

7.1. c) hamis, a többi igaz. Ha $\mathbf{A}$ invertálható mátrix, akkor lehet egy áttérés mátrixa, nevezetesen az oszlopvektorai akotta $\mathcal{B}$ bázisról a standard bázisra, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$. Így a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^\top \mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}})^\top \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\top (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^\top \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}) \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_n \\ \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

A hamis állításból hiányzott, hogy $\mathbf{A}$ -nak invertálhatónak kell lennie.

7.2. a) Az $\mathbb{R}$ téren az $\langle x, y \rangle = cxy$ művelet skaláris szorzás, ami általánosítható: ha $c > 0$, akkor a $\sqrt{c}\mathbf{I}$ egy áttérés mátrixa, és így a $\mathbf{B} = (\sqrt{c}\mathbf{I})^\top (\sqrt{c}\mathbf{I}) = c\mathbf{I}$ mátrixszal

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{y} = c\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = c\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

skaláris szorzás.

b) Az

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

művelet nem skaláris szorzás, mert

$$\langle (1, -1), (1, -1) \rangle = -2,$$

ami ellentmond S4-nek. Másként fogalmazva az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix nem pozitív definit, ami abból is látszik, hogy determinánsa -3 , így nem lehet minden sajátértéke pozitív.

c) Az

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_2y_2$$

művelet nem szimmetrikus, azaz ellentmond S1-nek, mert általában

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle &= 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 2x_2y_2 \\ &\neq \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle = 3x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2, \text{ például} \\ \langle (0, 1), (1, 0) \rangle &= 0, \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 4. \end{aligned}$$

7.3. E skaláris szorzás a standard bázisban van megadva, és a $\mathbf{G}$ mátrixhoz megkeressük azt az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

mátrixot, melyre $\mathbf{G} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. E feladatra később általános módszert is megismerünk (ld. 8.46. tétel), itt azonban megelégszünk egy mátrixelemekre vonatkozó egyszerű egyenletrendszer felírásával:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Egy lehetséges megoldás és annak inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eszerint a $\mathcal{B} = \{(2, 1), (1, 0)\}$ bázisban az $\mathbb{R}^2$ standard mátrixszorzásának a feladatban megadott $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{y}$ szorzás felel meg. Mivel $\mathbf{A}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérés mátrixa, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ az $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$, egyúttal az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{A}$ áttérés mátrixa, ahol $\mathcal{A} = \{(0, -1), (-1, 2)\}$. Ez tehát az a bázis, melyben a feladatbeli skaláris szorzás standard alakúvá válik. Ellenőrzésképpen az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_{\mathcal{A}}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{y} = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_{\mathcal{A}})^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_{\mathcal{A}}) \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{A}}^\top (\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y}_{\mathcal{A}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{A}}^\top \mathbf{y}_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

7.4. a) és d) igaz, a többi hamis.

a) $\mathbf{A}$ pontosan akkor önadjungált, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}^\top}$, azaz ha $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^\top$. d) Ekkor főátlóbeli elemei egyenlők konjugáltjukkal, tehát valósak. b) A transzponáltról tanultakhoz hasonlóan $(\mathbf{A}\mathbf{B})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H$. c) Komplex $\mathbf{A}$ mátrixra nem a sortérnek, hanem az $\mathbf{A}^H$ oszlopterének merőlegese a nulltér. (Valós mátrixokra $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$, azonban komplex mátrixokra $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}})$).

7.5. a) A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség komplex terekben is érvényes alakja

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

az abszolút érték nem hagyható el, hisz komplex számok nagyság szerint nem hasonlíthatók össze.

b) A Pitagorasz-tétel megfordítása csak valós terekben igaz, komplexekben nem, azaz abból, hogy $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, nem következik komplex terekben, hogy $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

c) A háromszög-egyenlőtlenségnek ez az alakja igaz.

7.6. a) Mivel a $\mathcal{B}$ bázis vektoraiból képzett

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix a $\mathcal{B}$ -ről $\mathcal{E}$ -re való áttérés mátrixa, ezért

$$\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}},$$

így

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^\top \mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A} \mathbf{x}_{\mathcal{B}})^\top (\mathbf{A} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}) \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^\top \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{x}_B = (x_1, x_2)$ és $\mathbf{y}_B = (y_1, y_2)$ jelöli a két vektor B bázisbeli koordinátás alakját.

b) Hasonlóan az előző ponthoz $\mathbf{x}_E = \mathbf{A}_{E \leftarrow B} \mathbf{x}_B$, és $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_E^T \mathbf{y}_E = \mathbf{x}_B^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{E \leftarrow B} \mathbf{y}_B$ ahol

$$\mathbf{A}_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{E \leftarrow B}^T \mathbf{A}_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tehát a B bázisban a következő képlettel számítható a skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1. \end{aligned}$$

7.7. A 7.3. feladatban konkrét példán láttuk, és aszerint általában is igazoltuk, hogy az $\mathbf{A}^{-1}$ oszlopvektorai alkotta bázis megfelelő. Ez nyilván általában is igaz $\mathbb{R}^n$ -ben.

7.8. Mivel $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ezért $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, vagy ami vele ekvivalens, ha $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Ha $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$, akkor

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H),$$

ami ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$. De a fordított irányú implikáció nem igaz, például bármely invertálható mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, de az $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ összefüggés nem áll fenn mindegyikükre, például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix ilyen.

7.9. a) Az ortonormalitás igazolásához a skaláris szorzatok az összes lehetséges módon elvégzendők, ez $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ szorzást jelent, pl. $\langle (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle$, $\langle (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle$ értéke:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

De két mátrixszorzással is ellenőrizhető mindez, ha $\mathbf{C}$ jelöli a bázisvektorokból álló mátrixot, $\mathbf{G}$ a skalárszorzatot megadó mátrixot, akkor fenn kell állnia a $\mathbf{B}^T \mathbf{G} \mathbf{B} = \mathbf{I}$ egyenlőségnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_4.$$

b) Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor távolsága a $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}$ képlettel számolandó, ahol $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, -1, -2, -2)$. Mivel e vektor normájának négyzete

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 5,$$

így a két vektor távolsága $\sqrt{5}$.

c) Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ szögének meghatározásához szükség van a két vektor hosszára:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,$$

így $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. Másrészt

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1,$$

ezért

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

azaz a két vektor szöge $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} = 3\pi/4$.

7.10. Mivel

$$\begin{aligned} \left\langle x, x^2 - \frac{3}{4}x \right\rangle &= \int_0^1 x^3 - \frac{3}{4}x^2 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, \end{aligned}$$

ezért e két polinom merőleges a megadott skalárszorzásra nézve.

7.11. Egy páros és egy páratlan függvény szorzata páratlan, és páratlan függvény integrálja egy origóra szimmetrikus intervallumon 0, ezért

$$\int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^1 gh = 0,$$

tehát $(f, g)_{\angle} = (g, h)_{\angle} = \pi/2$, azaz $f \perp g$ és $g \perp h$. Ugyanakkor

$$\int_{-1}^1 fh = \int_{-1}^1 x \left(\frac{5}{4}x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2},$$

tehát $(f, h)_{\angle} = \pi/3$, azaz 60° .

7.12. A három függvény páronként merőleges, hisz

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} ab \sin x \, dx &= \int_0^{2\pi} ac \cos x \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} bc \sin \cos x \, dx = 0\end{aligned}$$

függetlenül a, b vagy c értékétől.

Az a konstansfüggvény akkor lesz egységnyi hosszú, ha

$$1 = \int_0^{2\pi} a^2 \, dx = 2a^2\pi,$$

amiből $a = 1/\sqrt{2\pi}$. A b sin függvény akkor lesz egységnyi hosszú, ha

$$1 = \int_0^{2\pi} b^2 \sin^2 x \, dx = b^2\pi$$

amiből $b = 1/\sqrt{\pi}$. Hasonlóképp

$$1 = \int_0^{2\pi} c^2 \cos^2 x \, dx = c^2\pi$$

amiből $c = 1/\sqrt{\pi}$. Tehát az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$$

függvények páronként merőleges egységvektorok a megadott skalárszorzással definiált euklideszi térben.

Hasonlóan igazolható, hogy bármely $k, l, n \in \mathbb{N}^+$ egész értékre $k \neq l$ esetén

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos lx \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin lx \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right\rangle &= 1, \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\rangle &= 1.\end{aligned}$$

Ezeket a függvényeket használjuk a 2π szerint periodikus függvényeknek egy sorozattal való jellemzésére (ld. Fourier-féle sorfejtés).

7.13. Az alábbi levezetés második sorához C3, a következőhöz C2 alkalmazása szükséges (felhasználva azt is, hogy $-1 = -1$):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, -\mathbf{y} \rangle + \langle -\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle -\mathbf{y}, -\mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

7.14. Az első formula igazolásából:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.\end{aligned}$$

Hasonlóan, C3, C2 és végül C1 alkalmazásával:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.\end{aligned}$$

E kettő alapján:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást.

7.15. 1) A megfelelő polarizációs formulába helyettesítve a megadott értékeket

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (28 - 4 - 16) = 4,\end{aligned}$$

amiből

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2},$$

így $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ($\alpha = 60^\circ$).

2) Itt a másik polarizációs formulát használjuk:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2) = \frac{1}{4} (6^2 - 6^2) = 0,$$

tehát a két vektor merőleges egymásra, azaz $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

7.16. A polarizációs formulák egyike szerint

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2),$$

másrészt a valós euklideszi terekre adott példák közt láttuk, hogy az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra az

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$$

formula skaláris szorzást definiál. Így

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) &= \frac{1}{2} (\text{tr}((\mathbf{A} + \mathbf{B})^T (\mathbf{A} + \mathbf{B})) - \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) - \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{B})) \\ &= \frac{1}{2} (18 - 9 - 9) = 0.\end{aligned}$$

Tehát e térben $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ merőlegesek.

7.17. A definíció alapján

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2-i & i \end{bmatrix}^H &= \begin{bmatrix} 2+i \\ -i \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1-i & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}^H &= \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 2+i \\ 1-2i \end{bmatrix}^H &= \begin{bmatrix} 2-i & 1+2i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.18. A három skaláris szorzat 0, $-3i$ és 6, ui.

$$\begin{aligned} (2+i, 2-i) \cdot (2+i, -2+i) \\ &= \begin{bmatrix} 2+i \\ 2-i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 2+i \\ -2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-i & 2+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+i \\ -2+i \end{bmatrix} \\ &= (2-i)(2+i) + (2+i)(-2+i) = 5-5 \\ &= 0 \\ (2+2i, 3-2i) \cdot (2-i, i) \\ &= \overline{(2+2i)}(2-i) + \overline{(3-2i)}i \\ &= (2-2i)(2-i) + (3+2i)i \\ &= 2-6i+3i-2 \\ &= -3i \\ (2+i, 3-i, i) \cdot (2-i, 1+i, i) \\ &= \overline{(2+i)}(2-i) + \overline{(3-i)}(1+i) + \bar{i} \cdot i \\ &= (2-i)(2-i) + (3+i)(1+i) - i^2 \\ &= 3-4i+2+4i+1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

7.19. Kifejtve az $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ négyzetet kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2).$$

A másik formulához $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ kifejtésével

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Így $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, amiből

$$\operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2).$$

Mivel $\operatorname{Im} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle$, ezért

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle &= \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i \operatorname{Im} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + i \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, i\mathbf{y} \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{4} i (\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - i\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 + i\|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2). \end{aligned}$$

7.20. a) Az S^* a balra tolás, azaz

$$S^*: (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots),$$

ui. bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^2$ vektorra

$$\begin{aligned} \langle S^* \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_{i+1}} b_i \\ &= \overline{a_1} b_0 + \overline{a_2} b_1 + \dots \\ &= \overline{a_0} 0 + \overline{a_1} b_0 + \overline{a_2} b_1 + \dots \\ &= \langle \mathbf{a}, S\mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

Legyen $H = S + S^*$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle H\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \overline{0 + a_1} b_0 + \overline{a_0 + a_2} b_1 + \overline{a_1 + a_3} b_2 + \dots \\ &= \overline{a_1} b_0 + \overline{a_0} b_1 + \overline{a_2} b_1 + \overline{a_1} b_2 + \overline{a_3} b_2 + \dots \\ &= \overline{a_1} b_0 + \overline{a_0} b_1 + \overline{a_2} b_1 + \overline{a_1} b_2 + \overline{a_3} b_2 + \dots \\ &= \overline{a_0} (0 + b_1) + \overline{a_1} (b_0 + b_2) + \overline{a_2} (b_1 + b_3) + \dots \\ &= \langle \mathbf{a}, H\mathbf{b} \rangle, \end{aligned}$$

tehát $H^* = H$. Hasonlóképp az $F = S - S^*$ leképezésre

$$\begin{aligned} \langle F\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \overline{0 - a_1} b_0 + \overline{a_0 - a_2} b_1 + \overline{a_1 - a_3} b_2 + \dots \\ &= -\overline{a_1} b_0 + \overline{a_0} b_1 - \overline{a_2} b_1 + \overline{a_1} b_2 - \overline{a_3} b_2 + \dots \\ &= -(\overline{a_1} b_0 - \overline{a_0} b_1 + \overline{a_2} b_1 - \overline{a_1} b_2 + \overline{a_3} b_2 - \dots) \\ &= -(\overline{a_0} (0 - b_1) + \overline{a_1} (b_0 - b_2) + \overline{a_2} (b_1 - b_3) + \dots) \\ &= -\langle \mathbf{a}, F\mathbf{b} \rangle = -\langle F^* \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \end{aligned}$$

azaz $F^* = -F$.

7.21. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ és $\mathbb{C}^m$ euklideszi tereket a standard skaláris szorzással. A lineáris $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ leképezés adjungáltja az a B lineáris leképezés, melyre $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$. Ha A mátrixa $\mathbf{A}$, akkor B mátrixa $\mathbf{A}^H$, ui.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle &= \mathbf{x}^H A\mathbf{y} = \mathbf{x}^H (\mathbf{A}^H)^H \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{A}^H \mathbf{x})^H \mathbf{y} \\ &= \langle \mathbf{A}^H \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Legyen $\mathcal{V}$ a végtelenszer differenciálható és négyzetesen integrálható $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények tere az

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}g, \quad \forall f, g$$

skalárszorzzattal. Az integrálhatóságukból következik, hogy bármely $f \in \mathcal{V}$ függvényre

$$\lim_{\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0.$$

Így

$$\begin{aligned} \langle f, Dg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}g' = [\bar{f}g]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'g \\ &= \langle -Df, g \rangle. \end{aligned}$$

Tehát a D -hez van olyan lineáris transzformáció, nevezetesen $-D$, melyre $\langle f, Dg \rangle = \langle -Df, g \rangle$, tehát a D -nek létezik adjungáltja, a $-D$, így az ferdén önadjungált.

$$\begin{aligned}\langle f, D^2g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f} g'' = [\bar{f} g']_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}' g' \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}' g' = - [\bar{f}' g']_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'' g \\ &= \langle D^2f, g \rangle.\end{aligned}$$

Tehát D^2 adjungáltja létezik, és megegyezik D^2 -tel, ami így önadjungált. Végül vizsgáljuk meg az $-iD$ operátort.

$$\begin{aligned}\langle f, -iDg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(-i)g' = [\bar{f}(-i)fg]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'ig \\ &= i \langle Df, g \rangle = \langle -iDf, g \rangle.\end{aligned}$$

Tehát $-iD$ önadjungált.

7.22. Levezethető S3-ból is, hisz ha $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = d$, akkor

$$d = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} + \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 2d,$$

ami csak $d = 0$ esetén áll fenn. (S1-nek nem mond ellent semmilyen d érték, így abból nem vezethető le, hogy $d = 0$.)

7.23. Ha ismerjük mindkét kód generátormátrixát, melynek sorvektorai az altér egy bázisát adják, be kell látnunk, hogy e bázisvektorok mindegyike merőleges mindegyikre – beleértve magát is. Így bármely két lineáris kombinációjuk is merőleges lesz egymásra. Ehhez elég ellenőrizni, hogy a megadott $\mathbf{G}$ generátormátrixra $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{O}$. Az *a)* feladatban meg van adva $\mathbf{G}$, a *b)* feladatban

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_5^2.$$

Egyszerű mátrixszorzás igazolja, hogy a $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{O}$ fennáll mindkét esetben. Ez azonban csak azt igazolja, hogy a $\mathcal{C}$ kód duálisára $\mathcal{C} \leq \mathcal{C}^\perp$.

a) Az, hogy egy $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^8$ vektor merőleges-e $\mathcal{C}$ minden vektorára, azaz benne van-e a $\mathcal{N}(\mathbf{G})$ nulltérben, annak eldöntésével ekvivalens, hogy $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ fennáll-e. Mivel a nulltér dimenzióját e homogén egyenletrendszer szabad változóinak száma adja meg, ami $r(\mathbf{G}) = 4$ miatt $8 - 4 = 4$, ezért $\dim \mathcal{C}^\perp = 4$, tehát $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$. (A Hamming-kódra vonatkozóan ld. a 2.69. feladatot.)

b) Mivel a $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz az $x_1 + 2x_2 = 0$ összes megoldása az $x_1 = t$ paraméterválasztással $x_2 = -x_1/2 = 2x_1 = 2t$, azaz a $\mathcal{N}(\mathbf{G}) = \text{span}((1, 2))$, tehát $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$.

A bizonyítások befejezése következhet a 7.24. feladat *b)* pontjában bizonyítandó $\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^\perp = n$ összefüggésből is, ui. az *a)* esetben $n = 8$, $\dim \mathcal{C} = 4$, így $\dim \mathcal{C}^\perp = 8 - 4 = 4$, azaz, és hasonlóképp a *b)* esetben $n = 2$, $\dim \mathcal{C} = 1$, így $\dim \mathcal{C}^\perp = 2 - 1 = 1$, azaz $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$. De pl. a kiegészített Hamming-kódra

vonatkozó állítás igazolható csak e kódok definíciójára és a Hamming-kód 1-hibajavító voltára hivatkozva is, csak a kódokra vonatkozó érveléssel is, amit az Olvasóra hagyunk.

7.24. *a)* Világos, hisz az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásai pontosan azok a vektorok, melyek merőlegesek $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{W}$ minden vektorára, és ez épp $\mathcal{W}^\perp$.

b) Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai a sor-tér merőlegesét adják, és mivel a kötött és szabad változók összege n , ezért $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = n$.

c) Így ha $\mathcal{W} = \mathcal{W}^\perp$, akkor $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{W}^\perp = k$, és így $k + k = n$, azaz $k = \dim \mathcal{W} = \frac{n}{2}$.

d) $(\mathcal{W}^\perp)^\perp \supseteq \mathcal{W}$ nyilvánvaló, viszont ha $\dim \mathcal{W} = k$, akkor $\dim \mathcal{W}^\perp = n - k$, végül $\dim(\mathcal{W}^\perp)^\perp = n - (n - k) = k$. Tehát $\dim(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \dim \mathcal{W}$, így $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

7.25. Indexeljük a város lakóit 1-től v -ig, bizottságaik legyenek B_i ($i = 1, 2, \dots, b$), a B_i -hez tartozó $\mathbf{b}_i \in \mathbb{F}_2^v$ karakterisztikus vektort definiáljuk a következőképp:

$$[\mathbf{b}_i]_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \in B_i, (j = 1, 2, \dots, v), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel két bizottság közös tagjainak száma páros, és tagjainak száma is páros, ezért $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ minden i és j esetén. Így a $\mathbf{b}_i$ vektorok páronként merőlegesek egymásra. Másrészt azonban minden vektor önmagára is merőleges, így a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_b$ vektorok által kifeszített $\mathcal{W}$ altér bármely $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorára

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_b \mathbf{b}_b) \cdot (y_1 \mathbf{b}_1 + \dots + y_b \mathbf{b}_b) \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0.\end{aligned}$$

Eszerint a $\mathcal{W}$ altér minden vektora merőleges az altér minden vektorára.

A dimenziótétel szerint, ha $\mathcal{V}$ olyan euklideszi tér, hogy $\mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, márpedig $\mathbb{F}_2^v$ a standard skaláris szorzattal ilyen, és $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ egy tetszőleges altér, akkor

$$\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp.$$

Ennek azonnali következménye, hogy ha $\mathcal{W}$ olyan altér, melynek minden vektora merőleges az altér összes vektorára, azaz $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}^\perp$, akkor

$$\dim \mathcal{W} \leq \frac{1}{2} \dim \mathcal{V}.$$

Ez abból adódik, hogy a dimenziótétel szerint $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp \geq 2 \dim \mathcal{W}$. Így $\dim \mathcal{W} \leq v/2$, az altér nullvektortól különböző elemeinek száma tehát legfeljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$. E becslés éles, hisz egy v elemű halmazból $\lfloor v/2 \rfloor$ pár képezhető, e párok összes nem üres részhalmazainak száma megegyezik a felső becsléssel. Mondjuk ezt kapjuk, ha minden bizottságnak házaspárok a tagjai, és mindenki házasa (kivéve esetleg egyetlen embert, aki egyik bizottságba sem kerül be).

7.26. a) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tükörképe a $\mathcal{H}$ hipersíkra $\mathbf{y}$, ha egyrészt $\text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} = \text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{y}$, másrészt $\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} = \text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Innen $\mathbf{y} = 2\text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} - \mathbf{x}$. Másrészt $\text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{nn}^T \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T) \mathbf{x}$. Mindezeket összevetve

$$\mathbf{y} = 2(\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{nn}^T) \mathbf{x}.$$

Az $\mathbf{n} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$ helyettesítés igazolja az

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{bb}^T}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \right) \mathbf{x}$$

összefüggést.

b) A $\mathbf{b} = (1, -1, 1, 1)$ vektort normálva kapjuk, hogy $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$, így

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - 2\mathbf{nn}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Egy $\mathcal{A}$ altérre való tükrözés definíciójában lemoshatjuk az a) pontban mondottakat: Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tükörképe az $\mathcal{A}$ altérre $\mathbf{y}$, ha egyrészt $\text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{y}$, másrészt $\mathbf{x} - \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Innen

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= 2\text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{x} - \mathbf{x} = 2\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \mathbf{x} \\ &= \left(2\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I} \right) \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Tehát a teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterére való merőlegesen tükröző lineáris transzformáció mátrixa $2\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I}$.

7.27. A merőleges vetítés mátrixa a $\mathbf{b} = (1, 2, 2, 4)$ egyenesére

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{bb}^T}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{b}$ normálvektorú $\mathcal{H}$ hipersíkra való merőleges vetítés mátrixa

$$\text{proj}_{\mathcal{H}} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{bb}^T}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 24 & -2 & -2 & -4 \\ -2 & 21 & -4 & -8 \\ -2 & -4 & 21 & -8 \\ -4 & -8 & -8 & 9 \end{bmatrix},$$

míg a tükrözés mátrixa

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{bb}^T}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 23 & -4 & -4 & -8 \\ -4 & 17 & -8 & -16 \\ -4 & -8 & 17 & -16 \\ -8 & -16 & -16 & -7 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{x} = (6, 7, 7, 4)$ vektor normálvektor egyenesére eső merőleges vetülete $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{x} = (2, 4, 4, 8)$, a hipersíkra eső merőleges vetület $\text{proj}_{\mathcal{H}} \mathbf{x} = (4, 3, 3, -4)$, a tükörkép $\mathbf{T}\mathbf{x} = (2, -1, -1, -12)$.

7.28. a) Hamis. b) Igaz. c) Igaz. d) Hamis. e) Igaz.

a) Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ teljes oszloprangú mátrix, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixa. Ekkor $\mathbf{A}$ Gram-mátrixa $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, ami egy $k \times k$ -as invertálható mátrix. Amennyiben $\mathbf{A}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak (az ilyen mátrixra mondjuk, hogy szemior-togonális), akkor a Gram-mátrix az egység mátrix, így a vetítőmátrix $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

d) $\mathbf{A}$ pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha vetítés mátrixa és szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

7.29. Mindhárom állítás igaz.

7.30. Az első három mátrix vetítés mátrixa, az utolsó nem. A második és harmadik mátrix szimmetrikus, így merőleges vetítés mátrixa.

7.31. a) Az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ képlet alkalmazásával:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

míg a b) esetben

$$\frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.32. Ha $\mathbf{P}$ vetítés mátrixa, akkor pontosan akkor merőleges e vetítés, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$. Ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^H$, akkor $\mathcal{N}(\mathbf{P}^H) = \mathcal{N}(\mathbf{P})$, és mivel $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{P}^H)$, ezért $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{P})$. Ha pedig $\mathcal{O}(\mathbf{P}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{P})$, akkor $\mathcal{N}(\mathbf{P}^H) = \mathcal{N}(\mathbf{P})$. Mivel $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, ezért $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{P}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{P})^\perp$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \perp \mathcal{O}(\mathbf{P})$. Tehát $\mathbf{P}$ merőleges vetítés mátrixa.

7.33. Az $\mathbf{u} = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 2, 1)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 2)$ jelölésekkel a Gram-mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A megoldandó $\mathbf{G}\mathbf{c} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A merőleges vetület

$$\text{proj } \mathbf{x} = c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7.34. Látható, hogy a teret kifeszítő három vektor páronként merőleges. Mindegyik hossza 3, így az $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 0, 2)$, $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(-2, 2, 0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}(1, 2, 0, -2)$ vektorok ortonormált bázisát alkotják az általuk kifeszített térnek. Így az $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)$ vektor e térre eső merőleges vetülete

$$\sum_{k=1}^3 (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_k = 12\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 = (1, 2, 0, 4).$$

Számolhatunk úgy is, hogy az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixra $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, így a merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ahonnan azonnal leolvasható a merőleges vetület.

7.35. Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \dots | \mathbf{v}_n]$ szemiortogonális, azaz oszlopvektorai ONR-t alkotnak, akkor $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, másrészt az $\mathbf{A}$ -t oszlopaira, az $\mathbf{A}^T$ mátrixot sorvektoraira blokkosítva – ahogy azt a 129. oldalon a 4. pontban láttuk – a merőleges vetítés mátrixára

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$$

adódik.

7.36. a) Igaz. b) Hamis. c) Hamis. d) Igaz.

b) és c) nem lehet igaz, hisz más tér alterei, pl. $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \leq \mathbb{C}^n$, $\mathcal{N}(\mathbf{A} \mathbf{A}^H) \leq \mathbb{C}^m$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \leq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) \leq \mathbb{R}^n$.

Az a) és c) egyszerre igaz vagy hamis, hisz egyik a másiktól megkapható az $\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}^H$ felcserélésével.

a) Az $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ igazolásához megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$, ui.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) &\leadsto \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \leadsto \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\leadsto \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Fordítva, ha $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$, akkor $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ui.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) &\leadsto \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \leadsto \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \\ &\leadsto (\mathbf{A} \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{x}) = 0 \leadsto \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A fenti kitüntetett alterek merőleges kiegészítő alterei is azonosak, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$, ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. (Ld. később a 7.48. tételben.)

7.37. a) Legyen $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ egy szimmetrikus, $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ egy ferdén szimmetrikus n -edrendű mátrix. Mivel $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ az azonos indexű mátrixbeli elemek szorzatának összege, ezért

$$\langle \mathbf{S}, \mathbf{F} \rangle = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{F}) = \sum_{i,j} s_{ij} f_{ij} = \sum_{i < j} (s_{ij} f_{ij} - s_{ij} f_{ij}) = 0,$$

ugyanis $f_{ii} = 0$, $s_{ji} = s_{ij}$ és $f_{ji} = -f_{ij}$.

b) Az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathcal{S}$ -re eső merőleges vetülete az a szimmetrikus $\mathbf{S}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} - \mathbf{S} \perp \mathcal{S}$. Az $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ választás megfelel, ugyanis $\mathbf{S}$ szimmetrikus, hisz $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$. Másrészt $\mathbf{A} - \mathbf{S} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, ami ferdén szimmetrikus, így merőleges $\mathcal{S}$ -re. Az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathcal{F}$ -re eső merőleges vetülete $\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, ami az előzőkhöz hasonlóan igazolható.

c) Mivel $\mathcal{S} \perp \mathcal{F}$ és bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, valamint $\mathcal{S} \cap \mathcal{F} = \{\mathbf{O}\}$, ezért $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{F}$. Megjegyezzük, a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére való bontás egyértelműsége, valamint a terek dimenzióira való hivatkozás is használható az állítás bizonyításában. Utóbbi esetén ui. $\dim(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\dim(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}n(n-1)$, és $\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2 = \dim(\mathbb{R}^{n \times n})$.

7.38. Az $\{1, x, x^2\}$ nyilván független rendszer, így báza a legfeljebb másodfokú polinomok alterének. A $\mathbf{G} \mathbf{c} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer felírásához először kiszámítjuk a Gram-mátrixukat. Ehhez csak hatványfüggvények integráljára van szükség, ami fejben is számolható, ráadásul $\mathbf{G}$ szimmetrikus:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

és hasonlóképpen

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle 1, x^4 \rangle \\ \langle x, x^4 \rangle \\ \langle x^2, x^4 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

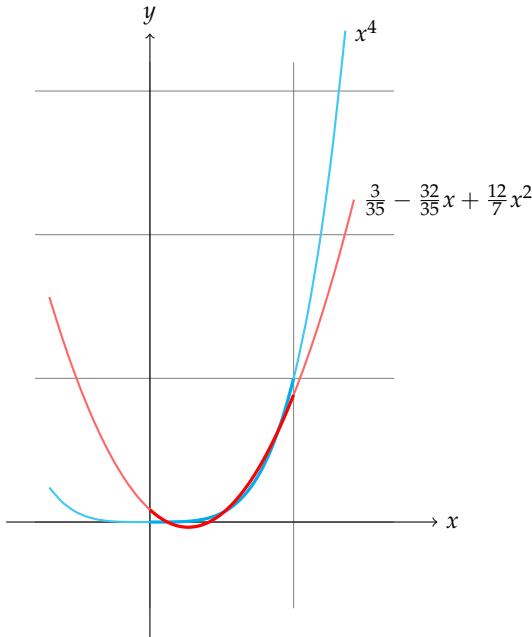
A $\text{rref}[\mathbf{G} | \mathbf{b}]$ mátrix

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/35 \\ 0 & 1 & 0 & -32/35 \\ 0 & 0 & 1 & 12/7 \end{bmatrix},$$

ahonnan a $\mathbf{G} \mathbf{c} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása $(3/35, -32/35, 12/7)$, így a keresett polinom

$$p(x) = \frac{3}{35} - \frac{32}{35}x + \frac{12}{7}x^2.$$

Hogy lássuk is, ábrázoljuk az x^4 függvényt és a $p(x)$ polinomot. Jól látható a jó közelítés a $[0, 1]$ intervallumon:



7.39. a) Legyen $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris leképezés és tekintsük a $B_{\mathbf{w}}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}; \mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}}$ leképezést. Ez lineáris, hisz $B_{\mathbf{w}}(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = cB_{\mathbf{w}}\mathbf{u} + B_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$. Riesz-reprezentációs tétele szerint létezik olyan $\mathbf{b}_{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$ vektor, hogy minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $B_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \langle \mathbf{b}_{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}}$. Defináljuk az A^* leképezést a következőképp:

$$A^*: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}; \mathbf{w} \mapsto \mathbf{b}_{\mathbf{w}}.$$

Ekkor tehát $\langle A^*\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}}$. Be kell még látnunk, hogy A^* lineáris. Legyen $c \in \mathbb{K}$, $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{W}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle A^*(c\mathbf{w} + \mathbf{z}), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} &= \langle c\mathbf{w} + \mathbf{z}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= c\langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}} + \langle \mathbf{z}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= c\langle A^*\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} + \langle A^*\mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle cA^*\mathbf{w} + A^*\mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Mivel ez minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra fennáll, így

$$A^*(c\mathbf{w} + \mathbf{z}) = cA^*\mathbf{w} + A^*\mathbf{z},$$

tehát A^* lineáris. Végül

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, A\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}} &= \langle A^*\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \overline{\langle \mathbf{v}, A^*\mathbf{w} \rangle_{\mathcal{V}}} = \overline{\langle A^{**}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathcal{W}}} \\ &= \langle \mathbf{w}, A^{**}\mathbf{v} \rangle_{\mathcal{W}}, \end{aligned}$$

ami igazolja, hogy $A^{**} = (A^*)^* = A$.

b) Legyen az $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineáris leképezés mátrixa az ortonormált $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ bázispárban $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m \times n}$, az A^* leképezése a $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ bázispárban $\mathbf{X} = [x_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Mivel

$$\mathbf{A}\mathbf{b}_j = \mathbf{A}\mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^m a_{kj}\mathbf{c}_k, \quad A^*\mathbf{c}_i = \mathbf{X}\mathbf{c}_i = \sum_{k=1}^n x_{ki}\mathbf{b}_k,$$

ezért

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left\langle \mathbf{c}_i, \sum_{k=1}^m a_{kj}\mathbf{c}_k \right\rangle_{\mathcal{W}} = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_j \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= \langle A^*\mathbf{c}_i, \mathbf{b}_j \rangle_{\mathcal{V}} = \left\langle \sum_{k=1}^n x_{ki}\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j \right\rangle_{\mathcal{V}} \\ &= \langle x_{ji}\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j \rangle_{\mathcal{V}} = \overline{x_{ji}} \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{A} = \mathbf{X}^H$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^H$.

c) Egy ortonormált bázispárban A mátrixát jelölje $\mathbf{A}$, akkor $\mathcal{I}m A = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{K}er A = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, így $\mathcal{I}m(A) = \mathcal{K}er(A^*)^\perp$ és $\mathcal{I}m(A^*) = \mathcal{K}er(A)^\perp$ azonnali következménye a lineáris algebra alaptételének – figyelembe véve az előző pont eredményét, mely szerint A^* mátrixa $\mathbf{A}^H$.

d) Legyen $p(x) = ax + b$, $q(x) = cx + d$. Az $\langle A^*p, q \rangle = \langle p, Aq \rangle$ alkalmazásához

$$\begin{aligned} \langle p, Aq \rangle &= \int_0^1 (ax + b)(dx + c) dx \\ &= \int_0^1 (dax^2 + (bd + ac)x + bc) dx \\ &= \frac{1}{3}da + \frac{1}{2}(bd + ac) + bc \\ &= \left(\frac{1}{2}a + b\right)c + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)d. \end{aligned}$$

Legyen $A^*p = A^*(ax + b) = \alpha x + \beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle A^*p, q \rangle &= \int_0^1 (\alpha x + \beta)(cx + d) dx \\ &= \int_0^1 (\alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d)x + \beta d) dx \\ &= \frac{1}{3}\alpha c + \frac{1}{2}(\beta c + \alpha d) + \beta d \\ &= \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)c + \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)d. \end{aligned}$$

A két eredmény összevetéséből

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}a + b, \quad \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\alpha + \beta,$$

amiből

$$\alpha = 4a + 9b, \quad \beta = -\frac{5}{3}a - 4b, \quad \text{azaz}$$

$$A^*(ax + b) = (4a + 9b)x - \frac{5}{3}a - 4b.$$

e) Legyen a $D: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ esetben $p(x) = ax + b$. A $D: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ esetben $D^*: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, ekkor legyen $p(x) = a$. Mindkét esetben legyen $D^*(p) = \alpha x + \beta$, és $q(x) = cx + d$. Keressük a D^* leképezést, melyre

$$\langle D^*p, q \rangle = \langle p, Dq \rangle.$$

Az első esetben

$$\begin{aligned} \langle p, Dq \rangle &= \int_0^1 (ax + b)c dx = \frac{1}{2}ac + bc, \\ \langle D^*p, q \rangle &= \int_0^1 (\alpha x + \beta)(cx + d) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)c + \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)d. \end{aligned}$$

a második esetben

$$\langle p, Dq \rangle = \int_0^1 ac \, dx = ac.$$

Az együttthatók összehasonlításból az első esetben

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}a + b, \quad \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0,$$

amelynek $\alpha = 6a + 12b$, $\beta = -3a - 6b$ a megoldása, azaz

$$D^*(ax + b) = (6a + 12b)x - 3a - 6b.$$

A második esetben az egyenletrendszer

$$\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta = a, \quad \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0,$$

amelynek $\alpha = 12a$, $\beta = -6a$, azaz

$$D^*(ax + b) = 12ax - 6a.$$

Annak igazolása, hogy végtelen dimenziós esetben nem létezik a D deriváltleképezésnek adjungáltja, alkalmazzuk a parciális integrál képletet:

$$\begin{aligned} \langle D^*p, q \rangle &= \langle p, q' \rangle = \int_0^1 pq' \\ &= [pq]_0^1 - \int_0^1 p'q \\ &= p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle Dp, q \rangle \leadsto \\ \langle (D^* + D)p, q \rangle &= p(1)q(1) - p(0)q(0). \end{aligned}$$

Rögzítsük a p polinomot, és amennyiben létezik D^* , legyen $h = (D^* - D)p$. Eszerint van olyan h polinom, hogy minden q polinomra

$$\langle h, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

Ilyen h polinom azonban csak a $h(x) = 0$ lehet, hisz miközben a jobb oldal csak $q(0)$ -tól és $q(1)$ -től függ, a bal oldal $h \neq 0$ esetén q más értékeitől is. Együtt az is látszik, hogy ha $\mathbb{R}[x]$ -nek azt az alterét tekintjük, melybe a $p(0) = p(1)$ feltételt is kielégítő polinomok tartoznak, akkor a $D^* + D = 0$, létezik D^* , konkrétan $D^* = -D$, azaz D ezen a téren ferdén szimmetrikus.

7.40. 1) Igaz. 2) Hamis. 3) Hamis. 4) Igaz. 5) Igaz.

2) A normálegyenlet helyesen $\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}$.

3), 4) Komplex mátrix kitüntetett alterei közt nem szerepel az $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ tér, helyette az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$. Ezek valós esetben azonosak. A minimális abszolút értékű optimális megoldás – mely mindig létezik – az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}})$ térbe esik.

5) E minimális abszolút értékű optimális megoldás egyenlő az $\mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ szorzattal (épp e tulajdonsággal definiáltuk az $\mathbf{A}$ pszeudoinverzét).

7.41. A normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \leadsto \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Az összes megoldás

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sortérbe eső (minimális abszolút értékű) egyetlen optimális megoldás $\hat{\mathbf{x}} = (4/5, 8/5)$.

7.42. A sortérbe eső (minimális abszolút értékű) egyetlen optimális megoldás $\hat{\mathbf{x}} = (3/2, 0, 1/2)$.

Az egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakja azt mutatja, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az optimális megoldások tehát nem kaphatók meg az egyenletrendszer megoldásával. Az egyenletrendszerhez tartozó normálegyenletet $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$, melynek összes megoldása megadja az eredeti egyenletrendszer összes optimális $\bar{\mathbf{x}}$ megoldását! A normálegyenlet bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja

$$\text{rref} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 30 & 12 & 15 \\ 3 & 12 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Innen a normálegyenlet összes megoldása, azaz az eredeti egyenletrendszer összes optimális megoldása

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A normálegyenlet megoldásából látjuk, hogy a nullteret az $(-1/3, -1/3, 1)$ vektor feszíti ki, így a sortérbe eső megoldás merőleges e vektorra, így kielégíti az

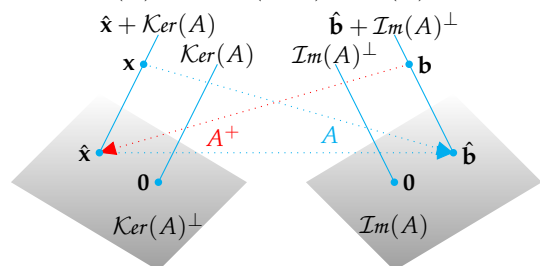
$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + z = 0$$

egyenletet. Ezzel kiegészítve a normálegyenletet, illetve elég a vele ekvivalens redukált lépcsős alakból származó egyenletrendszert, kapjuk a következő bővített mátrixot és annak redukált lépcsős alakját:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Tehát $\hat{\mathbf{x}} = (1/2, 0, 3/2)$.

7.43. Az $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ lineáris leképezés pszeudoinverzét az az $A^+ : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ leképezés, melyre $\mathbf{b} \in \mathcal{U}$ esetén $A^+ \mathbf{b} \perp \text{Ker}(A)$ és $\mathbf{b} - A(A^+ \mathbf{b}) \perp \text{Im}(A)$.



7.44. Legyen $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ egy lineáris leképezés, ahol $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ euklideszi terek.

- a) Az X leképezés pontosan akkor pszeudoinverze az A lineáris leképezésnek, ha
1. $\mathbf{x} \perp \mathcal{Ker}(A)$ esetén $X(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
 2. $\mathbf{z} \perp \mathcal{Im}(A)$ esetén $X\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
- b) Ha A lineáris leképezés két véges dimenziós valós vagy komplex euklideszi tér között, akkor

$$AA^+ = \text{proj}_{\mathcal{Im}(A)} \quad \text{és} \quad A^+A = \text{proj}_{\mathcal{Ker}(A)^\perp}.$$

7.45. a) $A^+\mathbf{b}$ a minimális normájú optimális megoldás, az összes megoldás pedig előáll $A^+\mathbf{b} + \mathcal{N}(A)$ alakban. Be kell tehát látnunk, hogy 1) $(I_n - A^+A)\mathbf{y}$ minden vektora $\mathcal{N}(A)$ -ba esik, és 2) minden $\mathcal{N}(A)$ -beli vektor megkapható így. Egyrészt

$$A(I_n - A^+A)\mathbf{y} = A\mathbf{y} - AA^+A\mathbf{y} = A\mathbf{y} - A\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

másrészt $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(A)$ esetén $(I_n - A^+A)\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{0} = \mathbf{y}$, tehát mindkét feltétel teljesül.

b) Visszavezethető az előző pontra, ha ellenőrizzük, hogy $(A^\top)^+ = (A^+)^\top$. Erre több mód is adódik, egyik a Moore–Penrose-tétel feltételeinek ellenőrzése.

7.47. Mindhárom összefüggés a Moore–Penrose-tétel feltételeibe való egyszerű behelyettesítéssel igazolható.

7.48. a) $y = 0.8x + 1.6$, b) $y = -0.8x + 6.4$,

c) $y = 0.6x + 2.2$.

7.49. a) Ha $y = 0$, akkor az adatok táblázata a következő:

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline z & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

A $z = b + mx$ egyenletrendszer megoldásait keressük, ahol az ismeretlenek b és m . Az egyenletrendszer az x és z értékeinek behelyettesítése után

$$\begin{array}{lcl} b & = & 3 \\ b + m & = & 1 \\ b + 2m & = & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ami inkonzisztens. Az optimális megoldásaihoz a normálegyenletet kell felírni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

vagy az adatokat az

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i \end{bmatrix}$$

általános alakba helyettesíteni. Mindkét módon a

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek megoldása $(b, m) = (7/3, 0)$, azaz $z = 7/3$ a keresett egyenlet.

b) $x = 0$ esetén a táblázat

$$\begin{array}{c|ccc} y & 0 & 1 & 2 \\ \hline z & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Ezek a pontok sincsenek egy egyenesen, így itt a normálegyenlet az

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i \end{bmatrix}$$

általános alakból

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

egyenletrendszerre vezet, melynek $(b, m) = (5/2, -1/2)$ a megoldása, azaz a regressziós egyenes egyenlete

$$z = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

c) Végül keressük azt az $a + bx + cy = z$ egyenletű síkot, melynek a megadott (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, 5$) pontoktól való távolságai négyzetösszege minimális, azaz lineáris regressziót végzünk a z valamint az x és y változók között! Ha ez az öt pont egy síkra esik, akkor a pontok kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ a + c & = & 1 \\ a + 2c & = & 2 \\ a + b & = & 1 \\ a + 2b & = & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ez inkonzisztens, így az együtthatómátrix transzponáltjával való beszorzás után kapott normálegyenlet:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ennek megoldása $(a, b, c) = (2, 1/5, -1/5)$, azaz a regressziós sík egyenlete

$$z = 2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y.$$

7.50. Az

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = y_i$$

egyenletekből ($i = 1, 2, \dots, n$) álló egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

ahol n a mérések száma. Az ehhez tartozó normál-egyenlet az együtthatómátrix transzponáltjával való szorzással kapható meg, melynek alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & \dots & x_n^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

ami a mátrixszorzások elvégzése után az

$$\begin{bmatrix} n & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^5 \\ \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i^2 y_i \\ \sum_i x_i^3 y_i \end{bmatrix}$$

alakot ölti. Igazolható a Vandermonde-mátrixokról szerzett ismereteinkkel, hogy ez az egyenletrendszer mindig egyértelműen megoldható, ha van legalább négy különböző x_i érték a mért adatok közt.

7.51. Az első mátrix teljes oszloprangú, így pszeudo-inverze

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^+ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A második mátrix teljes sorrangú, így

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(A feladat sajtóhibával jelent meg, az a mátrix invertálható, így nincs szükség pszeudo-inverzre. A kitűzni tervezett feladatban a harmadik mátrix bázis-felbontása az első kettő szorzata.)

A harmadik mátrix determinánsa 0, így nem invertálható. Bázisfelbontása

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

így pszeudo-inverze

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^+ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^+ \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.52. (2,2,0) a minimális abszolút értékű optimális megoldás. Használjuk az előző feladat eredményét!

Az együtthatómátrix pszeudo-inverze

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Így a sortérbe eső egyetlen megoldás

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.53. a) Ha transzponáljuk a Moore–Penrose-tétel (7.65. tétel) egyenleteit, eredményül az $\mathbf{A}^\top$ pszeudo-inverzére az $\mathbf{A}^+$ transzponáltját kapjuk.

b) Mivel $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ az oszloptérre való merőleges vetítés, azaz minden $\mathbf{b}$ vektorra $\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)\mathbf{b}$, és $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$, ezért

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{b} + \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)) = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b}.$$

c) Legyen $\text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}$, $\hat{\mathbf{c}} = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{c}$, $\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top)$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{c}}$, így $\mathbf{A}^+ \mathbf{c} = \mathbf{x}$. Ekkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \hat{\mathbf{c}}$ és így $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{c} = \hat{\mathbf{b}}$, tehát $\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{c} = \mathbf{A}^\top \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{x}$. Ezt összevetve azzal, hogy $\mathbf{A}^+ \mathbf{c} = \mathbf{x}$, kapjuk hogy $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+$. A másik azonosság hasonlóképp igazolható.

Másik megoldást kapunk a következő d) pont alkalmazásával: $\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+ = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^+$, de $\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^+ = \text{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A}^\top)}$, és $\mathbf{A}^+$ az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\top)$ térre képez, ezért $\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+ = \mathbf{A}^+$.

d) A Moore–Penrose-tétel (7.65. tétel a), b), c), d)) egyenleteibe való behelyettesítéssel igazolhatóak az állítások. Pl. $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+$, ui.

$$a) \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \stackrel{b)}{=} \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A},$$

$$b) \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \stackrel{b)}{=} \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^+ = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+,$$

$$c) (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+)^T = \mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top \mathbf{A},$$

$$d) (\mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+ \mathbf{A}^\top \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^+ (\mathbf{A}^\top)^+.$$

Hasonlóan igazolható a másik összefüggés is.

e), f) A 7.48. tétellel igazoltuk a két összefüggés középső egyenlőségét. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)$ az $\mathbf{A}^+$ definíció miatt azonos, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)$ pedig azért igaz, mert ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)$, azaz $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ is fennáll. Az oszlopterek e terek merőleges kiegészítő alterei, ami implikálja egyenlőségüket.

7.54. Ha $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \text{tr}(\mathbf{X}^\top \mathbf{Y}) = \sum_{ij} x_{ij} y_{ij} = \text{vec}(\mathbf{X})^\top \text{vec}(\mathbf{Y})$, így $\|\mathbf{X}\|_F^2 = \sum_{ij} x_{ij}^2 = \|\text{vec}(\mathbf{X})\|^2$. Így ha $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$, akkor igaz Pitagorasz-tétele, azaz $\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\|_F^2 = \|\mathbf{X}\|_F^2 + \|\mathbf{Y}\|_F^2$.

Az útmutatásnak megfelelően tekintsük az

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+) + (\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X})$$

felbontást, és vegyük észre, hogy a két mátrix oszloptere merőleges egymásra, ugyanis $\mathcal{O}(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top - \mathbf{X})) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, így $\mathcal{O}((\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+)^\top) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, azaz

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+)^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X}) &= \mathbf{O} \leadsto \\ \langle \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+, \mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X} \rangle &= \\ = \text{tr}((\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+)^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X})) &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor viszont használható Pitagorasz-tétele, így

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2 &= \|\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\|_F^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}\mathbf{X}\|_F^2 \\ &\geq \|\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\|_F^2, \end{aligned}$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Eszerint $\mathbf{X} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{Y}$, ahol $\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{O}$, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$. De $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^+)$, így ismét alkalmazható Pitagorasz-tétele:

$$\|\mathbf{X}\|_F^2 = \|\mathbf{A}^+ + \mathbf{Y}\|_F^2 = \|\mathbf{A}^+\|_F^2 + \|\mathbf{Y}\|_F^2 \geq \|\mathbf{A}^+\|_F^2,$$

ahol egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$. Összefoglalva: $\mathbf{A}^+$ az a mátrix, melyre (1) az $\mathbf{A}\mathbf{X}$ mátrixok közül $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ van a legközelebb $\mathbf{I}$ -hez, és (2) mindazon $\mathbf{X}$ -ek közül, melyek ugyanolyan közel vannak $\mathbf{I}$ -hez, mint $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$, az $\mathbf{A}^+$ az egyetlen minimális abszolút értékű.

7.55. Alkalmazzuk a Gram-Schmidt-eljárást! Először keressünk ortogonális rendszert. Az ortogonális rendszer első vektora lehet $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 4, 4, 4)$.

Az ortogonális rendszer második vektorát úgy választjuk, hogy $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ fennálljon. A

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1$$

képletet alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= (-3, 9, -2, 6) - \frac{(1, 4, 4, 4) \cdot (-3, 9, -2, 6)}{(1, 4, 4, 4) \cdot (1, 4, 4, 4)} (1, 4, 4, 4) \\ &= (-4, 5, -6, 2). \end{aligned}$$

A harmadik vektor megkapható a

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3 \rangle}{\|\mathbf{b}_2\|^2} \mathbf{b}_2$$

képletet alkalmazva:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= (0, 11, -6, -5) - \frac{(1, 4, 4, 4) \cdot (0, 11, -6, -5)}{(1, 4, 4, 4) \cdot (1, 4, 4, 4)} (1, 4, 4, 4) \\ &\quad - \frac{(-4, 5, -6, 2) \cdot (0, 11, -6, -5)}{(-4, 5, -6, 2) \cdot (-4, 5, -6, 2)} (-4, 5, -6, 2) \\ &= (4, 6, 0, -7). \end{aligned}$$

A vektorok hossza

$$\begin{aligned} \|(1, 4, 4, 4)\| &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = 7, \\ \|(-4, 5, -6, 2)\| &= \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2 + 2^2} = 9, \\ \|(4, 6, 0, -7)\| &= \sqrt{4^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{101}. \end{aligned}$$

Így az ortonormált rendszer három egységvektora

$$\frac{1}{7}(1, 4, 4, 4), \frac{1}{9}(-4, 5, -6, 2), \frac{1}{\sqrt{101}}(4, 6, 0, -7).$$

7.56. A feladat megoldása egy lépést kivéve megegyezik az előzőével, és a bázis is azonos.

A Gram-Schmidt-eljárás első lépésében $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1, 4, 4, 4)$. A második lépésben $\mathbf{b}_2 = (-4, 5, -6, 2)$. Az $\mathbf{a}_3$ azonban nem független az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ vektorrendszerrel, ui.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= (-4, 5, -6, 2) - \frac{(1, 4, 4, 4) \cdot (-4, 5, -6, 2)}{(1, 4, 4, 4) \cdot (1, 4, 4, 4)} (1, 4, 4, 4) \\ &\quad - \frac{(-4, 5, -6, 2) \cdot (-4, 5, -6, 2)}{(-4, 5, -6, 2) \cdot (-4, 5, -6, 2)} (-4, 5, -6, 2) \\ &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Ezért az $\mathbf{a}_3$, ill. a zérusvektort figyelmen kívül hagyjuk. A következő vektort a

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_4 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_4 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_4 \rangle}{\|\mathbf{b}_2\|^2} \mathbf{b}_2 \\ &= (0, 11, -6, -5) - \frac{(1, 4, 4, 4) \cdot (0, 11, -6, -5)}{(1, 4, 4, 4) \cdot (1, 4, 4, 4)} (1, 4, 4, 4) \\ &\quad - \frac{(-4, 5, -6, 2) \cdot (0, 11, -6, -5)}{(-4, 5, -6, 2) \cdot (-4, 5, -6, 2)} (-4, 5, -6, 2) \\ &= (4, 6, 0, -7). \end{aligned}$$

Tehát az ortogonális rendszer vektorai – ahogy az előző feladatban is láttuk

$$(1, 4, 4, 4), (-4, 5, -6, 2), (4, 6, 0, -7).$$

7.57. A Gram-Schmidt-ortogonalizáció ugyanazokkal a képletekkel végrehajtható, mint valóban, bár a skalárszorítás nem kommutatív, olyan sorrendet adtunk meg, mely komplexre is működik, azaz

$$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{\mathbf{b}_k (\mathbf{b}_k^\mathbf{H} \mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^\mathbf{H} \mathbf{b}_k} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{\mathbf{b}_k^\mathbf{H} \mathbf{a}_{i+1}}{\mathbf{b}_k^\mathbf{H} \mathbf{b}_k} \mathbf{b}_k.$$

Eszerint $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 0)$, majd

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{\begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}.$$

Innen az ortonormált bázis:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{bmatrix}.$$

7.58. a) A legfőljebb másodfokú polinomok $\mathcal{P}_3$ terében az $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_3 = x^2$ polinomok bázist alkot. Legyen $b_1 = 1$.

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1$$

$$= x - \frac{\int_0^1 1 \cdot x \, dx}{\int_0^1 1^2 \, dx} 1$$

$$= x - \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan

$$b_3 = a_3 - \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\|b_2\|^2} b_2$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 1 \cdot x^2 \, dx}{\int_0^1 1^2 \, dx} 1 - \frac{\int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \cdot x^2 \, dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Tehát e skalárszorzatra nézve az 1 , $x - \frac{1}{2}$, $x^2 - x + \frac{1}{6}$ függvények a $\mathcal{P}_3$ tér ortogonális bázisát alkotják.

b) Az ortonormált bázist megkapjuk, ha a bázisvektorokat normáljuk:

$$q_1(x) = 1,$$

$$q_2(x) = \sqrt{3}(2x - 1),$$

$$q_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

c) Mivel

$$c_1 = \int_0^1 x^7 \, dx = \frac{1}{8},$$

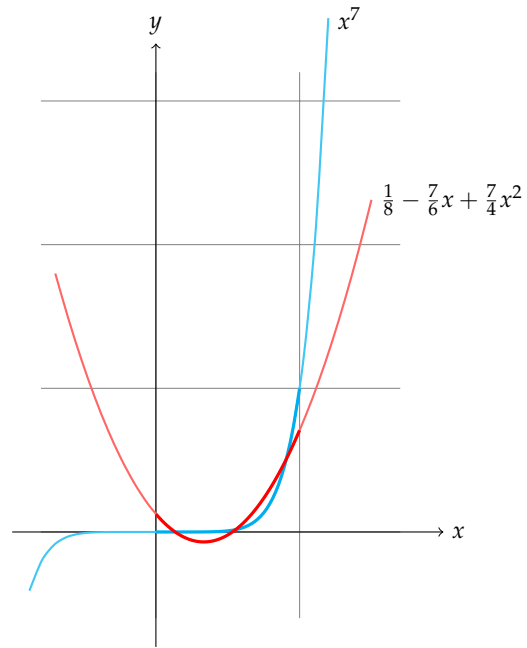
$$c_2 = \int_0^1 x^7 (\sqrt{3}(2x - 1)) \, dx = \frac{7\sqrt{3}}{72},$$

$$c_3 = \int_0^1 x^7 (\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)) \, dx = \frac{7\sqrt{5}}{120},$$

ezért a térre eső vetület

$$c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x) + c_3 q_3(x) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{8}.$$

Ezt szemlélteti a következő ábra:



7.59. Először végezzünk Gram-Schmidt-ortogonalizációt az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oszlopvektorain. Az ortogonalizációban kapott vektorokat most azonnal normáljuk! Az első oszlopvektor lenormálva $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$. A

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1$$

$$= (2, 2, 0) - \left(\frac{1}{3}(1, 2, -2) \cdot (2, 2, 0) \right) \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

$$= (2, 2, 0) - \frac{1}{3}(2, 4, -4)$$

$$= \frac{1}{3}(4, 2, 4).$$

E vektor hossza (normája) 2, így a vele való osztás után a normált vektor

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} = \frac{1}{3}(2, 1, 2).$$

Végül

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_2 \\
 &= (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{3}(1, 2, -2) \cdot (0, 1, 1) \right) \frac{1}{3}(1, 2, -2) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{3}(2, 1, 2) \cdot (0, 1, 1) \right) \frac{1}{3}(2, 1, 2) \\
 &= (0, 1, 1) - 0 - \frac{1}{3}(2, 1, 2) \\
 &= \frac{1}{3}(-2, 2, 1).
 \end{aligned}$$

Mivel ez egységvektor, ezért

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$$

A $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \mid \mathbf{q}_2 \mid \mathbf{q}_3]$ mátrix lesz a QR-felbontás egyik mátrixa, azaz

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$ képlet alkalmazásával pedig

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontása

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A második mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & -2 & -6 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix},$$

amelynek oszlopain a 7.55. feladatban látottól csak az utolsó lépésben eltérő, de az ottanival azonos ortonormált bázist adó Gram-Schmidt-eljárás eredményeként a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \left[\frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} \mid \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} \mid \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} 1/7 & -4/9 & 4/\sqrt{101} \\ 4/7 & 5/9 & 6/\sqrt{101} \\ 4/7 & -6/9 & 0/\sqrt{101} \\ 4/7 & 2/9 & -7/\sqrt{101} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

mátrixot kapjuk. $\mathbf{Q}$ ismeretében

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1/7 & -4/9 & 4/\sqrt{101} \\ 4/7 & 5/9 & 6/\sqrt{101} \\ 4/7 & -6/9 & 0 \\ 4/7 & 2/9 & -7/\sqrt{101} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & -2 & -6 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ -4/9 & 5/9 & -6/9 & 2/9 \\ 4/\sqrt{101} & 6/\sqrt{101} & 0 & -7/\sqrt{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 9 & 11 \\ 4 & -2 & -6 \\ 4 & 6 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & \sqrt{101} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A harmadik mátrix

$$\begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ 1 & 3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix},$$

oszlopait jelölje $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. A Gram-Schmidt-ortogonalizációs eljárás első vektora $\mathbf{b}_1 = (i, 1, 0)$. Normált alakját jelölje $\mathbf{q}_1$: $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1, 0)$. A

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{q}_1 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ 0 \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Itt a komplex vektorok skalárszorzatára vonatkozó $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$ képletet alkalmaztuk. A normált vektor

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Végül

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_1 - \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{q}_2 \\
 &= \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 2i \end{bmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Osztva a normájával

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{Q}$ mátrix a Gram–Schmidt-eljárással kapott ortonormált bázis vektoraiból mint oszlopvektorokból álló mátrix, azaz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^H \mathbf{A}$ képlet szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ 1 & 3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i & 1 & 1-i \\ 1 & 3i & 1-i \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ 0 & 2\sqrt{2} & -\sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.60. A Gram–Schmidt eljárás első vektora az együtthatómátrix első oszlopa, azaz $\mathbf{b}_1 = (1, 4, 4, 4)$. A

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1$$

képletet alkalmazva megkapjuk a második vektort, tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= (-3, -2, 9, 6) - \frac{(1, 4, 4, 4) \cdot (-3, -2, 9, 6)}{(1, 4, 4, 4) \cdot (1, 4, 4, 4)} (1, 4, 4, 4) \\ &= (-4, -6, 5, 2). \end{aligned}$$

Normálva a vektorokat $\mathbf{q}_1 = \frac{1}{7}(1, 4, 4, 4)$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{9}(-4, -6, 5, 2)$. Ebből

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} & \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & -4/9 \\ 4/7 & -6/9 \\ 4/7 & 5/9 \\ 4/7 & 2/9 \end{bmatrix}.$$

Végül az $\mathbf{R}$ kiszámolható $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{A}$ ismeretében:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ -4/9 & -6/9 & 5/9 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \\ 4 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldása teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ esetén $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$, azaz esetünkben

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ -4/9 & -6/9 & 5/9 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.61. Teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ esetén az $\mathbf{A}^+$ mátrix az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ QR-felbontás ismeretében az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$ képlettel számolható. Így

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ -4/9 & -6/9 & 5/9 & 2/9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \cdot 9} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ -4/9 & -6/9 & 5/9 & 2/9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{63^2} \begin{bmatrix} 277 & 618 & 79 & 226 \\ -196 & -294 & 245 & 98 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{277}{3969} & \frac{206}{1323} & \frac{79}{3969} & \frac{226}{3969} \\ -\frac{4}{81} & -\frac{2}{27} & \frac{5}{81} & \frac{2}{81} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7.62. Minden Givens-forgatásban két koordináta egyike válik 0-vá, a többi érintetlen marad. Ha $x_i = 0$, és valamely j indexre $x_j \neq 0$ (ilyen koordináta van, mert $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), akkor a $\text{span}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ síkban való 90° -os forgatás kicseréli az x_i és x_j koordinátákat, és az egyiket -1 -gyel szorozza, azaz ezután az i -edik koordináta nem 0. A további legfeljebb $n-2$ nemnulla koordináta eliminálására $n-2$ forgatás elég, ez összesen $n-1$. Ha $x_i \neq 0$, akkor a $\text{span}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ síkokban való forgatásokkal ($j \neq i$) minden x_j eliminálható, ez legfeljebb $n-1$ forgatás. Mivel a forgatások nem változtatnak a vektor hosszán, a végeredmény $\|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_i$ vagy $-\|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_i$ lehet, de az utolsó forgatás szögének megválasztásával elérhető, hogy $\|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_i$ legyen.

7.63. A feladat megoldható akár az Octave, akár a Python szimbolikus lehetőségeit használva, akár a Sage programmal. Az ellenőrzéshez megadjuk a számítások eredményeit.

a) Householder tükrözéssel egyetlen lépésben: ha az $(1, 2, -2, 4)$ vektort a $(5, 0, 0, 0)$ vektorba akarjuk tükrözni, akkor az $\mathbf{a} = (1, 2, -2, 4) - (5, 0, 0, 0) = (-4, 2, -2, 4)$ vektorral mint a hipersík normálvektorával a Householder-tükrözés mátrixa

$$\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Givens-forgatásokkal a következő lépésekben kap-

ható meg a $\mathbf{Q}$ mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A három mátrix szorzata és hatása

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ -\frac{4}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{8}{15} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Householder-tükrözéssel: ha az $(1, 2, -2, 4)$ vektort a $(0, 0, 5, 0)$ vektorba akarjuk tükrözni, akkor az $\mathbf{a} = (1, 2, -2, 4) - (0, 0, 5, 0) = (1, 2, -7, 4)$ vektorral mint a hipersík normálvektorával a Householder-tükrözés mátrixa

$$\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 34 & -2 & 7 & -4 \\ -2 & 31 & 14 & -8 \\ 7 & 14 & -14 & 28 \\ -4 & -8 & 28 & 19 \end{bmatrix}.$$

Givens-forgatásokkal a következő lépéseket kell megtennünk:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{5} \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{5} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A három mátrix szorzata és hatása

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{8}{15} & \frac{8}{15} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.64. 1) A $(4, 3)$ vektort az $(5, 0)$ vektorba vivő forgatás α szögének szögfüggvényei:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{3}{5},$$

így a forgatás mátrixa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

E mátrixszal

$$\mathbf{G}\mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A $(4, 3)$ vektort az $(5, 0)$ vektorba vivő tükrözés az $\mathbf{a} = (5, 0) - (4, 3) = (1, -3)$ vektorra merőleges hipersíkra tükröz (a hipersík az $x - 3y = 0$ egyenletű egyenes). Bár elemi síkgeometriai eszközökkel is látható, de inkább az n dimenziós térre is használható képlettel számolva

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbf{H}\mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Givens-forgatásokkal először nullázandó a harmadik sor első eleme (a második sor első eleme már eleve nulla). A forgatómátrix az első és harmadik sort és oszlopot érinti:

$$\begin{aligned} (a, b) &= (8, 15), \quad r^2 = 64 + 225 = 17^2, \\ \cos \alpha &= \frac{a}{r} = \frac{8}{17}, \quad \sin \alpha = -\frac{b}{r} = -\frac{15}{17}, \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_1\mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{A}_1$ -ben nullázandó a harmadik sor második eleme. A forgatómátrix a második és harmadik sort

és oszlopot érinti:

$$\begin{aligned}
 (a, b) &= (4, 3), \quad r^2 = 16 + 9 = 5^2, \\
 \cos \alpha &= \frac{a}{r} = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = -\frac{b}{r} = -\frac{3}{5}, \\
 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A} &= \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & 0 & -\frac{15}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ezután a fenti mátrix QR-felbontását Householder-tükrözésekkel is meghatározzuk! Mivel $|(8, 0, 15)| = 17$, ezért először a $(8, 0, 15)$ vektort kell a $(17, 0, 0)$ vektorba tükrözni. Legyen $\mathbf{a} = (8, 0, 15) - (17, 0, 0) = (-9, 0, 15)$, így

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{81 + 225} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 25 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 15 \\ 0 & 17 & 0 \\ 15 & 0 & -8 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_1 &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 15 \\ 0 & 17 & 0 \\ 15 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A jobb alsó 2×2 -es blokkot alakítjuk tovább. $|(4, -3)| = 5$, így $(4, -3) - (5, 0) = (-1, -3) = \mathbf{a}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_2 &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{Q}_2 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Végül a QR-felbontás

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T) \mathbf{A}_2 = \mathbf{QR} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

7.65. A Fourier-mátrix általános alakja

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \dots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \omega^{3(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix},$$

ahol $\omega = \exp(-\frac{2\pi i}{n})$ és így $\bar{\omega} = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. E mátrix s -edik és t -edik oszlopának skalárszorzatához a következő összeg meghatározása szükséges:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\omega}^{sk} \omega^{tk} &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-sk} \omega^{tk} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(t-s)k} \\
 &= \begin{cases} n, & \text{ha } s = t, \\ 0, & \text{ha } s \neq t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ha $s \neq t$, akkor egyszerűen a mértani sorozat összegképletét alkalmazzuk. Legyen $l = t - s$. Ekkor

$$\omega^0 + \omega^l + \omega^{2l} + \dots + \omega^{(n-1)l} = \frac{\omega^{nl} - 1}{\omega - 1} = 0,$$

hisz $\omega^n = \exp(-2\pi i) = 1$.

7.66. Ha a megadott vektorok lineárisan összefüggők, akkor k -nál kisebb dimenziós alteret feszítenek ki, így a k dimenziós térfogat 0. Ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor legyen $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a teljes QR-felbontás. Az $\mathbf{R}$ oszlopai egy k dimenziós paralelepipedont feszítenek ki az $\mathbb{R}^n$ első k standard egységvektora által kifeszített altérben. Jelölje $\mathbf{R}_k$ az $\mathbf{R}$ első k sora alkotta részmatricot. Ennek determinánsa megegyezik az $\mathbf{R}$ oszlopvektorai által kifeszített paralelepipedon mértékével. Az ortogonális $\mathbf{Q}$ e paralelepipedont kifeszítő vektorokat egy azonos mértékű paralelepipedonba viszi, tehát a keresett mérték $\det \mathbf{R}_k$. Másrészt

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} &= \sqrt{\det(\mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R})} = \sqrt{\det(\mathbf{R}^T \mathbf{R})} \\
 &= \sqrt{\det(\mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k)} = \sqrt{\det \mathbf{R}_k \det \mathbf{R}_k} \\
 &= \det \mathbf{R}_k.
 \end{aligned}$$

7.67. Legyen $\mathbf{A}$ a megadott vektorokból mint oszlopvektorokból képzett mátrix, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 7.66. feladat eredménye szerint a paralelogramma területe 3, ui.

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9,$$

így $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = 3$.

7.68. 1. megoldás: Jelölje $\mathbf{A}$ a megadott három vektorból mint oszlopvektorból képzett mátrixot. Ekkor

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 225,$$

így a térfogat $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = 15$.

2. megoldás: A 4.52. feladat alapján

$$\left| \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \right| = |(0, 10, 10, 5)| = \sqrt{225} = 15.$$

7.69. a) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, akkor $\det \mathbf{A} = 0$, így az állítás igaz. Feltehetjük tehát, hogy $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek. $\det \mathbf{A}$ minden oszlopából kiemelve a normáját, azt az ekvivalens állítást kapjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ minden oszlopa egységnyi hosszú, akkor $|\det \mathbf{A}| \leq 1$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ oszlopai páronként merőlegesek. Legyen $\mathbf{S} = \mathbf{A}^H \mathbf{A}$. $\mathbf{S}$ főátlójában minden elem 1, mivel $\mathbf{A}$ oszlopainak normája 1, így $\text{tr } \mathbf{S} = n$. Másrészt $\mathbf{S}$ önadjungált (valós $\mathbf{A}$ esetén szimmetrikus), így minden sajátértéke valós, jelölje őket $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján

$$\det \mathbf{S} = \prod_{k=1}^n \lambda_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^n = \left(\frac{1}{n} \text{tr } \mathbf{S} \right)^n = 1^n = 1.$$

Mivel $\det \mathbf{S} = \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = |\det \mathbf{A}|^2$, ezért

$$|\det \mathbf{A}| = \sqrt{\det \mathbf{S}} \leq 1.$$

A számtani-mértani közepek közt egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a sajátértékek mind egyenlők. Másrészt összegük egyenlő a nyommal, azaz n , így $\lambda_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). $\mathbf{S}$ önadjungált, így diagonalizálható, tehát $\mathbf{S} \sim \mathbf{I}$, de akkor csak $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ lehet, azaz $\mathbf{A}$ oszlopai ortonormált rendszert alkotnak. (Megjegyezzük, $\mathbf{S}$ minden sajátértéke pozitív, így $\det \mathbf{S} > 0$, ha $\mathbf{A}$ oszlopai függetlenek – ld. később a 8.38. tételt.)

b) Ha $\mathbf{A}$ minden eleme 1 vagy -1 , akkor minden oszlopának $\sqrt{n}$ a normája, így az előző pont szerint

$$|\det \mathbf{A}| \leq (\sqrt{n})^n = n^{n/2}.$$

c) Könnyen látható, hogy ha $\mathbf{H}$ egy Hadamard-mátrix, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{H}$$

ugyancsak Hadamard-mátrix. Így a $\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixból kiindulva 2-hatványrendű Hadamard-mátrixok sorozatát kapjuk:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

és általában

$$\mathbf{H}_{2^k} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{2^{k-1}} & \mathbf{H}_{2^{k-1}} \\ \mathbf{H}_{2^{k-1}} & -\mathbf{H}_{2^{k-1}} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_{2^{k-1}}.$$

7.70. a) Az Φ_N mátrix k -adik, illetve $N - k$ -adik sorának n -edik eleme ε^{kn} , illetve $\varepsilon^{(N-k)n}$. Ez utóbbit átalakítva kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{(N-k)n} = \varepsilon^{Nn} \varepsilon^{-kn} = (\varepsilon^{-1})^{kn} = \bar{\varepsilon}^{kn}.$$

Mivel minden pozitív páros N -re $\varepsilon^{\frac{N}{2}} = -1$, ezért az $N/2$ -edik sorban -1 hatványai szerepelnek.

b) Mivel $\omega = \bar{\varepsilon}$, ezért $\omega^s = \bar{\varepsilon}^s$, tehát $\mathbf{F}_N = \bar{\Phi}_N$. Másrészt Φ_N szimmetrikus, következésképp $\bar{\Phi}_N = \Phi_N^T = \Phi_N^H$.

c) Számítsuk ki a $\Phi_N \mathbf{F}_N$ mátrixot! A szorzat k -adik sorának n -edik oszlopában a

$$\sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{km} \omega^{mn} = \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{m(k-n)} = \sum_{m=0}^{N-1} (\varepsilon^{k-n})^m$$

összeg szerepel. Ha $k = n$, azaz $\varepsilon^{k-n} = 1$, akkor ez az összeg N , minden más esetben 0 (ld. a 11.20. feladat állítását). Mindezek egyik következménye, hogy Φ_N és $\mathbf{F}_N$ invertálhatók, Φ_N inverze $\frac{1}{N} \mathbf{F}_N$, $\mathbf{F}_N$ inverze $\frac{1}{N} \Phi_N$. A másik következmény, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_N \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{F}_N \right) = \mathbf{I}_N,$$

ami a b)-t is figyelembe véve épp azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_N \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_N \right)^H = \mathbf{I}_N,$$

azaz hogy $\frac{1}{\sqrt{N}} \Phi_N$ unitér (ld. még a 7.65. feladatot).

7.71. Legyen tehát $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{2n} = [\omega^{st}] = \exp(-\frac{2st\pi i}{n})$ ($i, j = 0, 1, \dots, n-1$). Az n dimenziós $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok konvolúciója a $2n$ dimenziós $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, melynek koordinátás alakja

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ \vdots \\ a_{n-2} b_{n-1} + a_{n-1} b_{n-2} \\ a_{n-1} b_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{F}\mathbf{a}$, $\mathbf{F}\mathbf{b}$ és $\mathbf{F}(\mathbf{a} * \mathbf{b})$ vektorok kifejezhetők $\mathbf{F}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, nevezetesen

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{F}_{*k}, \quad \mathbf{F}\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathbf{F}_{*k},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{2n-1} [\mathbf{a} * \mathbf{b}]_k \mathbf{F}_{*k},$$

ahol az utolsó összegzés mehet csak $2n-2$ -ig is, mivel az utolsó tag 0. Vegyük észre, hogy az elemenkénti $\mathbf{F}\mathbf{a} \odot \mathbf{F}\mathbf{b}$ szorzat is kifejezhető $\mathbf{F}$ oszlopai lineáris kombinációjaként, ui. az $\mathbf{F}_{*s} \odot \mathbf{F}_{*t}$ vektor j -edik koordinátája

$$[\mathbf{F}_{*s} \odot \mathbf{F}_{*t}]_j = \omega^{js} \omega^{jt} = \omega^{j(s+t)} = [\mathbf{F}_{*,s+t}]_j,$$

és így

$$\mathbf{F}_{*s} \odot \mathbf{F}_{*t} = \mathbf{F}_{*,s+t},$$

ahol az oszlopindexekre elég az $s, t = 0, 1, \dots, n-1$ tartományt figyelembe venni. Látható, hogy $\mathbf{F}\mathbf{a} \odot \mathbf{F}\mathbf{b}$ koordinátái a polinomszorzat együtthatóival azonosak, ui.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{a} \odot \mathbf{F}\mathbf{b} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{F}_{*k} \right) \odot \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathbf{F}_{*k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) \mathbf{F}_{*k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} [\mathbf{a} * \mathbf{b}]_k \mathbf{F}_{*k} = \mathbf{F}(\mathbf{a} * \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{F}$ invertálható, azonnal adódik a $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{a} \odot \mathbf{F}\mathbf{b})$ összefüggés is.

7.72. $N = 4$, így

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_4 \mathbf{x} = \mathbf{F}_4 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 2+i \\ -1 \\ -3i \end{bmatrix}.$$

7.73. A permutáló mátrix $\Pi_1 = [1]$, $\Pi_2 = \mathbf{I}_2$, Π_4 és Π_8 mátrixokkal megkapható (a Π_1 és Π_2 mátrixokra

nyilván nincs szükség):

$$\begin{bmatrix} \Pi_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \Pi_4 \end{bmatrix} \Pi_8 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{bmatrix}.$$

7.74. Az $\mathbf{x}$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltja

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_6 \mathbf{x} = \mathbf{F}_{6,\omega} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -1 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & -1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\omega^6 = 1$, $\omega + \omega^5 = 1$, $\omega^2 + \omega^4 = -1$. Például

$$\begin{aligned} X_2 &= [\mathbf{F}_{6,\omega}]_{2*} \mathbf{x} = 4 + \omega^2 - 2\omega^4 - 2 - 2\omega^2 + \omega^4 \\ &= 2 - \omega^2 - \omega^4 = 3. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{x}$ valós, ezért a 7.98. tétel b) pontja szerint $X_{N-k} = \overline{X_k}$, amit azonnal ellenőrizhetünk is. Az $\mathbf{x}$ vektor „mögött” lévő p szerint periodikus függvény e modellben

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^5 X_n e^{i \frac{2\pi}{p} n t} \\ &= \frac{1}{6} \left(9e^{i \frac{2\pi}{p} t} + 3e^{2i \frac{2\pi}{p} t} + 3e^{4i \frac{2\pi}{p} t} + 9e^{5i \frac{2\pi}{p} t} \right). \end{aligned}$$

A p értékének valójában semmi szerepe, mert e függvényt csak a $k \frac{p}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) pontokban értékeljük ki, így a fenti összegben csak a

$$e^{i \frac{2\pi}{p} \frac{pn}{6}} = (e^{i \frac{2\pi}{6}})^n = \varepsilon^n$$

értékek szerepelnek. Ezekre használható a

$$\begin{aligned} \varepsilon^n + \varepsilon^{6-n} &= (e^{i \frac{2\pi}{6}})^n + (e^{-i \frac{2\pi}{6}})^n = (e^{i \frac{2\pi}{6}})^n + (e^{-i \frac{2\pi}{6}})^n \\ &= 2 \cos n \frac{\pi}{3} = 2 \cos \frac{2\pi}{p} \frac{pn}{6} \end{aligned}$$

összefüggés, így

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{6} \left(18 \cos \frac{2\pi}{p} t + 6 \cos 2 \frac{2\pi}{p} t \right) \\ &= 3 \cos \frac{2\pi}{p} t + \cos 2 \frac{2\pi}{p} t. \end{aligned}$$

A függvény tehát $3 \cos \frac{2\pi}{p} t$, a „zaj” $\cos 2 \frac{2\pi}{p} t$. Összehasonlításképp vessük össze ezt a számítógéppel kapott eredménnyel!