{1}{2} \cdot 4e^8 \\ 0 & e^8 & 2e^8 \\ 0 & 0 & e^8 \end{bmatrix} \\ = e^8 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért behelyettesítve a C mátrixot és inverzét

$$e^{2A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \left(e^8 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ = e^8 \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

c) Láthatóan $\lambda_1 = 3$ az egyik sajátérték. A mátrix jobb alsó 2×2 -es részéből a $\begin{vmatrix} 0-x & 4 \\ -1 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)^2$ determináns alapján a másik két sajátérték $\lambda_{23} = 2$. A Jordan-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bár – például a differenciálegyenletrendszerek megoldásában fontos szerepet játszó e^{tA} függvényben – a t változó, valójában az e^{tx} függvényben x helyébe helyettesítjük az A mátrixot, így amikor kiszámítjuk e^{tx} deriváltjait, t -t paraméternek kell tekintenünk, mert x szerint deriválunk. Tehát $(e^{tx})' = te^{tx}$. A sajátérték $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_{23} = 2$, így az $e^{tx}|_{x=3} = e^{3t}$, $e^{tx}|_{x=2} = e^{2t}$, $(e^{tx})'|_{x=2} = te^{2t}$ értékekre lesz szükségünk. Mivel $e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}$, és

$$e^{tJ} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array} \right],$$

ezért

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} e^{3t} & 4te^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} - 8te^{2t} \\ 0 & e^{2t} - 2te^{2t} & 4te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{bmatrix}$$

d) A mátrix egy Jordan-blokk, sajátértékei $\lambda_{123} = \pi$, a $\cos$ függvénynek és deriváltjainak értéke π -ben rendre $\cos \pi = -1$, $\cos' \pi = -\sin \pi = 0$, $\cos'' \pi = -\cos \pi = 1$, így

$$\cos \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.78. a) A karakterisztikus polinom $\chi(x) = (x+1)^2$, a minimálpolinom ennek osztója. Mivel az $x+1$ polinomnak nem gyöke az A mátrix, ezért a minimálpolinom $\mu(x) = (x+1)^2$, és így az Hermite-polinomot $p(x) = ax + b$ alakban keressük. Az $f(x) = x^{2023}$ és a $p(x)$ függvények és első deriváltjaik értékeit keressük a -1 helyen:

$$f(-1) = (-1)^{2023} = -1 = p(-1) = -a + b$$

$$f'(-1) = 2023 \cdot (-1)^{2022} = p'(-1) = a.$$

Innen $a = 2023$, $b = 2022$. Így

$$A^{2023} = p(A) = 2023A + 2022 \cdot I \\ = 2023 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2022 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1 & 4046 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{23} = -4$, de a -4 geometriai multiplicitása is 2, így a mátrix diagonalizálható, azaz Jordan-féle normálalakja diagonális, így a minimálpolinom másodfokú (konkrétan $\mu_A(x) = (x+2)(x+4)$, bár ezt nem fogjuk használni). Így az Hermite-polinom elsőfokú, azaz $p(x) = ax + b$ alakú, mely eleget tesz az $f(-2) = p(-2)$ és az $f(-4) = p(-4)$ feltételeknek, azaz

$$e^{-2} = p(-2) = -2a + b$$

$$e^{-4} = p(-4) = -4a + b.$$

Ebből $a = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4})$, $b = 2e^{-2} - e^{-4}$ adódik, így

$$e^A = aA + bI = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4})A + (2e^{-2} - e^{-4})I \\ = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-4}) \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} + (2e^{-2} - e^{-4})I \\ = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & 2e^2 - 2 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & 2e^2 & e^2 - 1 \\ 1 - e^2 & 2 - 2e^2 & 3 - e^2 \end{bmatrix}.$$

c) A feladat azonos az előző feladatbeli c) kérdéssel, így felhasználhatjuk abból a megoldásból, hogy a sajátértékek $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_{23} = 2$, és hogy minden sajátértékhez egyetlen Jordan-blokk tartozik, így a karakterisztikus és minimálpolinom azonos, harmadfokú. Most azonban Hermite-polinommal folytatjuk. Az Hermite-polinom legfeljebb másodfokú lehet, azaz $p(x) = ax^2 + bx + c$ alakú. Az $f(x) = e^{tx}$ és a $p(x)$ értékei a mátrix spektrumán

$$f(3) = e^{3t} = p(3) = 9a + 3b + c,$$

$$f(2) = e^{2t} = p(2) = 4a + 2b + c,$$

$$f'(2) = te^{2t} = p'(2) = 4a + b.$$

Ennek megoldása

$$\begin{aligned} a &= e^{3t} - e^{2t} - te^{2t}, \\ b &= -4e^{3t} + 4e^{2t} + 5te^{2t}, \\ c &= 4e^{3t} - 3e^{2t} - 6te^{2t}. \end{aligned}$$

Innen

$$a\mathbf{A}^2 + b\mathbf{A} + c\mathbf{I} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 4te^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} - 8te^{2t} \\ 0 & e^{2t} - 2te^{2t} & 4te^{2t} \\ 0 & -te^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{bmatrix},$$

ami azonos az előző feladatbeli megoldással.

6.79. Először belátjuk, hogy $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{tr}(\mathbf{A})}$. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, melynek spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{C}\mathbf{J}^{-1}$. $\mathbf{J}$ főátlójában az $\mathbf{A}$ sajátértékei szerepelnek, $e^{\mathbf{J}}$ főátlójában az $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ értékek. $\mathbf{J}$ és így $e^{\mathbf{J}}$ is felsőháromszög-mátrixok, ezért

$$\det e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}(\mathbf{J})}.$$

Másrészt $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, és a nyom invariáns a hasonlóságra nézve, tehát $\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{J}$, másrészt $\det(e^{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{C}e^{\mathbf{J}}\mathbf{C}^{-1}) = \det(e^{\mathbf{J}})$, vagyis

$$\begin{aligned} \det(e^{\mathbf{A}}) &= \det(e^{\mathbf{J}}) = e^{\text{tr}(\mathbf{J})} \\ &= e^{\text{tr}(\mathbf{A})}. \end{aligned}$$

Tekintsünk az $\mathbb{R}^n$ -ben egy egységkockát, és élvektorait kicsit változtassuk meg. Mennyi lesz az így kapott paralelepipedon térfogata? Az

$$\det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) \approx 1 + \varepsilon \text{tr}(\mathbf{A})$$

becslés azt mondja, hogy a térfogat megváltozása döntően (első rendben) csak az élvektorok irányába eső változástól függ (a többitől csak másodrendben). Sőt, ez tetszőleges paralelepipedonra is kiterjeszthető, hisz a

$$\det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}) \approx \det(\mathbf{B}) + \varepsilon \text{tr}(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

azt jelenti, hogy a $\mathbf{B}$ oszlopvektorai által kifeszített paralelepipedon térfogata az élvektorok kis megváltoztatása esetén döntően (első rendben) csak az élvektorok irányába eső változástól függ (a többi irányba esőtől csak másodrendben).

6.80. Ha $h(x) = p(f(x), g(x))$ függvény definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, akkor van olyan H és P polinom, hogy $h(\mathbf{A}) = H(\mathbf{A})$ és $p(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A})) = P(\mathbf{A})$. Mivel H és P megegyeznek $\mathbf{A}$ spektrumán, így $H(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A})$ (bár az nem biztos, hogy egy adott konstrukcióval kapott H és P polinomokra $H = P$, csak az, hogy megegyeznek $\mathbf{A}$ spektrumán). Általában megtehetjük azt, hogy az adott függvényazonosságot 0-ra rendezzük, így $h(x) = 0$, a másik oldalt pedig a benne szereplő függvények polinomjaként írjuk fel.

a) $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$, $p(u, v) = u + v - 1$, így $h(x) = \cos^2 x + \sin^2 x - 1$, ahol $h(x) = 0$.

Nyilván mindkét oldal értelmezve van minden négyzetes komplex mátrix spektrumán, így $\mathbf{O} = \cos^2 \mathbf{A} + \sin^2 \mathbf{A} - \mathbf{I}$, azaz $\cos^2 \mathbf{A} + \sin^2 \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

b) $f(x) = e^{ix}$, $g(x) = \cos x + i \sin x$, $p(u, v) = u - v$, $h(x) = e^{ix} - \cos x - i \sin x$. Innen $e^{i\mathbf{A}} = \cos(\mathbf{A}) + i \sin(\mathbf{A})$.

c) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, $p(u, v) = uv - 1$, $h(x) = e^x e^{-x} - 1$, ahonnan az előzőekhez hasonlóan $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = \mathbf{I}$.

6.81. a) $\mathbf{A} = \mathbf{S} - \mathbf{T}$, ahol $\mathbf{S}$ invertálható, és iterációval keressük az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ megoldását, amelyre $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{b}$, ahol $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$. Az iteráció az $\mathbf{x}_k = \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{b}$. Ez lineáris, mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_k &= \mathbf{x}_k - \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{S} - \mathbf{T})\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{h}_{k-1}. \end{aligned}$$

Tehát ez az iteráció lineáris.

b) Ha $\rho(\mathbf{B}) < 1$, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{B}^k = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$, tehát létezik az $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ inverze. Így $\mathbf{A} = \mathbf{S} - \mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ is invertálható, hisz invertálható mátrixok szorzata, tehát az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Másrészt az iteráció lépéseit visszavezetve $\mathbf{x}_0$ -ig, és felhasználva, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$ miatt $\mathbf{B}^k \rightarrow \mathbf{O}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{B}^k \mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{B} + \dots + \mathbf{B}^{k-1})\mathbf{S}^{-1}\mathbf{b} \rightsquigarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Tehát $\rho(\mathbf{B}) < 1$ esetén az iteráció valóban konvergens és az egyenletrendszer megoldásához konvergál.

c) A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix (soronként) domináns főátlójú (ld. a 6.28. feladatot), ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Legyen először $\mathbf{S} = \mathbf{D} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ (Jacobi-iteráció). $\mathbf{S}$ csak akkor invertálható, ha $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ domináns főátlójú, akkor $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Mivel $\mathbf{x}_k = \mathbf{B}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{b}$, ezért $\mathbf{S}$ -sel való beszorzás után az $\mathbf{S}\mathbf{x}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$ kifejezésből az $\mathbf{x}_k$ vektor i -edik koordinátája

$$[\mathbf{x}_k]_i = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} [\mathbf{x}_{k-1}]_j}{a_{ii}}.$$

Világos, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}$ minden sorában az elemek abszolút értékének összege kisebb 1-nél, hisz a $\mathbf{B}$ mátrix i -edik sorára

$$\sum_{j=1}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpárja $\mathbf{B}$ -nek, és $\mathbf{x}$ legnagyobb abszolút értékű koordinátája x_i , akkor

$$|\lambda x_i| = \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < |x_i|,$$

tehát $|\lambda| < 1$, azaz $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Így domináns főátlójú $\mathbf{A}$ mátrixra a Jacobi-iteráció konvergens.

Ezután legyen $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$, $\mathbf{S} = \mathbf{D} + \mathbf{L}$, $\mathbf{T} = -\mathbf{U}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U})$ (Gauss–Seidel-iteráció). $\mathbf{A}$ főátlóbeli elemei nem nullák, különben $\mathbf{D} + \mathbf{L}$ nem lenne invertálható. Mivel

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U})\mathbf{x}_{k-1} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{b},$$

ezért $\mathbf{D} + \mathbf{L}$ -el szorozva és átrendezve

$$\mathbf{D}\mathbf{x}_k = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}_k - \mathbf{U}\mathbf{x}_{k-1}.$$

Innen az $\mathbf{x}_k$ vektor i -edik koordinátája

$$[\mathbf{x}_k]_i = \frac{b_i - \sum_{j < i} a_{ij}[\mathbf{x}_k]_j - \sum_{j > i} a_{ij}[\mathbf{x}_{k-1}]_j}{a_{ii}}$$

Tegyük ezután fel, hogy $\mathbf{A}$ domináns főátlójú. Megmutatjuk, hogy $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpárja a $\mathbf{B} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U})$ mátrixnak, és $\mathbf{x}$ legnagyobb abszolút értékű koordinátája x_i , akkor $(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, azaz $-\mathbf{U}\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}$. Az egyenlőség két oldalán álló vektorok i -edik koordinátája $-u = \lambda(d + l)$, ahol

$$u = \sum_{j > i} a_{ij}x_j, \quad d = a_{ii}x_i, \quad l = \sum_{j < i} a_{ij}x_j.$$

Mivel $|x_i| > |x_j|$ minden j indexre, ezért

$$\begin{aligned} |u| + |l| &\leq \left| \sum_{j > i} a_{ij}x_j \right| + \left| \sum_{j < i} a_{ij}x_j \right| \\ &\leq |x_i| \left(\sum_{j > i} |a_{ij}| + \sum_{j < i} |a_{ij}| \right) < |x_{ii}| |a_{ii}| \\ &= |d|, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} |u| &< |d| - |l| = |d + l - l| - |l| \leq |d + l| + |l| - |l| \\ &= |d + l|, \end{aligned}$$

azaz $|u| < |d + l|$, és így az $|u| = |\lambda||d + l|$ egyenlőségből

$$|\lambda| = \frac{|u|}{|d + l|} < 1.$$

Tehát $\rho(\mathbf{B}) = \rho((\mathbf{U} + \mathbf{L})^{-1}(-\mathbf{U})) < 1$, és így az iteráció konvergens.

E két iteráció nem csak a domináns főátlójú mátrixokra konvergens. Például a Gauss–Seidel-iteráció konvergál az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához tetszőleges pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrixra (ld. a 8.37. definíciót) és tetszőleges $\mathbf{x}_0$ induló vektorral.