Bessenyei Mihály – Páles Zsolt

Fixponttételek és alkalmazásaik

Bessenyei Mihály
Páles Zsolt

Fixponttételek és alkalmazásaik

TYPOTEX

A kötet megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

Szakmailag lektorálta
Komornik Vilmos és Lovas Rezső

ISBN 978 963 493 230 7

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Gerner József
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomdai kivitelezés: Séd Nyomda, Szekszárd

Tartalom

Előszó

Ha valaki nem hiszi, hogy a matematika egyszerű, az azért van, mert még nem jött rá, hogy milyen bonyolult az élet.
Neumann János (1903–1957)

A fixponttételek elmélete a matematika viszonylag fiatal szülötte. Ennek ellenére, köszönhetően a hatékony és fontos alkalmazási lehetőségeinek, napjainkban is aktívan kutatott tudományterület, dinamikusan fejlődő irányzatokkal. Azonban kétségkívül beszélhetünk olyan lezárt fejezetekről, kikristályosodott módszerekről, amelyek haladottabb egyetemi kurzusok anyagaként szolgálhatnak. Legjobb tudomásunk szerint e diszciplína didaktikus igényű tárgyalása nehezen hozzáférhető. A rendelkezésre álló monográfiák legtöbbje nem egyetemi jegyzetnek vagy tankönyvnek íródott; Smart [65] vagy Shapiro [64] könyvei pedig nem magyar nyelvűek.

Jelen könyv legfontosabb célja ezt a hiányt pótolni. A fixponttételek elmélete a Debreceni Egyetem képzésében (beleértve jogelőd intézményét, a Kossuth Lajos Tudományegyetemet is) több évtizedes hagyományra tekint vissza. Az eredetileg heti háromórás kurzust később két független, heti kétórás sorozat váltotta fel, az elmélet egymástól jól elváló iteratív és topologikus részeihez igazodva. Könyvünk ugyanezt a felépítést követi. Az anyag összeállításakor igyekeztünk figyelembe venni és hasznosítani az időközben összegyűlt oktatási tapasztalatokat. Törekedtünk arra, hogy az ismereteken túl látásmódot adjunk, sőt reményeink szerint: látásmódot formáljunk.

A téma iránt érdeklődők figyelmébe ajánljuk Shapiro [64], Granas és Dugundji [26], valamint Zeidler [71] nagyszerű monográfiáit. Az újabb kutatási eredmények áttekintése megtalálható a [4] és [61] művekben. Remek elméleti összefoglalót és kiegészítést nyújt könyvünkhöz Losonczi funkcionálanalízis jegyzete [43], Járai mértékelméleti munkája [32], valamint Massey algebrai topológia könyve [46].

A matematika mostanra önállósodott, mondhatjuk: nagykorúvá vált. Az egykori szolgálóleányból csodálatos hercegnő lett, akinek teljes szépségét fölfogni manapság senki nem képes. A legtöbb amit várhatunk tőle, talán csak egy mosoly. Gazdag személyiségének egyetlen vonása is egész életre szóló élményt jelenthet. Ilyen csodálatos vonás a most bemutani kívánt elmélet. Őszintén reméljük, sikerül erről meggyőznünk a tisztelt Olvasót.

Végezetül, de nem utolsósorban szeretnénk kifejezni köszönetünket azoknak, akik munkájukkal hozzájárultak könyvünk szakmai tartalmának fejlesztéséhez: lektorainknak, Komornik Vilmosnak és Lovas Rezsőnek; ajánlónknak, Totik Vilmosnak; kollégáinknak, Fazekas Borbálának és Kertész Dávidnak.

Dr. Páles Zsolt
egyetemi tanár

Dr. Bessenyei Mihály
egyetemi docens

Debrecen, 2022. november 22.

Könyvünkben a következő megállapodásokat és jelöléseket fogjuk használni:

- $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok, azaz a pozitív egészek halmazát;
- $\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok $[0, +\infty[$ halmaza;
- $\overline{\mathbb{R}}$ a bővített valós számok halmaza;
- H° egy topologikus tér H részhalmazának belseje;
- $\overline{H}$ egy topologikus tér H részhalmazának lezártja;
- ∂H egy topologikus tér H részhalmazának határa;
- $U(p, r)$ egy metrikus tér p középpontú, r sugarú nyílt gömbje;
- $\overline{U}(p, r)$ egy metrikus tér p középpontú, r sugarú zárt gömbje;
- $\operatorname{diam}(H)$ egy metrikus tér H részhalmazának átmérője;
- $\operatorname{lin}(H)$ egy vektortér H részhalmazának lineáris burka;
- $\operatorname{conv}(H)$ egy vektortér H részhalmazának konvex burka;
- sign az előjel- (szignum-) függvény;
- det a determinánsfüggvény;
- id egy adott halmaz identikus leképezése.

I. rész

Iteratív fixponttételek és alkalmazásaik

Bevezetés – iteratív eredmények

A szukcesszív approximáció alapgondolatát már az ókori babilonban ismerték. E módszert később Newton és Raphson fejlesztette tovább. Simpsontól származik az $f(x) = 0$ egyenlet közelítő megoldására használatos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

rekurziós formula. Itt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ adott differenciálható függvény, x_1 pedig az alapintervallum rögzített pontja.

A szukcesszív approximáció technikáját Cauchy és Liouville egzisztencia- és unicitási tételek bizonyítására használta olyan differenciálegyenletekre, melyek megoldása explicit módon nem adható meg, mivel nem integrálható az egyenlet. Peano és Picard a módszert a közönséges, illetve parciális differenciálegyenletek elméletének egyik leghatékonyabb eszközévé formálta; munkásságukra tekintettel szokás az eljárást Peano–Picard-iterációként is említeni. A teljesség igénye nélkül ezt az iterációt az alábbi Cauchy-feladaton szemléltetjük:

$$x'(t) = tx(t), \qquad x(0) = 1.$$

Első lépésben átfogalmazzuk a Cauchy-feladatot egy vele ekvivalens integrálegyenletre. Mindkét oldalt integrálva $s = 0$-tól t-ig kapjuk, hogy

$$x(t) = 1 + \int_0^t sx(s)ds.$$

Tekintsük most a következő rekurzióval értelmezett sorozatot. Legyen $x_1(t) := 1$; ha már x_n adott, akkor legyen

$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t sx_n(s)ds.$$

Feladatunk az (x_n) függvénysorozat határfüggvényének kiszámítása. Teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k .$$

Vagyis

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \exp \frac{t^2}{2}.$$

Amint arról könnyen meggyőződhetünk, $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valóban megoldása a fönti Cauchy-feladatnak.

Bár a szukcesszív approximáció módszerét Cauchy [14], Liouville [41], Peano [54] és Picard [56] mellett számos jeles matematikus sikerrel alkalmazta, mégis Banach találta meg annak letisztult és hatékony változatát [2]. A kontrakciós elv, közismert nevén a Banach-féle fixponttétel, valójában a szukcesszív approximáció technikájának absztrakt változata. Az eredményt tekinthetjük úgy, mint az approximáló sorozat konvergenciájának elegendő feltételét. A korábbi vizsgálatokban ugyanis a konvergencia mindig külön tisztázandó kérdésként merült föl. A szukcesszív approximáció (a mértani sor összegképletével briliáns módon egybefonódva) immár a bizonyítás részévé válik. Másrészt autonómiája is megmarad, hiszen a fixpont létezésének és egyértelműségének biztosítása mellett lehetőséget nyújt a stabilitás vizsgálatára, előzetes és utólagos hibabecslésre, valamint a konvergenciasebesség mérésére. Végül, de nem utolsósorban, módszert kínál a fixpont (vagy ha tetszik: a megoldás) numerikus közelítésére. Ez az alkalmazások szempontjából nyilvánvalóan nagy jelentőséggel bír. Érdemes megjegyezni, hogy Banach eredetileg teljes normált terekben fogalmazta meg eredményét. Annak felismerése, hogy a tétel teljes metrikus terekben szintén érvényes, Caccioppoli érdeme.

Banach fixponttétele nem csak az absztrakció és alkalmazhatóság miatt jelentős mérföldkő az analízisben. Egy önálló és jelenleg is fejlődő tudományág, az iteratív fixponttételek elméletének előhírnöke. Jelen könyv első része ebbe a tudományágba kíván bepillantást nyújtani.

Az első fejezetben Banach tételét közöljük az eredeti [2] és egy alternatív [53] bizonyítással. Ezt követően két lehetséges általánosítási irányt mutatunk be a nemlineáris kontrakciók és a lineáris kvázikontrakciók esetére. Az előbbiek vizsgálata Browder [12], Boyd és Wong [10], valamint Matkowski [47] nevéhez, utóbbi pedig Ćirić [16] munkásságához kötődik.

Részletesen tárgyaljuk e két irány lehetséges közös általánosítását, bemutatva Hegedűs és Szilágyi [30], illetve Walter [70] fixponttételét, néhány következményét, valamint feltételének diszkusszióját. A fejezetet a nemexpanzív leképezésekre vonatkozó legalapvetőbb tudnivalókkal zárjuk.

Természetes igényként jelentkezik a kérdés, hogy milyen formában igaz a Banach-féle fixponttétel megfordítása. Vagyis ha valamely leképezés egyértelmű fixponttal bír, milyen egyéb megkötések mellett lesz alkalmas metrikát alapul véve kontrakció. E kérdésre a második fejezetben két lehetséges választ adunk Bessaga [5] és Ludvík [44] tételei alapján. Előbbi előnye, hogy akármilyen alaphalmaz esetén érvényes, utóbbié pedig, hogy az eredetivel topologikusan ekvivalens új metrikát biztosít.

A harmadik fejezetben klasszikus alkalmazásokat mutatunk be, számos ponton eltérve a klasszikus megközelítésektől. Ismertetjük Fredholm [22] és Volterra [69] eredményeit, utóbbihoz kapcsolva a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó globális egzisztencia- és unicitási tételt. Ezt követően Presić-típusú függvényegyenletek [58] egzisztencia- és unicitási kérdését tárgyaljuk. A megszokott utak helyett minden bizonyításban Bielecki átmetrizálási módszerét követjük [6]. Végezetül a Dini nevéhez fűződő inverzfüggvénytétel [18] Leach-féle általánosítását [39] mutatjuk be.

A témakör fontosságára és terjedelmére való tekintettel elkülönítve tárgyaljuk a Banach-féle fixponttétel fraktálelméleti alkalmazását. A negyedik fejezetben elsőként részletezzük a fraktáltér Pompeiu-féle konstrukcióját [57], amely Hausdorff munkássága révén vált közismertté [29]. Ezt követően kitérünk a fraktáltér teljességére vonatkozó Blaschke-tételre [8], valamint a fraktálok létezését és egyértelműségét biztosító Hutchinson-féle eredményre [31]. Ízelítőt adunk abból is, hogyan lehet a fraktálelmélet eredményeit a digitális képfeldolgozásban hasznosítani.

Az ötödik fejezet kiindulópontja a Knaster–Tarski-féle fixponttétel [36], illetve ennek Tarski [67] és Kantorovics [35] nevéhez kötődő változatai. Alkalmazásként a számosságaritmetika alaptételét, a monoton jobb oldalú differenciálegyenletek, illetve Presić-típusú függvényegyenletek egzisztenciatételét, végül egy struktúramentes fraktáltételt közlünk.

Az iteratív fixponttételekről szóló részt a modern variációszámítás egyik legfontosabb eszközének, az Ekeland-féle variációs elvnek [19] a bemutatásával zárjuk. Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy ebben az eredményben kiteljesedik, sőt új megvilágításba kerül a kontrakciós elv és az iterációs módszer. Az Ekeland-féle variációs elvet és a Caristi-féle fixponttételt egy önmagában is érdekes eszköz, a Bishop–Phelps-féle rendezés [7] segítségével nyerjük. Az Ekeland-féle variációs elv következményeiként bemutatjuk a stacionárius approximáció módszerét, Clarke fixponttételét [15], valamint Graves [27] és Ljuszternyik [45] nemlineáris nyílt leképezésekről szóló eredményeit.

1. fejezet

A kontrakciós elv és néhány változata

Elsőként a Banach-féle fixponttételt és annak három általánosítását mutatjuk be. Az egyes kiterjesztések bizonyításai egymástól és Banach eredeti megközelítésétől is függetlenek. Ezek az önálló gondolatok nem csupán önmagukban szépek. Rajtuk keresztül újszerű megvilágításba kerül a klasszikus kontrakciós elv.

1.1. A Banach-féle fixponttétel

Legyen (X, d) metrikus tér és $q \in]0, 1[$ rögzített. Azt mondjuk, hogy a $T\colon X \to X$ leképezés *kontrakció q faktorral*, ha minden $x, y \in X$ esetén

$$d(Tx, Ty) \leq qd(x, y).$$

Elsőként fölidézzük Banach alapvető eredményét, melyre két bizonyítást mutatunk. Az első Banach eredeti gondolatmenetét követi, amely a képek távolságát becsli az alappontok távolságával. A második bizonyítás Palais nevéhez fűződik; ötlete az alappontok távolságbecslése a képek távolságával.

1.1. tétel. *(Banach) Teljes metrikus tér bármely kontrakciójának létezik egyértelmű fixpontja.*

1. bizonyítás. Legyen $T\colon X \to X$ kontrakció q faktorral az (X, d) teljes metrikus téren. Rögzítsük az $x \in X$ elemet, és tekintsük az alábbi rekurzióval értelmezett (x_n) sorozatot:

$$x_1 := x; \qquad x_{n+1} := Tx_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Elsőként megmutatjuk, hogy (x_n) Cauchy-tulajdonságú. Legyen $k \geq 2$ természetes szám. Mivel T kontrakció, ezért

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(Tx_{k-1}, Tx_k) \leq qd(x_{k-1}, x_k) \leq \cdots \leq q^{k-1} d(x_1, x_2).$$

A háromszög-egyenlőtlenséget, az előző becslést, majd a mértani sor összegképletét alkalmazva kapjuk, hogy bármely $n < m$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left(q^{n-1} + q^n + \cdots + q^{m-2}\right) \cdot d(x_1, x_2) \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} \cdot d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel a fönti egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart, ezért elegendően nagy n index esetén kisebb lesz, mint ε. Vagyis van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy ha $n_0 \leq n < m$, akkor $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. A teljesség miatt létezik az (x_n) sorozatnak $x_0 \in X$ határértéke. A T kontrakció folytonosságát kihasználva kapjuk, hogy x_0 a keresett fixpont:

$$Tx_0 = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

Az egyértelműség igazolásához tegyük fel, hogy $y_0 \in X$ szintén fixpont. Ekkor $d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq qd(x_0, y_0)$. Mivel a metrika nemnegatív és $q \in]0, 1[$, ezért innen $d(x_0, y_0) = 0$ adódik; vagyis $x_0 = y_0$. □

2. bizonyítás. Csupán az előző bizonyításban szereplő (x_n) iterációs sorozat Cauchy tulajdonságára összpontosítunk. Elsőként legyenek $x, y \in X$ adott elemek; ekkor a háromszög-egyenlőtlenség és a kontrakciós tulajdonság miatt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, Tx) + d(Tx, Ty) + d(Ty, y) \\ &\leq d(x, Tx) + qd(x, y) + d(Ty, y) \end{aligned}$$

adódik. Így

$$d(x, y) \leq \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{1-q}.$$

Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$ rögzítettek úgy, hogy $n < m$. Alkalmazzuk az előbbi egyenlőtlenséget az $x = x_n$, valamint $y = x_m$ tagokra. Ekkor fölhasználva a definiáló rekurziót,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})}{1-q} \\ &\leq \frac{q^{n-1} + q^{m-1}}{1-q} \cdot d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{2q^{n-1}}{1-q} \cdot d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

következik. Innen pedig a bizonyítani kívánt Cauchy-tulajdonság már adódik. □

Az előző tétel egy következményének a levezetéséhez szükségünk lesz az alábbi egyszerű lemmára.

1.2. lemma. *Legyen X egy tetszőleges halmaz és $S, T\colon X \to X$ felcserélhető leképezések. Ha S-nek létezik egyértelmű fixpontja, akkor ez T-nek is fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X$ az S egyértelmű fixpontja. Ekkor $Tx = TSx = STx$, ami azt mutatja, hogy Tx is az S fixpontja. Az egyértelműség miatt $x = Tx$. □

1.3. következmény. *Ha (X, d) teljes metrikus tér és $T\colon X \to X$ olyan leképezés, amelynek valamelyik iteráltja kontrakció, akkor T-nek van egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy T^n kontrakció. Az 1.1. tétel szerint T^n-nek létezik egyértelmű fixpontja. Másrészt $S := T^n$ felcserélhető T-vel, így az előző lemma szerint T-nek is van fixpontja. Ha x és y a T leképezés fixpontjai, akkor az $x = Tx$ és $y = Ty$ egyenleteket iterálva kapjuk, hogy $x = T^n x$ és $y = T^n y$, tehát x és y a T^n leképezés fixpontjai. Ezért $x = y$. □

Külön figyelmet érdemelnek Banach bizonyításának azon mozzanatai, melyek eljárást szolgáltatnak a fixpont közelítésére, valamint a különféle hibabecslésekre. Mivel ezek a numerikus analízisben kulcsszerepet játszanak, önálló tételt fogalmazunk meg róluk.

1.4. tétel. *Ha (X, d) teljes metrikus tér, $T\colon X \to X$ kontrakció q faktorral, $x_0 \in X$ a T fixpontja, valamint (x_n) az $x_1 := x$, $x_{n+1} := Tx_n$ rekurzióval értelmezett sorozat, akkor érvényesek az alábbi hibabecslések:*

$$d(x_n, x_0) \le \frac{q^{n-1}}{1-q} d(x_1, x_2);$$

$$d(x_n, x_0) \le \frac{q}{1-q} d(x_{n-1}, x_n);$$

$$d(x_n, x_0) \le q d(x_{n-1}, x_0).$$

Bizonyítás. A Banach-féle fixponttétel első bizonyításában láttuk, hogy (x_n) konvergens és az x_0 fixponthoz konvergál, továbbá igazoltuk a

$$d(x_n, x_m) \le \frac{q^{n-1}}{1-q} \cdot d(x_1, x_2)$$

egyenlőtlenséget. Az első hibabecslés innen adódik, végrehajtva az $m \to \infty$ határátmenetet. A másodikat ennek mintájára kaphatjuk:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) + d(Tx_n, Tx_{n+1}) + \cdots + d(Tx_{m-2}, Tx_{m-1}) \\ &\leq \left(q + q^2 + \cdots + q^{m-n}\right) \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Innen az $m \to \infty$ határátmenetet véve a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. Végezetül,

$$d(x_n, x_0) = d(Tx_{n-1}, Tx_0) \leq qd(x_{n-1}, x_0),$$

ami pedig épp a harmadik becslés. □

Megjegyezzük, hogy a tételbeli hibabecsléseket a szakirodalom rendre *a priori* és *a posteriori* hibabecslésként, illetve a konvergencia sebességére vonatkozó becslésként tartja számon. Az alkalmazások szempontjából sokszor hasznosnak bizonyul a Banach-féle fixponttétel paraméteres változata is:

1.5. tétel. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér, továbbá $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kontrakciók olyan sorozata X-en, melyek közös faktora q, és amelyek pontonként konvergálnak egy $T_0\colon X \to X$ leképezéshez. Ekkor T kontrakció q faktorral, valamint a T_n leképezések fixpontjainak sorozata konvergál T_0 fixpontjához.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in X$ tetszőleges elemek. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d(T_n x, T_n y) \leq qd(x, y)$; végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet és fölhasználva a pontonkénti konvergenciát kapjuk, hogy T szintén kontrakció q faktorral.

Jelölje x_n a T_n kontrakció fixpontját. Ekkor

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) = d(T_n x_n, T_0 x_0) &\leq d(T_n x_n, T_n x_0) + d(T_n x_0, T_0 x_0) \\ &\leq qd(x_n, x_0) + d(T_n x_0, T_0 x_0). \end{aligned}$$

Rendezve:

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{1-q} d(T_n x_0, T_0 x_0).$$

Itt a jobb oldal nullához tart $n \to \infty$ esetén a pontonkénti konvergencia miatt. Tehát az (x_n) sorozat konvergál x_0-hoz. □

Hasonló állítás fogalmazható meg azonos faktorú kontrakciók pontonként konvergens sorozatának határfüggvényére. Mivel a bizonyítása az előző tétel bizonyításához hasonló, ezért ennek részleteitől (valamint magának az állításnak a pontos megfogalmazásától) eltekintünk. Végezetül a Banach-féle fixponttételnek az alkalmazások igazolásánál jól használható lokális változatát fogalmazzuk meg.

1.6. tétel. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $p \in X$ és $r > 0$, valamint tegyük fel, hogy $T\colon U(p, r) \to X$ kontrakció egy olyan q faktorral, hogy $d(Tp, p) < (1 - q)r$. Ekkor létezik T-nek egyértelmű fixpontja az $U(p, r)$ nyílt gömbben.*

Bizonyítás. Válasszuk meg a $0 < \rho < r$ számot úgy, hogy $d(Tp, p) \leq (1 - q)\rho$ teljesüljön. Ekkor $x \in \overline{U}(p, \rho)$ esetén

$$d(Tx, p) \leq d(Tx, Tp) + d(Tp, p) \leq qd(x, p) + (1-q)\rho \leq q\rho + (1-q)\rho = \rho,$$

tehát T az $\overline{U}(p, \rho)$ zárt gömböt önmagába képezi. Mivel egy teljes metrikus tér bármely zárt részhalmaza maga is teljes metrikus tér, ezért a Banach-féle fixponttétel szerint létezik T-nek fixpontja az $\overline{U}(p, \rho)$ halmazban. Nyilván e fixpont T értelmezési tartományának, vagyis az $U(p, r)$ halmaznak is eleme. □

1.2. A Browder–Matkowski-féle fixponttétel

Banach klasszikus eredményét olyan leképezésekre fogjuk kiterjeszteni, amelyeknél a képek távolsága az alappontok távolságának bizonyos függvényével becsülhető. Ehhez, sőt a későbbi vizsgálatainkhoz is, szükségünk lesz az alábbi segéderedményre.

1.7. lemma. *Ha $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton növő, folytonos függvény, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\varphi(t) < t$ *minden* $t > 0$ *esetén;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$.

Továbbá mindkét esetben $\varphi(0) = 0$ teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel elsőként, hogy $\varphi(t) < t$ teljesül, ha t pozitív. A folytonosság miatt ekkor $\varphi(0) = 0$, és így $\varphi^n(0) = 0$. Ha $t > 0$, akkor a $\varphi(t) < t$ egyenlőtlenség iterálásából következik, hogy $(\varphi^n(t))$ monoton csökkenő sorozat. Mivel az értékkészlet $\mathbb{R}_+$ része, ezért alulról korlátos is. Így létezik a sorozat pontonkénti határfüggvénye, melyet jelöljön f. Indirekt módon tegyük fel, hogy $f(t) > 0$ valamely $t > 0$ esetén. Mivel φ folytonos, ezért

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(t) = \varphi\big(\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t)\big) = \varphi\big(f(t)\big) < f(t),$$

ami ellentmondás. Tehát f azonosan nulla. Megfordítva, tegyük fel, hogy $t \le \varphi(t)$ teljesül valamely pozitív t esetén. Teljes indukciót alkalmazva és a monotonitást fölhasználva kapjuk, hogy

$$t \le \varphi(t) \le \varphi^2(t) \le \cdots \le \varphi^n(t).$$

Azonban ez utóbbi tag nullához tart, ha $n \to \infty$, ami ellentmondás. Végezetül, a monotonitás és a most belátott (i) tulajdonság miatt $0 \le \varphi(0) \le \varphi(t) < t$ teljesül minden pozitív t értékre. Ebből pedig a rendőrelv szerint $\varphi(0) = 0$ következik. □

A továbbiakban *összehasonlító függvény*en olyan $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos, monoton növő függvényt értünk, amely teljesíti a fönti lemmában megszabott valamelyik (amit az ekvivalencia miatt úgy is mondhatnánk: mindegyik) tulajdonságot. Legyen (X, d) metrikus tér, $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pedig egy összehasonlító függvény. Azt mondjuk, hogy a $T\colon X \to X$ leképezés *nemlineáris kontrakció a φ összehasonlító függvénnyel*, ha bármely $x, y \in X$ esetén

$$d(Tx, Ty) \le \varphi\big(d(x, y)\big)$$

teljesül. Hangsúlyozzuk, hogy itt a „nemlineáris” jelző alapvetően nem a T leképezésre, hanem a φ jelenlétére utal. Látható, hogy $q \in]0, 1[$ esetén $\varphi(t) = qt$ összehasonlító függvényt definiál, ezért a nemlineáris kontrakciók a szokásos értelemben vett kontrakciók általánosításai.

1.8. tétel. *(Browder–Matkowski) Teljes metrikus tér bármely nemlineáris kontrakciójának létezik egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $T\colon X \to X$ pedig φ-kontrakció. Rögzített $x \in X$ esetén értelmezzük az (x_n) sorozatot az $x_1 = x$ és $x_{n+1} = Tx_n$ rekurzióval. Azt fogjuk igazolni, hogy (x_n) konvergens, határértéke pedig az egyértelmű fixpont.

Elsőként vegyük észre, hogy az egymást követő sorozatelemek távolsága nullsorozat. Valóban,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le \varphi\big(d(x_{n-1}, x_n)\big) \le \cdots \le \varphi^{n-1}\big(d(x_1, x_2)\big),$$

ez utóbbi tag pedig az előző lemma szerint nullához tart $n \to \infty$ esetén. Másodszor, megmutatjuk, hogy T tartományinvariáns, azaz $T\colon \overline{U}(p,\varepsilon) \to \overline{U}(p,\varepsilon)$, amennyiben $d(p,Tp) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$. Valóban, ha $q \in \overline{U}(p,\varepsilon)$, akkor

$$\begin{aligned} d(p,Tq) &\le d(p,Tp) + d(Tp,Tq) \le d(p,Tp) + \varphi\big(d(p,q)\big) \\ &\le d(p,Tp) + \varphi(\varepsilon) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel (x_n) egymást követő tagjainak távolsága nullsorozat, ezért van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, hogy $d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon)$. Ám ekkor a tartományinvariancia miatt $T\big(\overline{U}(x_{n_0},\varepsilon)\big) \subseteq \overline{U}(x_{n_0},\varepsilon)$ adódik. Iterációval és teljes indukciót alkalmazva,

$$T^m\big(B(x_{n_0},\varepsilon)\big) \subseteq \cdots \subseteq T\big(B(x_{n_0},\varepsilon)\big) \subseteq B(x_{n_0},\varepsilon).$$

Ha tehát $m, n > n_0$, akkor $x_n, x_m \in \overline{U}(x_{n_0},\varepsilon)$. Azaz $d(x_n, x_m) < 2\varepsilon$, ami pedig pontosan a Cauchy-tulajdonság.

A teljesség miatt létezik az (x_n) sorozatnak $x_0 \in X$ határértéke. Megmutatjuk, hogy x_0 a keresett fixpont. Valóban, mivel $x_{n+1} = Tx_n$, és mivel T egy φ-kontrakció, ezért

$$d(x_0,Tx_0) \le d(x_0,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx_0) \le d(x_0,x_{n+1}) + \varphi\big(d(x_n,x_0)\big).$$

Ez utóbbi tag nullához tart, ha $n \to \infty$. Ez csak úgy lehet, hogy $x_0 = Tx_0$ fönnáll.

Az egyértelműség igazolásához indirekt módon tegyük fel, hogy $x_0, y_0 \in X$ különböző fixpontok. Ekkor $d(x_0,y_0) > 0$, s ezért

$$d(x_0,y_0) = d(Tx_0,Ty_0) \le \varphi\big(d(x_0,y_0)\big) < d(x_0,y_0),$$

ami ellentmondás. Tehát $x_0 = y_0$, amivel a bizonyítást befejeztük. □

1.3. A Ćirić-féle fixponttétel

Banach fixponttételének egy másik irányú általánosítási lehetőségét vizsgáljuk meg. Ehhez szükségünk lesz a következő, részben technikai fogalmakra. Ha X nem üres halmaz, $T\colon X \to X$ adott leképezés, akkor az $x \in X$ elem *n hosszú pályáján*, illetve *pályáján* a következő halmazokat értjük:

$$\mathcal{O}_n(x) = \{T^k x \mid k \in \{0,\dots,n\}\}, \qquad \mathcal{O}(x) = \{T^k x \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Legyen (X, d) metrikus tér, $q \in]0, 1[$ pedig rögzített. A $T\colon X \to X$ leképezést *q faktorú lineáris kvázikontrakció*nak nevezzük, ha minden $x, y \in X$ esetén

$$d(Tx, Ty) \leq q \operatorname{diam}\{x, y, Tx, Ty\}$$

teljesül. A „lineáris" jelző természetesen itt sem a T leképezésre vonatkozik, hanem a felső becslés jellegére utal. Fontos megemlíteni, hogy egy lineáris kvázikontrakció nem feltétlen folytonos. Mégis, a teljességet föltételezve, érvényben marad a fixpont létezésére és egyértelműségére vonatkozó állítás.

1.9. tétel. *(Ćirić) Teljes metrikus tér bármely lineáris kvázikontrakciójának létezik egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $T\colon X \to X$ pedig q faktorú kvázikontrakció. Rögzített $x \in X$ esetén tekintsük az $x_1 = x$ és $x_{n+1} = Tx_n$ módon adott sorozatot. Célunk azt megmutatni, hogy (x_n) konvergens és határértéke a T egyetlen fixpontja.

Elsőként igazoljuk, hogy (x_n) korlátos, azaz $\operatorname{diam}\mathcal{O}(x)$ véges. Ha $\operatorname{diam}\mathcal{O}(x) = 0$, akkor x a keresett fixpont, így föltehetjük, hogy $\operatorname{diam}\mathcal{O}(x) > 0$. Legyen $n \in \mathbb{N}$, valamint $x_k, x_l \in \mathcal{O}_n(x)$ adottak, ahol $k, l \in \{2, \ldots, n+1\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} d(x_k, x_l) = d(T^{k-1}x, T^{l-1}x) &\leq q \operatorname{diam}\{T^{k-2}x, T^{k-1}x, T^{l-2}x, T^{l-1}x\} \\ &\leq q \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x) < \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x). \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy az n hosszú pályák átmérője nem adódhat kezdőelemtől különböző tagok távolságaként. Vagyis létezik olyan $k \in \{2, \ldots, n+1\}$ index, hogy

$$\operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x) = d(x, x_k).$$

Azonban ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x) = d(x, x_k) &= d(x, T^{k-1}x) \\ &\leq d(x, Tx) + d(Tx, T^{k-1}x) \\ &\leq d(x, Tx) + q \operatorname{diam}\{x, Tx, T^{k-2}x, T^{k-1}x\} \\ &\leq d(x, Tx) + q \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x), \end{aligned}$$

ahonnan rendezéssel kapjuk, hogy x véges hosszúságú pályái közös korlát alatt maradnak. Tehát $\mathcal{O}(x)$ valóban korlátos.

Másodszor azt igazoljuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Ennek érdekében l szerinti teljes indukcióval a következő becslést igazoljuk. Ha $n, m, l \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m > n \geq 2$ és $l \leq n-1$, akkor

$$d(x_n, x_m) \leq q^l \operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-n+l}(x_{n-l}).$$

Mivel

$$\{x_{n-1}, x_n, x_{m-1}, x_m\} \subseteq \mathcal{O}_{m-n+1}(x_{n-1})$$

és T kvázikontrakció, ezért

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \\ &\leq q \operatorname{diam} \{x_{n-1}, x_n, x_{m-1}, x_m\} \\ &\leq q \operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-n+1}(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Tehát a becslés $l = 1$ esetén igaz; tegyük fel, hogy valamely rögzített l értékre szintén érvényes. Mivel a pályák átmérője nem adódhat kezdőelemtől különböző elemek távolságaként, ezért van olyan $k \in \{1, \dots, m-n+l\}$ index, amellyel $\operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-n+l}(x_{n-l}) = d(x_{n-l}, x_{n-l+k})$ teljesül. Ilyen választással élve,

$$\begin{aligned} d(x_{n-l}, x_{n-l+k}) &= d(Tx_{n-l-1}, Tx_{n-l-1+k}) \\ &\leq q \operatorname{diam} \{x_{n-l-1}, x_{n-l}, x_{n-l-1+k}, x_{n-l+k}\} \\ &\leq q \operatorname{diam} \mathcal{O}_{k+1}(x_{n-l-1}) \\ &\leq q \operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-n+l+1}(x_{n-l-1}). \end{aligned}$$

Mindezeket az indukciós feltétellel összevetve,

$$d(x_n, x_m) \leq q^l d(x_{n-l}, x_{n-l+k}) \leq q^{l+1} \operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-n+l+1}(x_{n-l-1}).$$

Az eredeti becslés $l = n-1$ speciális esete szerint

$$d(x_n, x_m) \leq q^{n-1} \operatorname{diam} \mathcal{O}_{m-1}(x).$$

Azonban korábban beláttuk, hogy $\operatorname{diam} \mathcal{O}(x)$ véges; tehát a fenti egyenlőtlenség bal oldala nullához tart, ha $n \to \infty$. Ez pedig épp a Cauchy-tulajdonságot jelenti.

A teljesség miatt az (x_n) sorozatnak létezik $x_0 \in X$ határértéke. Harmadik lépésben azt mutatjuk meg, hogy x_0 fixpont. Nyilván

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &\leq d(x_0, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_0) \\ &\leq d(x_0, x_{n+1}) + q \operatorname{diam} \{x_n, x_{n+1}, x_0, Tx_0\}. \end{aligned}$$

Mivel $x_n \to x_0$, ezért itt az első tag nullához, az átmérő pedig a $d(x_0, Tx_0)$ értékhez tart. Vagyis határátmenet után a föntiekből $d(x_0, Tx_0) \leq qd(x_0, Tx_0)$ következik. Mivel $q < 1$, ezért innen $d(x_0, Tx_0) = 0$, azaz $x_0 = Tx_0$ adódik.

Végezetül a fixpont egyértelműségét kell bizonyítani. Tegyük fel, hogy x_0 és y_0 a T fixpontjai. Ekkor

$$d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leq q \operatorname{diam}\{x_0, Tx_0, y_0, Ty_0\} = qd(x_0, y_0).$$

Innen $q < 1$ miatt csakis $d(x_0, y_0) = 0$ teljesülhet. Ez azt jelenti, hogy T fixpontja valóban egyértelmű. □

1.4. A Hegedűs–Szilágyi–Walter-féle fixponttétel

Az előzőekben tárgyalt nemlineáris kontrakciók és lineáris kvázikontrakciók kézenfekvő közös általánosításai a nemlineáris kvázikontrakciók, vagyis az olyan T leképezések, melyeknél a képek távolsága az $\{x, y, Tx, Ty\}$ halmaz átmérőjének bizonyos függvényével becsülhető. Mit állíthatunk ilyenkor a fixpont létezéséről és egyértelműségéről? A valós számok halmazát a szokásos metrikával ellátva a $\pi/2$-vel való eltolás nemlineáris kvázikontrakció a $\varphi(t) = t - \arctan(t)$ összehasonlító függvényre nézve. (Az összehasonlító függvény fogalmát a korábbi értelemben használjuk.) Valóban: ekkor $d(Tx, Ty) = |x-y|$ és $\operatorname{diam}\{x, y, Tx, Ty\} = |x-y| + \pi/2$. Mivel $\arctan t < \pi/2$, ezért $d(Tx, Ty) < \varphi(\operatorname{diam}\{x, y, Tx, Ty\})$. Másrészt eltolásról lévén szó, T nyilvánvalóan nem rendelkezik fixponttal. Vagyis léteznek fixpontmentes nemlineáris kvázikontrakciók. Azonban kiderül, hogy az elemek pályáira szabott korlátossági többletfeltétel már biztosítja a fixpont egyértemű létezését.

Ha (X, d) metrikus tér, $T\colon X \to X$ adott leképezés, akkor $\mathcal{O}(x, y)$ jelöli az $x, y \in X$ elemek közös pályáját, vagyis az $\mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}(y)$ halmazt. Azt mondjuk, hogy a T leképezés *gyenge kvázikontrakció* a φ összehasonlító függvénnyel, ha korlátos pályákat származtat, és minden $x, y \in X$ esetén

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, y))$$

teljesül. A nemlineáris kvázikontrakció megnevezést elkerülve *erős kvázikontrakció*ról szólunk, ha bármely $x, y \in X$ esetén T teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(\operatorname{diam}\{x, y, Tx, Ty\}).$$

A későbbiekben elegendő feltételeket adunk arra, hogy egy erős kvázikontrakció korlátos pályákat származtasson, vagyis hogy gyenge kvázikontrakció legyen.

1.10. lemma. *Ha T gyenge φ-kvázikontrakció, úgy T^n gyenge φ^n-kvázikontrakció.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in X$ tetszőlegesek. Ha $k, l \geq 1$, akkor nyilvánvalóan $\mathcal{O}(T^{k-1}x, T^{l-1}y) \subseteq \mathcal{O}(x, y)$, így T kvázikontraktivitása és φ monotonitása miatt

$$\begin{aligned} d(T^k x, T^l y) &= d(TT^{k-1}x, TT^{l-1}y) \\ &\leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(T^{k-1}x, T^{l-1}y)\big) \leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, y)\big). \end{aligned}$$

Mivel ez az egyenlőtlenség $x = y$ esetén is érvényes, ezért

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \mathcal{O}(Tx, Ty) &= \sup_{k,l \in \mathbb{N}} \{d(T^k x, T^l y), d(T^k x, T^l x), d(T^k y, T^l y)\} \\ &\leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, y)\big). \end{aligned}$$

Innentől a lemma állítását teljes indukcióval kapjuk. Az állítás $n = 1$ esetén triviális, és tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén már beláttuk. Ekkor az előző egyenlőtlenséget és φ monotonitását használva

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x, T^{n+1}y) &= d(T^n Tx, T^n Ty) \\ &\leq \varphi^n\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(Tx, Ty)\big) \leq \varphi^{n+1}\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, y)\big) \end{aligned}$$

következik, és éppen ezt kellett igazolnunk. □

1.11. tétel. *(Hegedűs–Szilágyi–Walter) Teljes metrikus tér bármely gyenge kvázikontrakciójának létezik egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen (X, d) teljes metrikus tér és legyen $T\colon X \to X$ gyenge kvázikontrakció φ összehasonlító függvénnyel. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Első lépésben ismét azt igazoljuk, hogy az $x_1 := x$ és $x_{n+1} := Tx_n$ módon adott (x_n) sorozat Cauchy-tulajdonságú. A pályák korlátossága és (φ^n) pontonkénti konvergenciája biztosítja, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, amellyel $\varphi^{n_0}\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x)\big) < \varepsilon/2$ teljesül. Ha tehát $n > n_0$, akkor az előző lemma miatt

$$d(T^{n_0}x, T^n x) \leq \varphi^{n_0}\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, T^{n-n_0}x)\big) = \varphi^{n_0}\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x)\big) < \varepsilon/2.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt innen $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n, m > n_0$. Vagyis (x_n) Cauchy-sorozat.

A tér teljessége miatt az (x_n) sorozatnak létezik $x_0 \in X$ határértéke. Második lépésben azt igazoljuk, hogy az x_0 iteráltjaiból álló sorozat határértéke szintén x_0. Ismét az előző lemma alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d(x_0, T^n x_0) &\leq d(x_0, x_n) + d(x_n, T^n x_0) \\ &= d(x_0, x_n) + d(T^n x, T^n x_0) \\ &\leq d(x_0, x_n) + \varphi^n\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x, x_0)\big). \end{aligned}$$

E felső becslés pedig az (x_n) sorozat és (φ^n) konvergencia tulajdonságai miatt nullához tart $n \to \infty$ esetén.

Végezetül azt fogjuk igazolni, hogy $\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0) = 0$. Ha $n, k \in \mathbb{N}$, akkor a korábbi lemma és φ monotonitása miatt

$$\begin{aligned} d(T^n x_0, T^{n+k} x_0) &\leq \varphi^n\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0, T^k x_0)\big) \\ &= \varphi^n\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big) \leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big). \end{aligned}$$

Így

$$\sup_{n,m \in \mathbb{N}} d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big) < \operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0),$$

amiből

$$\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d(x_0, T^n x_0)$$

következik. Másrészt $T^n x_0 \to x_0$; ezért van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0) = \max\{d(x_0, T^k x_0) \mid k = 1, \ldots, m\}.$$

Legyen $k \in \{1, \ldots, m\}$ az az index, amely az átmérőt meghatározza. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ választás mellett

$$\begin{aligned} d(x_0, T^k x_0) &\leq d(x_0, T^{n+k} x_0) + d(T^{n+k} x_0, T^k x_0) \\ &\leq d(x_0, T^{n+k} x_0) + \varphi^k\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(T^n x_0, x_0)\big) \\ &= d(x_0, T^{n+k} x_0) + \varphi^k\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big) \\ &\leq d(x_0, T^{n+k} x_0) + \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big). \end{aligned}$$

Végrehajtva az $n \to \infty$ határátmenetet és szem előtt tartva az előző észrevételeket,

$$\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0) = d(x_0, T^k x_0) \leq \varphi\big(\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0)\big)$$

adódik. Azonban φ összehasonlító függvény, ezért a fenti egyenlőtlenség csakis $\operatorname{diam} \mathcal{O}(x_0) = 0$ esetén teljesülhet. Ebből speciálisan a kívánt $x_0 = Tx_0$ tulajdonság is következik. A fixpont egyértelműségét a korábban látott módszerekkel nyerhetjük. $\square$

Mint ahogy azt a kapcsolódó tételek bizonyításaiból láthatjuk, az eddig vizsgált általánosított kontrakciók korlátos pályákat származtatnak. Tehát a korábban bemutatott fixponttételek adódnak az előző eredményből. Most további alkalmazásokat ismertetünk erős kvázikontrakciókra.

1.12. következmény. *Ha (X,d) teljes metrikus tér, φ pedig olyan összehasonlító függvény, hogy $(\mathrm{id}-\varphi)$ szigorúan monoton szürjekció, akkor bármely erős φ-kvázikontrakciónak létezik egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $T\colon X\to X$ erős kvázikontrakció a feltételeknek eleget tevő φ összehasonlító függvénnyel. Az előző tétel miatt elegendő csupán azt megmutatni, hogy T korlátos pályákat származtat. Legyen $x\in X$ rögzített. Ekkor

$$\operatorname{diam}\mathcal{O}_{n+1}(x)\le d(x,Tx)+\operatorname{diam}\mathcal{O}_n(Tx)\le d(x,Tx)+\varphi\big(\operatorname{diam}\mathcal{O}_{n+1}(x)\big),$$

így

$$(\mathrm{id}-\varphi)\big(\operatorname{diam}\mathcal{O}_{n+1}(x)\big)\le d(x,Tx).$$

Mivel $(\mathrm{id}-\varphi)$ szigorúan monoton növő, ezért van inverze. A szürjektivitás biztosítja, hogy az inverz mindkét oldalra alkalmazható. Sőt, az egyenlőtlenség iránya sem változik meg. Ez azt jelenti, hogy x minden véges hosszúságú pályája közös korlát alatt marad. □

1.13. következmény. *Ha (X,d) teljes metrikus tér, φ pedig olyan összehasonlító függvény, hogy $\varphi^n(t)\le c_n t$ teljesül a $\sum c_n$ konvergens sorral, akkor minden erős φ-kvázikontrakciónak létezik egyértelmű fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $T\colon X\to X$ erős kvázikontrakció a feltételeknek eleget tevő φ összehasonlító függvénnyel. Ismét elegendő csupán azt igazolni, hogy T korlátos pályákat származtat. Legyen $x\in X$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}\mathcal{O}_{n+1}(x)&\le \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x)+d(T^nx,T^{n+1}x)\\&\le \operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x)+\varphi^n\big(\operatorname{diam}\mathcal{O}_{n+1}(x)\big).\end{aligned}$$

Tehát az $a_n:=\operatorname{diam}\mathcal{O}_n(x)$ sorozatra $a_{n+1}\le a_n+\varphi^n(a_{n+1})$ teljesül. Teleszkóposan összegezve az $a_{k+1}-a_k\le\varphi^k(a_{k+1})$ egyenlőtlenségeket, valamint szem előtt tartva az (a_n) és φ monotonitási tulajdonságait,

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_{n_0}&=\sum_{k=n_0}^{n}(a_{k+1}-a_k)\le\sum_{k=n_0}^{n}\varphi^k(a_{k+1})\\&\le\sum_{k=n_0}^{n}\varphi^k(a_{n+1})\le\sum_{k=n_0}^{\infty}\varphi^k(a_{n+1})\le\sum_{k=n_0}^{\infty}c_k a_{n+1}\end{aligned}$$

adódik. Válasszuk az $n_0 \in \mathbb{N}$ indexet úgy, hogy $\sum_{k=n_0}^{\infty} c_k < 1$ teljesüljön. Ilyen választás nyilvánvalóan lehetséges. Ekkor a fönti egyenlőtlenség átrendezett alakja mutatja, hogy (a_n) valóban korlátos. □

Érdemes még megemlíteni a Hegedűs–Szilágyi–Walter-fixponttételnek azt az egyszerű következményét, mely szerint *kompakt metrikus tér bármely gyenge kvázikontrakciójának létezik egyértelmű fixpontja.* Megjegyezzük azt is, hogy már egy erős kvázikontrakció sem feltétlenül folytonos. Ez az oka annak, hogy az utóbbi eredményekben az iterációs sorozat határértékének fixponttulajdonságát nem a folytonosságra hivatkozva, hanem egyéb módszerek segítségével mutattuk meg.

1.5. Szigorúan nemexpanzív leképezések

Mivel egy Banach-tér izometriái között vannak fixpontmentes leképezések (például a transzlációk ilyenek), ezért a kontrakció klasszikus fogalmában a $q = 1$ választás nem célravezető. A fejezet lezárásaként azt vizsgáljuk, hogy a $q = 1$ esetben a szigorú egyenlőtlenség használatával mikor állíthatjuk a fixpont létezését.

Legyen (X, d) metrikus tér. Azt mondjuk, hogy a $T \colon X \to X$ leképezés *szigorúan nemexpanzív*, ha minden $x, y \in X$ és $x \neq y$ esetén

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

1.14. tétel. *Létezik teljes metrikus téren értelmezett fixpontmentes, szigorúan nemexpanzív leképezés. Kompakt metrikus tér bármely szigorúan nemexpanzív leképezésének létezik egy és csak egy fixpontja.*

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához tekintsük a valós számok halmazát a szokásos metrikával, és legyen $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés az alábbi módon adott:

$$Tx = \log(\exp(x) + 1).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $\xi \in \mathbb{R}$ esetén $|T'\xi| < 1$. Ezért a Lagrange-féle középértéktétel miatt T szigorúan nemexpanzív leképezés. Másrészt minden $x \in \mathbb{R}$ mellett $x < Tx$, tehát T nem rendelkezhet fixponttal.

Legyen most X kompakt metrikus tér, s legyen $T \colon X \to X$ egy szigorúan nemexpanzív leképezés. Tekintsük a $\varphi(x) = d(x, Tx)$ függvényt.

Mivel $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ folytonos, X pedig kompakt, ezért van olyan $x_0 \in X$, hogy $\varphi(x_0) = \inf_X \varphi$. Másrészt

$$d(x_0, Tx_0) = \varphi(x_0) \leq \varphi(Tx_0) = d\big(Tx_0, T(Tx_0)\big) \leq d(x_0, Tx_0).$$

Mivel T szigorúan nemexpanzív, ezért itt egyenlőség csakis $d(x_0, Tx_0) = 0$ esetén állhat, vagyis ha x_0 fixpont. Az egyértelműségre vonatkozó állítás nyilvánvaló, ezért bizonyítását elhagyjuk. $\square$

2. fejezet

A Banach-féle fixponttétel megfordításai

Az egyértelmű fixpont létezése nemcsak következménye, hanem lényegében meghatározó sajátossága a kontrakciós tulajdonságnak. Ezt a meglepő kapcsolatot Bessaga és Ludvík tételein keresztül mutatjuk be.

2.1. Bessaga tétele

Elsőként egy tetszőleges halmaz egyértelmű fixponttal bíró leképezéseit vizsgáljuk. A fő eredmény bizonyítása egy alkalmas metrika konstrukcióján múlik, aminek létezését a Kuratowski–Zorn-lemmával igazoljuk.

2.1. tétel. *Ha X nem üres halmaz, $T\colon X \to X$ olyan leképezés, hogy T minden iteráltjának legfeljebb egy fixpontja van, akkor bármely $q \in]0,1[$ esetén megadható olyan d metrika, melyre nézve T kontrakció q faktorral. Továbbá ha T-nek van fixpontja, akkor d úgy is választható, hogy (X,d) teljes metrikus tér legyen.*

Bizonyítás. Elsőként megmutatjuk, hogy létezik az alábbi feltételeknek eleget tevő $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ függvény:

(*i*) $\varphi(x) \geq 0$ minden $x \in X$ esetén;

(*ii*) $\varphi(x) = 0$ pontosan akkor, ha x fixpontja T-nek;

(*iii*) $\varphi(Tx) \leq q\varphi(x)$ minden $x \in X$ esetén.

Jelölje Φ azon (D, φ) párok halmazát, amelyekre teljesülnek a következő kívánalmak: $D \subseteq X$ és $T(D) \subseteq D$, valamint $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ eleget tesz a fönti három tulajdonságnak.

Megmutatjuk, hogy minden $x_0 \in X$ esetén van olyan $(D, \varphi) \in \Phi$, hogy $x_0 \in D$. Legyen $D = \mathcal{O}(x_0)$ az x_0 elem pályája. Világos, hogy ekkor $T(D) \subseteq D$. A pálya szerkezetét illetően két eset fordulhat elő: vagy $T^i x_0 \neq T^j x_0$, ha $i \neq j$, vagy pedig létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ index, hogy $\mathcal{O}(T^k x_0)$ egyelemű és minden $0 \leq i < j \leq k-1$ esetén $T^i x_0 \neq T^j x_0$. Ha ugyanis nem az első eset áll fönn, akkor léteznek olyan $k < j$ indexek, hogy $T^k x_0 = T^j x_0$; föltehető, hogy k a legkisebb ilyen index, j pedig az ehhez tartozó legkisebb index. Ekkor

$$T^{j-k}(T^k x_0) = T^j x_0 = T^k x_0;$$
$$T^{j-k}(T^{k+1} x_0) = TT^j x_0 = TT^k x_0 = T^{k+1} x_0.$$

Vagyis a T^{j-k} leképezésnek mind $T^k x_0$, mind pedig $T^{k+1} x_0$ fixpontja. Tekintve, hogy T bármely iteráltjának legfeljebb egy fixpontja van, $T^k x_0 = T^{k+1} x_0$ adódik; ezt az egyenletet iterálva épp a második pályatípushoz jutunk.

Definiáljuk a $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ leképezést a következő módon: legyen $\varphi(T^i x_0) := q^i$, ha a pálya az első típusú. A második típusú pálya esetén legyen $\varphi(T^i x_0) := q^i$, ha $0 \leq i \leq k-1$, míg az $i \geq k$ esetben legyen nulla. Megmutatjuk, hogy ilyen választás mellett φ teljesíti az elvárt tulajdonságokat.

Ha a pálya első típusú, akkor φ pozitív és T-nek nincs fixpontja, tehát (i) és (ii) teljesül. A harmadik tulajdonság ellenőrzéséhez legyen $x = T^i x_0$ alakban adott. Ekkor

$$\varphi(Tx) = \varphi(T^{i+1} x_0) = q^{i+1} = q\varphi(T^i x_0).$$

Ha a pálya második típusú, akkor az első tulajdonság φ definíciója miatt teljesül. Legyen $x = T^i x_0$. Tegyük fel, hogy x fixpontja T-nek. Ekkor $x = Tx$ miatt $T^i x_0 = T^{i+1} x_0$, ezért $k \leq i$. Ám ekkor $\varphi(x) = 0$ definíció szerint. Megfordítva, ha $\varphi(x) = 0$, akkor szükségképp $k \leq i$ és így

$$x = T^i x_0 = T^{i+1} x_0 = TT^i x_0 = Tx.$$

Vagyis a második tulajdonság szintén fönnáll. Végezetül, a $\varphi(Tx) \leq q\varphi(x)$ tulajdonságot hármas esetszétválasztással ellenőrizhetjük.

Ha $i \leq k-2$, akkor

$$\varphi(Tx) = \varphi(T^{i+1} x_0) = q^{i+1} = qq^i = q\varphi(T^i x_0) = q\varphi(x).$$

Ha $i = k - 1$, akkor

$$\varphi(Tx) = \varphi(T^k x_0) = 0 < q^k = qq^{k-1} = q\varphi(T^{k-1}x_0) = q\varphi(x).$$

Ha $i \geq k$, akkor

$$\varphi(Tx) = \varphi(T^{i+1}x_0) = 0 = q\varphi(T^i x_0) = q\varphi(x).$$

Tehát Φ valóban nem üres. Értelmezzük most a $\preceq$ relációt a következő módon: $(D_1, \varphi_1) \preceq (D_2, \varphi_2)$ pontosan akkor, ha $D_1 \subseteq D_2$ és $\varphi_2|_{D_1} = \varphi_1$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $\preceq$ parciális rendezés a Φ halmazon. Legyen

$$\mathscr{L} = \{(D_\lambda, \varphi_\lambda) \in \Phi \mid \lambda \in \Lambda\}$$

tetszőleges lánc, valamint $D = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ és $x \in D_\lambda$ esetén $\varphi(x) = \varphi_\lambda(x)$. Megmutatjuk, hogy $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ függvény. Tegyük fel ugyanis, hogy $x \in D_{\lambda_1} \cap D_{\lambda_2}$. A lánctulajdonság miatt föltehető, hogy $D_{\lambda_1} \subseteq D_{\lambda_2}$ és $\varphi_{\lambda_2}|_{D_{\lambda_1}} = \varphi_{\lambda_1}$. Ha $x \in D_{\lambda_1}$ tetszőleges, akkor

$$\varphi_{\lambda_1}(x) = \varphi_{\lambda_2}|_{D_{\lambda_1}}(x) = \varphi_{\lambda_2}(x).$$

Nyilvánvaló, hogy az így nyert (D, φ) pár az $\mathscr{L}$ lánc fölső korlátja. Megmutatjuk, hogy $(D, \varphi) \in \Phi$. Nyilván $D \subseteq X$, és

$$T(D) = T\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} T(D_\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda = D.$$

Világos, hogy φ nemnegatív; továbbá $\varphi(x) = 0$ pontosan akkor, ha valamely $\lambda \in \Lambda$ esetén $\varphi_\lambda(x) = 0$, ahol $x \in D_\lambda$; ez utóbbi pedig pontosan akkor teljesül, ha x fixpontja T-nek. Végezetül, ha $x \in D_\lambda$, akkor $Tx \in D_\lambda$; továbbá,

$$\varphi(Tx) = \varphi_\lambda(Tx) \leq q\varphi_\lambda(x) = q\varphi(x).$$

A Kuratowski–Zorn-lemma szerint a $(\Phi, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaznak létezik maximális eleme, amelyet jelöljön a továbbiakban (D, φ). Most igazoljuk, hogy szükségképpen $D = X$ teljesül. Tegyük fel ugyanis indirekt módon, hogy van olyan $x_0 \in X$, amely nincs benne D-ben. Legyen $D_0 := D \cup \mathcal{O}(x_0)$. Ha $D \cap \mathcal{O}(x_0) = \emptyset$, akkor legyen $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, ha $x \in D$, amúgy pedig (azaz x_0 pályáján) az előző konstrukcióban látottak szerint adott. Ha $D \cap \mathcal{O}(x_0) \neq \emptyset$, akkor létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $x_0, Tx_0, \ldots, T^{k-1}x_0 \notin D$ és $T^k x_0 \in D$. Ha $T^k x_0$ fixpontja T-nek, akkor legyen $\varphi_0(T^i x_0) := q^i$, ha $0 \leq i \leq k-1$, és $\varphi_0(x) := \varphi(x)$, ha $x \in D$.

Ha $T^k x_0$ nem fixpontja T-nek, akkor legyen $\varphi_0(T^i x_0) := q^{i-k}\varphi(T^k x_0)$, ha $0 \le i \le k-1$, és $\varphi_0(x) := \varphi(x)$, ha $x \in D$.

Ekkor $\varphi_0 \colon D_0 \to \mathbb{R}$ valódi kiterjesztése a $\varphi \colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek, teljesíti a korábbi tulajdonságokat, tehát $(D, \varphi) \preceq (D_0, \varphi_0)$, ami pedig ellentmond (D, φ) maximalitásának.

Összességében tehát létezik az (i)–(iii) előírásoknak eleget tevő $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ függvény. Ennek birtokában legyen $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ az alábbiak szerint adott:

$$d(x,y) = \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(y), & \text{ha } x \neq y; \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor d metrika az X halmazon. Valóban, a nemnegativitás és a szimmetria nyilvánvaló. Világos az is, hogy $x = y$ esetén $d(x,y) = 0$. Megfordítva, ha $d(x,y) = 0$, akkor $\varphi(x) + \varphi(y) = 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$. Azaz $Tx = x$, illetve $Ty = y$ teljesül. Mivel a T leképezésnek legfeljebb egy fixpontja van, ezért szükségképpen $x = y$ adódik. A háromszög-egyenlőtlenség fönnáll, ha x, y, z közül legalább két elem azonos. Ha pedig páronként különbözőek, akkor φ nemnegativitása miatt

$$d(x,z) = \varphi(x) + \varphi(z) \le \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(y) + \varphi(z) = d(x,y) + d(y,z).$$

Sőt, a T leképezés kontrakció q faktorral az (X, d) térben. Ha ugyanis $x, y \in X$, akkor föltehetjük, hogy $Tx \neq Ty$. Ekkor természetesen $x \neq y$, és így d definíciója, valamint φ tulajdonságai miatt kapjuk, hogy

$$d(Tx, Ty) = \varphi(Tx) + \varphi(Ty) \le q\big(\varphi(x) + \varphi(y)\big) = q d(x,y).$$

Végezetül tegyük fel, hogy létezik T-nek $x_0 \in X$ fixpontja, és az állítással ellentétben (X, d) nem teljes. Ekkor van olyan (x_n) Cauchy-sorozat, amely nem konvergens, speciálisan az x_0 fixpont sem határértéke. Válasszuk az $\varepsilon > 0$ számot úgy, hogy $d(x_n, x_0) \ge \varepsilon$ végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ indexre teljesüljön; az általánosság csorbítása nélkül föltehető, hogy minden sorozatelem ilyen. A Cauchy-tulajdonság miatt van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, hogy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n, m \ge n_0$. Tegyük fel, hogy $x_n \neq x_m$. Ekkor fölhasználva, hogy $\varphi(x_0) = 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon > d(x_n, x_m) &= \varphi(x_n) + \varphi(x_m) = \varphi(x_n) + \varphi(x_0) + \varphi(x_m) + \varphi(x_0) \\ &= d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) \ge 2\varepsilon. \end{aligned}$$

A kapott ellentmondás miatt $x_n = x_m$ adódik az n_0-nál nem kisebb indexű sorozatelemekre, vagyis a sorozat véges sok tagtól eltekintve állandó. Speciálisan konvergens, ami ismételten ellentmondásra vezet. $\square$

2.2. Ludvík tétele

Ha az alaphalmaz maga is metrikus tér, akkor a Bessaga-tételben konstruált metrikus térnek ezzel általában nincs kapcsolata. A következő tétel éppen azért fontos, mert az eredeti és az új metrika (amelyben a leképezés már kontrakció) topologikusan ekvivalensek.

2.2. tétel. *Ha (X, d) kompakt metrikus tér, $q \in]0, 1[$, valamint $T \colon X \to X$ olyan folytonos leképezés, amelyre*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X) = \{p\}$$

teljesül, akkor van olyan d_0 metrika, amelyre nézve T kontrakció q faktorral, és amely topologikusan ekvivalens az eredeti d metrikával.

Bizonyítás. Az egyértelműség érdekében a továbbiakban jelezni fogjuk, hogy a metrikához kötődő fogalmak aktuálisan éppen melyik metrika szerint értendők. Legyen $\varepsilon_n = \operatorname{diam}_d T^n(X)$. Mivel $\{T^n(X) \mid n \in \mathbb{N}\}$ csökkenő lánc, ezért (ε_n) monoton csökkenő és nyilván nemnegatív tagú. Így (ε_n) konvergens. Másrészt $T^n(X)$ kompaktsága miatt léteznek olyan $x_n, y_n \in T^n(X)$ elemek, hogy $\varepsilon_n = d(x_n, y_n)$. Föltehetjük, hogy (x_n) és (y_n) konvergensek az x, illetve y határértékekkel. Mivel $x, y \in T^n(X)$ teljesül minden n indexre, ezért a tétel feltétele szerint szükségképpen $x = p = y$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy (ε_n) nullsorozat.

Legyen

$$d_1(x, y) := \sup_{n \geq 0} d(T^n x, T^n y) \qquad (x, y \in X).$$

Megmutatjuk, hogy d_1 metrika. Valóban, d_1 nyilvánvalóan nemnegatív, és az előzőek miatt nem vehet föl bővített valós értéket sem. Ha $d_1(x, y) = 0$, akkor $d(T^n x, T^n y) = 0$ minden n indexre; speciálisan, $n = 0$ választással, $d(x, y) = 0$. Ám ekkor szükségképpen $x = y$ teljesül. A d_1 szimmetriája szintén világos. Végül

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n z) &\leq d(T^n x, T^n y) + d(T^n y, T^n z) \\ &\leq d_1(x, y) + d_1(y, z); \end{aligned}$$

a bal oldalon szuprémumot véve a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. Sőt, d_1 és d ekvivalens metrikák X-en. Nyilván $d(x, y) \leq d_1(x, y)$ mindig teljesül. Tegyük fel, hogy (x_m) olyan sorozat, amely tart valamely $x \in X$

elemhez a d metrika szerint. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n \geq n_0$ esetén $\varepsilon_n < \varepsilon$ teljesüljön, ahol (ε_n) a korábban bevezetett sorozat. Mivel $T^0, \dots, T^{n_0}$ folytonosak a d metrikára nézve, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $d(x, y) < \delta$ esetén

$$d(T^k x, T^k y) < \varepsilon \qquad (k = 0, \dots, n_0).$$

Másrészt $x_m \to_d x$, ezért van olyan $m_0 \in \mathbb{N}$, hogy $d(x_m, x) < \delta$ ha $m \geq m_0$; így az előzőek miatt

$$\begin{aligned} d_1(x_m, x) &= \sup_{n \geq 0} d(T^n x_m, T^n x) \\ &\leq \max\{\varepsilon_{n_0}, \max_{k=0,\dots,n_0} d(T^k x_m, T^k x)\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Vagyis az (x_m) sorozat konvergens és határértéke x a d_1 metrika szerint. Ez azt mutatja, hogy d_1 és d topologikusan ekvivalens metrikák. Sőt, az (X, d_1) metrikus téren T már nemexpanzív leképezés. Ha ugyanis $x, y \in X$, akkor

$$\begin{aligned} d_1(Tx, Ty) &= \sup_{n \geq 0} d(T^{n+1} x, T^{n+1} y) \\ &\leq \sup_{n \geq 0} d(T^n x, T^n y) = d_1(x, y). \end{aligned}$$

Értelmezzük most az $x \in X$ elem $n(x)$ nívóját az alábbiak szerint. Legyen $n(x) := +\infty$, ha $x = p$; egyébként pedig

$$n(x) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid x \in T^n(X)\}.$$

Nyilván $x \in T^{n-1}(X)$ esetén $Tx \in T^n(X)$ következik; így

$$\begin{aligned} n(Tx) &= \sup\{n \in \mathbb{N} \mid Tx \in T^n(X)\} \\ &\geq \sup\{n \in \mathbb{N} \mid x \in T^{n-1}(X)\} \\ &= n(x) + 1. \end{aligned}$$

Tekintsük az alábbi módon értelmezett $g\colon X \times X \to [0, +\infty[$ függvényt:

$$g(x, y) := q^{\min\{n(x), n(y)\}} d_1(x, y).$$

Fölhasználva az előző egyenlőtlenséget és azt, hogy T nemexpanzív a d_1 metrikára nézve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g(Tx, Ty) &= q^{\min\{n(Tx), n(Ty)\}} d_1(Tx, Ty) \\ &\leq q^{\min\{n(x), n(y)\}+1} d_1(x, y) = q \cdot g(x, y). \end{aligned}$$

Legyen

$$d_0(x,y) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1},x_k) \mid x_0 = x, x_n = y\Big\}.$$

Megmutatjuk, hogy d_0 olyan, az eredeti metrikával topologikusan ekvivalens metrika, melyre nézve T kontrakció q faktorral. Világos, hogy d_0 nemnegatív, valós értékű függvény, és minden $x \in X$ esetén $d_0(x,x) = 0$. Most tegyük fel, hogy $x \neq y$, és legyenek $x_0, \ldots, x_n$ olyan pontok, hogy $x_0 = x$ és $x_n = y$. Jelölje H azon $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ indexek halmazát, amelyekre $n(x_k) \leq n(x)$ teljesül. Nyilván $H \neq \emptyset$, hiszen $0 \in H$. Legyen $x^* = x_k$, ha k a legkisebb olyan index, hogy $x_k \notin H$; ha pedig nincs ilyen index, akkor legyen $x^* = y$. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k,x_{k+1}) \geq \sum_{k\in H} g(x_k,x_{k+1}) \geq q^{n(x)} \sum_{k\in H} d_1(x_k,x_{k+1})$$

$$\geq q^{n(x)} d_1(x,x^*) \geq q^{n(x)} \min\big\{d_1\big(x, T^{n(x)+1}(X)\big), d_1(x,y)\big\}.$$

Mivel T folytonos, X pedig kompakt, ezért $T^{n(x)+1}(X)$ kompakt halmaz, és nem tartalmazza az x elemet. Vagyis a fönti becslés utóbbi tagja pozitív; így $d_0(x,y)$ pozitív. Hogy d_0 szimmetrikus, az nyilvánvaló. A háromszög-egyenlőtlenséghez legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, továbbá $x_0, \ldots, x_n$ és $y_0, \ldots, y_m$ olyan elemek, melyekre teljesülnek a következők: $x_0 = x$, $x_n = y = y_0$ és $y_m = z$, valamint

$$d_0(x,y) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1},x_k) \qquad d_0(y,z) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=1}^{m} g(y_{k-1},y_k).$$

Ekkor az $x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_m$ az y pontban egymáshoz csatlakozó, x és z között haladó töröttvonal, így $d_0(x,y) + d_0(y,z) + \varepsilon \geq d_0(x,z)$ a d_0 értelmezéséből adódóan. Innen $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk a bizonyítandót.

Megmutatjuk, hogy T kontrakció q faktorral a d_0 metrikára nézve. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $x, y \in X$, és tekintsünk egy olyan $x_0, \ldots, x_n$ töröttvonalat, amelyre $x_0 = x$ és $x_n = y$, valamint

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1},x_k) < d_0(x,y) + \varepsilon$$

fönnáll. Ekkor

$$\begin{aligned} d_0(Tx, Ty) &\le \sum_{k=1}^{n} g(Tx_{k-1}, Tx_k) \\ &\le \sum_{k=1}^{n} q \cdot g(x_{k-1}, x_k) \le q \cdot \big(d_0(x, y) + \varepsilon\big). \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ebből a kívánt kontrakciós tulajdonságot kapjuk.

Végezetül megmutatjuk, hogy d_0 és d_1 topologikusan ekvivalens metrikák. Nyilvánvalóan $d_0(x, y) \le d_1(x, y)$. Legyen (x_m) olyan sorozat, hogy $d_0(x_m, x)$ nullához tart, azonban $d_1(x_m, x)$ nem tart nullához. Az általánosság sérelme nélkül föltehetjük, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, mellyel $d_1(x_m, x) \ge \varepsilon$ teljesül. Az X halmaz kompakt a d_1 metrikában is, hiszen korábban láttuk, hogy d_1 és d topologikusan ekvivalensek. Ezért létezik olyan részsorozat, amely tart valamely $y \in X$ elemhez a d_1 metrikában; ismét föltehetjük, hogy $x_m \to_{d_1} y$. Ám ekkor $d_0 \le d_1$ miatt $d_0(x_m, y)$ nullsorozat. Mivel a határérték egyértelmű, ezért $x = y$. Másrészt $d_1(x, y) = \lim_{m\to\infty} d_1(x_m, x) \ge \varepsilon$, vagyis $x \ne y$, ami ellentmondás. $\square$

3. fejezet

Kontrakciós elvek az analízisben

A Banach-féle fixponttétel felhasználásainak gazdag tárházát látva, az alkalmazások bemutatásakor célunk távolról sem lehet a teljesség. Csupán olyan eredmények ismertetésére szorítkozunk, melyek beépültek az analízis oktatásába, és jól mutatják a kontrakciós elv hatékonyságát. Így esett a választásunk a differenciál- és integrálegyenletek, illetve a klasszikus analízis néhány nevezetes eredményére. A fraktálelmélet mint közismert és fontos alkalmazási terület a következő fejezetben kerül tárgyalásra.

A bemutatott bizonyítások számos esetben eltérnek a szokásostól. Módszerünk Bielecki átnormálási technikájára támaszkodik, melyhez szükségünk lesz a következő megállapodásokra és egyszerű észrevételekre. Ha H egy kompakt Hausdorff-féle topologikus tér, akkor jelölje $\mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m)$ a H téren értelmezett, $\mathbb{R}^m$-beli értékű folytonos leképezések vektorterét. Ezen a téren a

$$\|x\| := \sup_{t \in H} |x(t)|$$

előírás egy normát értelmez, melyre nézve $\mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m)$ Banach-tér. Ezt a normát a továbbiakban *szuprémumnormának* hívjuk. Könnyen látható, hogy az indukált konvergencia nem más, mint a függvénysorozatok egyenletes konvergenciája. Az alábbi lemma a szuprémumnormával ekvivalens további normák egy lehetséges származtatását írja le.

3.1. lemma. *Legyen H kompakt Hausdorff-féle topologikus tér, $p\colon H \to]0, +\infty[$ folytonos függvény, valamint $x \in \mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m)$ esetén legyen*

$$\|x\|_p := \sup_{t \in H} p(t)|x(t)|.$$

Ekkor $\|\cdot\|$ *és* $\|\cdot\|_p$ *ekvivalens normák a* $\mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m)$ *téren.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|\cdot\|_p$ norma a $\mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m)$ téren. Mivel p pozitív és folytonos, H kompakt, ezért $\alpha := \inf_{t\in H} p(t)$ és $\beta := \sup_{t\in H} p(t)$ pozitív valós számok. Nyilván $\alpha \le \beta$, és minden $t \in H$ esetén

$$\alpha|x(t)| \le p(t)|x(t)| \le \beta|x(t)|.$$

Képezve a szuprémumot t-re, kapjuk a normák ekvivalenciáját. □

Az ekvivalencia miatt a Cauchy-sorozatok bármelyik normát tekintve ugyanazok, így az eredeti tér teljességét örökli az átnormált tér. A $\|\cdot\|_p$ norma definíciójából az is világos, hogy minden $x \in \mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m)$ és minden $t \in H$ esetén

$$|x(t)| \le \frac{1}{p(t)}\|x\|_p.$$

3.1. Fredholm-féle integrálegyenletek

Legyen μ véges Borel-mérték a H kompakt Hausdorff-féle topologikus téren, és $K\colon H^2 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ adott magfüggvény. Célunk a vektorértékű függvényekre vonatkozó

$$x(t) = \int_H K(t,s,x(s))d\mu(s) \tag{3.1}$$

Fredholm-féle nemlineáris integrálegyenlet egyértelmű megoldhatóságának biztosítása. Ezt, a magfüggvényre szabott alkalmas feltételek mellett, egy skalárértékű függvényekre vonatkozó Fredholm-féle homogén lineáris integrálegyenlőtlenség megoldhatóságával érhetjük el.

3.2. tétel. *Legyen* μ *egy véges Borel-mérték a* H *kompakt Hausdorff-féle topologikus téren, és legyen* $K\colon H^2 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *olyan folytonos függvény, amely minden* $t, s \in H$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}^m$ *esetén eleget tesz a*

$$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \le L(t,s)|x-y| \tag{3.2}$$

Lipschitz-feltételnek valamilyen $L\colon H^2 \to \mathbb{R}$ *pozitív folytonos függvénnyel. Tegyük fel, hogy az*

$$\int_H L(t,s)\ell(s)d\mu(s) < \ell(t) \tag{3.3}$$

lineáris homogén integrálegyenlőtlenségnek létezik $\ell\colon H \to \mathbb{R}$ *pozitív folytonos megoldása. Ekkor a (3.1) nemlineáris integrálegyenletnek létezik pontosan egy* $x\colon H \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása.*

Bizonyítás. Tekintsük a (3.1) integrálegyenlet jobb oldala által definiált T leképezést. Ha $x \in \mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m)$, akkor K egyenletesen folytonos a $H \times \operatorname{graph}(x)$ kompakt halmaz felett. Ezt kihasználva igazolható, hogy folytonos x esetén Tx is folytonos. Tehát $T\colon \mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m) \to \mathscr{C}(H, \mathbb{R}^m)$.

Legyen $p := 1/\ell$. Megmutatjuk, hogy T kontrakció a $\|\cdot\|_p$ normára nézve. A másik feltétel értelmében minden $t \in H$ választással

$$\frac{1}{\ell(t)} \int_H L(t,s)\ell(s)d\mu(s) < 1.$$

Mivel itt a bal oldal a t változó folytonos függvénye és H kompakt halmaz, ezért

$$q := \sup_{t \in H} \frac{1}{\ell(t)} \int_H L(t,s)\ell(s)d\mu(s) < 1.$$

Tehát minden $t \in H$ esetén

$$\int_H L(t,s)\ell(s)d\mu(s) \le q \cdot \ell(t).$$

Így, figyelembe véve a tétel Lipschitz-feltételét, valamint a $\|\cdot\|_p$ norma értelmezését,

$$\begin{aligned}
p(t)|(Tx)(t) - (Ty)(t)| &\le p(t) \int_H |K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))| d\mu(s) \\
&\le p(t) \int_H L(t,s)|x(s) - y(s)| d\mu(s) \\
&\le \left(p(t) \int_H \frac{L(t,s)}{p(s)} d\mu(s) \right) \cdot \|x - y\|_p \\
&= \left(\frac{1}{\ell(t)} \int_H L(t,s)\ell(s) d\mu(s) \right) \cdot \|x - y\|_p \\
&\le q\|x - y\|_p.
\end{aligned}$$

A bal oldal szuprémumát képezve t-ben, a kontrakciós tulajdonság azonnal adódik. A Banach-féle fixponttétel miatt T-nek pontosan egy fixpontja, azaz a (3.1) egyenletnek pontosan egy folytonos megoldása van. $\square$

Az alábbiakban a fenti tétel néhány egyszerű következményét fogalmazzuk meg. Az elsőt az $\ell \equiv 1$ választással kapjuk:

3.3. következmény. *Legyen μ egy véges Borel-mérték a H kompakt Hausdorff-féle topologikus téren, és legyen $K\colon H^2 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ olyan folytonos függvény, amely minden $t, s \in H$ és minden $x, y \in \mathbb{R}^m$ esetén eleget* *tesz a 3.2. tétel Lipschitz-feltételének valamilyen* $L\colon H^2 \to \mathbb{R}_+$ *folytonos függvénnyel. Tegyük fel, hogy minden* $t \in H$ *esetén*

$$\int_H L(t,s)d\mu(s) < 1.$$

Ekkor a (3.1) nemlineáris integrálegyenletnek létezik pontosan egy $x\colon H \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása.*

3.4. következmény. *Legyen* μ *egy véges Borel-mérték a* H *kompakt Hausdorff-féle topologikus téren, és legyenek* $f\colon H \to \mathbb{R}^m$*, illetve* $A\colon H^2 \to \mathbb{R}^{m\times m}$ *folytonos függvények. Tegyük fel, hogy minden* $t \in H$ *esetén*

$$\int_H \|A(t,s)\| d\mu(s) < 1.$$

Ekkor az

$$x(t) = f(t) + \int_H A(t,s)x(s)d\mu(s)$$

inhomogén lineáris integrálegyenletnek létezik egyértelmű $x\colon H \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mu(H) > 0$. Legyen $t, s \in H$ valamint $x \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$K(t,s,x) := \frac{1}{\mu(H)} f(t) + A(t,s)x.$$

Az $L(t,s) := \|A(t,s)\|$ választással teljesülnek a 3.3. következmény feltételei, amiből azonnal adódik az állítás. $\square$

3.5. következmény. *Legyen* μ *egy véges Borel-mérték a* H *kompakt Hausdorff-féle topologikus téren, és legyen* $K\colon H^2 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *olyan folytonos függvény, amely minden* $t, s \in H$ *és* $x, y \in \mathbb{R}^m$ *esetén eleget tesz a*

$$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \le L_1(t)L_2(s)|x - y|$$

Lipschitz-feltételnek valamilyen $L_1, L_2\colon H \to \mathbb{R}_+$ *folytonos függvényekkel. Tegyük fel, hogy*

$$\int_H L_1(s)L_2(s)d\mu(s) < 1.$$

Ekkor a (3.1) nemlineáris integrálegyenletnek létezik egyértelmű $x\colon H \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása.*

Bizonyítás. Válasszuk meg a $c > 0$ számot úgy, hogy

$$\int_H (L_1(s) + c)L_2(s)d\mu(s) < 1$$

teljesüljön. Megmutatjuk, hogy a feltevések miatt a 3.2. tétel valamennyi feltétele az $L(t,s) := (L_1(t)+c)L_2(s)$ és $\ell = L_1+c$ választásokkal érvényes. Valóban,

$$\begin{aligned}\int_H L(t,s)\ell(s)d\mu(s) &= \int_H (L_1(t) + c)L_2(s)(L_1(s) + c)d\mu(s)\\ &= (L_1(t) + c)\int_H L_2(s)(L_1(s) + c)d\mu(s)\\ &< L_1(t) + c = \ell(t).\end{aligned}$$

Így a bizonyítandó állítás a 3.2. tétel azonnali következménye. □

3.6. következmény. *Legyenek* $f: H \to \mathbb{R}^m$, $A_1: H \to \mathbb{R}^{m\times k}$ *és* $A_2: H \to \mathbb{R}^{k\times m}$ *folytonos függvények. Tegyük fel, hogy*

$$\int_H \|A_1(s)\|\|A_2(s)\|d\mu(s) < 1.$$

Ekkor az

$$x(t) = f(t) + \int_H A_1(t)A_2(s)x(s)d\mu(s)$$

inhomogén lineáris integrálegyenletnek létezik egyértelmű $x: H \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása.*

Ez az eredmény ugyanúgy adódik a 3.5. következményből, mint ahogy a 3.4. következményt levezettük a 3.3. következményből. A bizonyítás részleteit mellőzzük.

3.2. Volterra-féle integrálegyenletek

A Volterra-típusú integrálegyenletek szokásos tárgyalásának kulcsgondolata, hogy az egyenlet által származtatott leképezés alkalmas iterált hatványa kontrakció. E megközelítés helyett a korábban látott átnormálási módszert fogjuk használni. A továbbiakban feltesszük, hogy $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, és a H halmaz a következő módon adott:

$$H := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le s \le t \le b\}.$$

3.7. tétel. *Legyenek* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *és* $K\colon H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *olyan folytonos függvények, hogy minden* $(t,s) \in H$ *és minden* $x, y \in \mathbb{R}^m$ *esetén teljesül a*

$$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \leq L|x-y|$$

Lipschitz-tulajdonság valamilyen $L \geq 0$ *konstanssal. Ekkor az*

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,x(s))ds$$

integrálegyenletnek pontosan egy $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása van.*

Bizonyítás. Tekintsük a fönti integrálegyenlet jobb oldala által definiált T leképezést. Könnyen látható, hogy $T\colon \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^m) \to \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^m)$. Megmutatjuk, hogy T kontrakció a $p(t) := e^{-Lt}$ függvény által indukált $\|\cdot\|_p$ normára nézve.

Tetszőleges $x, y \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^m)$ esetén a Lipschitz-tulajdonságot és a $\|\cdot\|_p$ értelmezését szem előtt tartva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
p(t)&|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \\
&\leq e^{-Lt}\int_a^t L|x(s)-y(s)|ds \leq \left(e^{-Lt}\int_a^t Le^{Ls}ds\right)\|x-y\|_p \\
&= \big(e^{-Lt}(e^{Lt}-e^{La})\big)\|x-y\|_p \leq \big(1-e^{L(a-b)}\big)\|x-y\|_p.
\end{aligned}$$

Képezve a fenti egyenlőtlenség bal oldalának szuprémumát t-re, adódik, hogy T valóban kontrakció, mégpedig a $q := 1 - e^{L(a-b)}$ faktorral. A Banach-féle fixponttétel miatt T-nek pontosan egy fixpontja, azaz a tételbeli integrálegyenletnek pontosan egy folytonos megoldása van. □

Volterra eredményét e tételből nyerhetjük a $K(t,s,x) := A(t,s)x$ speciális magfüggvényt választva. A bizonyítás egyszerű részleteit elhagyva csupán magát az állítást fogalmazzuk meg:

3.8. következmény. *Ha* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *és* $A\colon H \to \mathbb{R}^{m\times m}$ *folytonos függvények, akkor az*

$$x(t) = f(t) + \int_a^t A(t,s)x(s)ds$$

lineáris inhomogén integrálegyenletnek pontosan egy $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *folytonos megoldása van.*

Végezetül a közönséges differenciálegyenletek elméletének klasszikus egzisztencia- és unicitási tételét tárgyaljuk, melynek bizonyítását a 3.7. tételre vezetjük vissza. A szokásos módon felírt

$$x'(t) = F\big(t, x(t)\big), \qquad x(\tau) = \xi \tag{3.4}$$

Cauchy-feladat egyértelmű megoldhatóságának vizsgálatakor szükségünk lesz az alábbi közismert segédállításra.

3.9. lemma. *Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $F\colon I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, $\tau \in I$ és $\xi \in \mathbb{R}^m$, úgy $x\colon I \to \mathbb{R}^m$ pontosan akkor megoldása a (3.4) Cauchy-feladatnak, ha folytonos megoldása az alábbi Volterra-féle integrálegyenletnek:*

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t F\big(s, x(s)\big)ds.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x megoldása a (3.4) Cauchy-feladatnak. Ekkor F folytonossága miatt x' szintén folytonos; integrálva a Cauchy-feladat mindkét oldalát és alkalmazva a Newton–Leibniz-tételt kapjuk, hogy

$$\int_\tau^t F\big(s, x(s)\big)ds = \int_\tau^t x'(s)ds = x(t) - x(\tau) = x(t) - \xi.$$

Megfordítva, ha x folytonos és teljesül az integrálegyenlet, akkor a felsőhatár-függvény differenciálhatósági tétele miatt x differenciálható és $x'(t) = F\big(t, x(t)\big)$. Nyilván x' folytonos, és $x(\tau) = \xi$ szintén fönnáll. $\square$

3.10. tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $F\colon I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ olyan folytonos függvény, hogy minden $t \in I$ és minden $x, y, \in \mathbb{R}^m$ esetén teljesül a*

$$|F(t, x) - F(t, y)| \le L(t)|x - y|$$

Lipschitz-feltétel valamilyen folytonos $L\colon I \to [0, +\infty[$ függvénnyel. Ekkor minden $\tau \in I$ és $\xi \in \mathbb{R}^m$ esetén a (3.4) Cauchy-feladatnak létezik pontosan egy, a teljes I intervallumon értelmezett megoldása.

Bizonyítás. Legyen $J \subseteq I$ tetszőleges olyan kompakt intervallum, amelyre $\tau \in J$. Tekintsük a J intervallumra vonatkozó Cauchy-feladattal ekvivalens Volterra-típusú integrálegyenletet. Ennek a 3.7. tétel értelmében, a

$$f(t) := \xi, \qquad K(t, s, x) := F(s, x) \quad \text{és} \quad L := \max_{t \in J} L(t)$$

választásokkal élve, létezik egyértelmű $x_J \in \mathscr{C}(J, \mathbb{R}^m)$ megoldása. Így elegendő azt igazolni, hogy az eredeti Cauchy-feladatnak létezik a teljes I intervallumon értelmezett egyértelmű megoldása. Legyen $t \in I$ tetszőleges, továbbá $J \subseteq I$ olyan kompakt intervallum, hogy $t, \tau \in J$. Jelölje x_J a Cauchy-feladat J intervallumon adott egyértelmű megoldását, és értelmezzük az $x \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ függvényt az

$$x(t) := x_J(t)$$

előírással. E definíció korrekt: ha ugyanis $J_1, J_2 \subseteq I$ olyan kompakt intervallumok, hogy $t, \tau \in J_1 \cap J_2$, akkor a Cauchy-feladat $J_1 \cap J_2$ kompakt intervallumon való egyértelmű megoldhatósága miatt

$$x_{J_1}(t) = x_{J_1}|_{J_1 \cap J_2}(t) = x_{J_2}|_{J_1 \cap J_2}(t) = x_{J_2}(t).$$

Nyilván x a teljes I intervallumon értelmezett megoldása a Cauchy-feladatnak. Másrészt az egyértelműség miatt $x|_J = x_J$ érvényes minden $J \subseteq I$ kompakt intervallum esetén, amiből x egyértelműsége is következik. $\square$

3.3. Egyváltozós függvényegyenletek

Legyenek H és X nem üres halmazok, valamint $F \colon H \times X^k \to X$ és $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \colon H \to H$ adott függvények. Célunk az

$$f(x) = F(x, f(\varphi_1(x)), \ldots, f(\varphi_k(x))) \tag{3.5}$$

nemlineáris függvényegyenlet egyértelmű megoldhatóságának vizsgálata. Ezt, hasonlóan a Fredholm-féle integrálegyenletek esetéhez, egy lineáris függvényegyenlőtlenség megoldhatósága fogja biztosítani. Módszerünk továbbra is az átnormálás elvére támaszkodik.

3.11. tétel. *Legyen H kompakt Hausdorff-féle topologikus tér, valamint legyenek $F \colon H \times (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}^m$ és $L_1, \ldots, L_k \colon H \to \mathbb{R}$ olyan folytonos és pozitív függvények, hogy minden $x \in H$ és $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}^m$ esetén*

$$|F(x, y_1, \ldots, y_k) - F(x, z_1, \ldots, z_k)| \le L_1(x)|y_1 - z_1| + \cdots + L_k(x)|y_k - z_k|.$$

Ha létezik olyan $\ell \colon H \to \mathbb{R}$ pozitív függvény, melyre minden $x \in H$ választás mellett

$$L_1(x)\ell(\varphi_1(x)) + \cdots + L_k(x)\ell(\varphi_k(x)) < \ell(x) \tag{3.6}$$

teljesül, akkor a (3.5) függvényegyenletnek létezik egyértelmű $f \colon H \to \mathbb{R}^m$ folytonos megoldása.

Bizonyítás. A folytonossági és kompaktsági feltételek miatt a (3.6) feltételből az adódik, hogy

$$q := \sup_{x\in H} \frac{L_1(x)\ell(\varphi_1(x)) + \cdots + L_k(x)\ell(\varphi_k(x))}{\ell(x)} < 1.$$

Értelmezzük a $T\colon \mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m) \to \mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m)$ leképezést a

$$(Tf)(x) := F(x, f(\varphi_1(x)), \ldots, f(\varphi_k(x)))$$

képlettel. Nyilvánvalóan T fixpontjai a (3.5) függvényegyenlet megoldásai. Ezért elegendő megmutatnunk, hogy T kontrakció a $(\mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_p)$ Banach-téren, ahol $p := 1/\ell$.

Valóban, a tételbeli Lipschitz-feltételt, majd q értelmezését alkalmazva, tetszőleges $f, g \in \mathscr{C}(H,\mathbb{R}^m)$ esetén nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
&p(x)|(Tf)(x) - (Tg)(x)| \\
&\quad = \frac{1}{\ell(x)}\big|F(x, f(\varphi_1(x)), \ldots, f(\varphi_k(x))) - F(x, g(\varphi_1(x)), \ldots, g(\varphi_k(x)))\big| \\
&\quad \le \frac{1}{\ell(x)} \sum_{i=1}^{k} L_i(x)|f(\varphi_i(x)) - g(\varphi_i(x))| \\
&\quad \le \frac{1}{\ell(x)} \sum_{i=1}^{k} L_i(x)\ell(\varphi_i(x))\|f-g\|_p \le q\|f-g\|_p.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\|Tf - Tg\|_p = \sup_{x\in H} p(x)|(Tg)(x) - (Th)(x)| \le q\|g-h\|_p,$$

és pontosan ezt kellett igazolnunk. □

3.12. következmény. *Legyen H kompakt Hausdorff-féle topologikus tér, és tegyük fel, hogy az $F\colon H \times (\mathbb{R}^m)^k \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény eleget tesz a 3.11. tétel Lipschitz-feltételének olyan $L_1, \ldots, L_k\colon H \to \mathbb{R}_+$ folytonos és pozitív függvényekkel, amelyekre minden $x \in H$ esetén*

$$L_1(x) + \cdots + L_k(x) < 1$$

teljesül. Ekkor a (3.5) függvényegyenletnek létezik egy egyértelműen meghatározott $f\colon H \to \mathbb{R}^m$ folytonos megoldása.

3.4. Az inverzfüggvénytétel

Jelölje a szokásos módon $\mathscr{B}(X,Y)$ az X Banach-teret az Y Banach-térbe képező korlátos lineáris leképezések terét, amelyet szintén a szokásos módon az

$$\|A\| := \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

normával látunk el. Az $X = Y$ esetben a $\mathscr{B}(X,X)$ jelölés helyett a tömörebb $\mathscr{B}(X)$ írásmódot fogjuk használni. Emlékeztetünk Banach korlátos inverz tételére, mely szerint invertálható korlátos lineáris leképezés inverze is korlátos lineáris leképezés. Az alábbi eredmény, a *tartomány-invariancia-tétel* alapvető szerepet játszik az inverzfüggvénytétel igazolásában.

3.13. tétel. *Ha X Banach-tér, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, és $T\colon D \to X$ kontrakció, akkor az $F(x) := x - Tx$ képlettel megadott függvény nyílt és injektív, továbbá az $F^{-1}\colon F(D) \to D$ leképezés Lipschitz-tulajdonságú az $1/(1-q)$ modulussal. Következésképpen F homeomorfizmus D és $F(D)$ között, és $D = X$ esetén $F(D) = X$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $p \in D$, és jelölje q a T kontrakciós faktorát. Elsőként megmutatjuk, hogy ha valamilyen r pozitív szám esetén $U(p,r) \subseteq D$ teljesül, akkor $U(F(p),(1-q)r) \subseteq F(U(p,r))$. Ez ugyanis azt jelenti, hogy $F\colon D \to X$ nyílt.

Legyen $y \in U(F(p),(1-q)r)$ tetszőleges, és értelmezzük a $G\colon D \to X$ leképezést a $G(x) := y + Tx$ képlettel. Ekkor G kontrakció a q faktorral, továbbá

$$\|G(p) - p\| = \|y + Tp - p\| = \|y - F(p)\| < (1-q)r.$$

Így a Banach-féle fixponttétel 1.6. tételbeli lokális változata szerint van olyan $x \in U(p,r)$ elem, hogy $x = G(x) = y + Tx$, vagyis $y = x - Tx = F(x)$ teljesül. Tehát $y \in F(U(p,r))$, ami pontosan a kívánt tartalmazást jelenti.

Az F függvény injektív, mivel tetszőleges $x, y \in D$ elemek esetén a háromszög-egyenlőtlenség, valamint T kontrakciós tulajdonsága miatt

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \|x - y\| - \|Tx - Ty\| \geq (1-q)\|x - y\|.$$

Ha $u, v \in F(D)$, akkor az $x = F^{-1}(u)$ és $y = F^{-1}(v)$ helyettesítésekkel ugyanez az egyenlőtlenség adja, hogy F^{-1} Lipschitz-tulajdonságú az $1/(1-q)$ modulussal.

Végezetül, ha $D = X$, akkor minden $r > 0$ esetén $U(0,r) \subseteq D$ teljesül. Ezért a fentiek szerint $U(F(0),(1-q)r) \subseteq F(B(0,r)) \subseteq F(D)$ érvényes minden $r > 0$ esetén, ami csak úgy lehetséges, ha $F(D) = X$. □

Megjegyezzük, hogy a tétel feltételeiből azonnal következik, hogy F is Lipschitz-tulajdonságú az $1+q$ modulussal.

3.14. következmény. *Ha X és Y Banach-terek és $A, B \in \mathscr{B}(X,Y)$ olyanok, hogy A invertálható, és*

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

akkor B is invertálható és

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|B-A\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|B-A\| \cdot \|A^{-1}\|}.$$

Továbbá a $\mathscr{B}(X,Y)$ térben az invertálható lineáris leképezések halmaza nyílt, és e halmazon az inverzképzés folytonos.

Bizonyítás. Jelölje $I \in \mathscr{B}(X)$ az identitást. A tétel feltétele szerint ekkor

$$q := \|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(B-A)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B-A\| < 1,$$

tehát $T := I - A^{-1}B$ lineáris kontrakció. Így $F := I - T = A^{-1}B$ az előző tétel szerint lineáris homeomorfizmus, és $\|F^{-1}\| \leq 1/(1-q)$. Ennélfogva $B = AF$ is invertálható lineáris leképezés, és

$$\|B^{-1}\| = \|F^{-1}A^{-1}\| \leq \|F^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}\|B^{-1} - A^{-1}\| &= \|(I - A^{-1}B)B^{-1}\| \leq \|I - A^{-1}B\| \cdot \|B^{-1}\| \\ &\leq q \cdot \frac{\|A^{-1}\|}{1-q} \leq \frac{\|B-A\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - \|B-A\| \cdot \|A^{-1}\|}.\end{aligned}$$

Az $A \mapsto A^{-1}$ leképezés, vagyis az inverzképzés folytonosságára vonatkozó állítás ennek a becslésnek azonnali következménye. □

A Banach-algebrák invertálható elemeire vonatkozó analóg állítás közismert. A bemutatott bizonyítás független a Neumann-sorokkal történő szokásos megközelítéstől. Megjegyezzük azonban, hogy az inverzelem Neumann-sorral való konstrukcióját jelen esetben a Banach–Picard-iteráció szolgáltatná.

3.15. tétel. *Legyenek X és Y Banach-terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$ és $f\colon D \to Y$. Tegyük fel, hogy $A \in \mathscr{B}(X,Y)$ olyan invertálható leképezés, hogy*

$$\alpha := \limsup_{\substack{(x,y)\to(p,p)\\ x\neq y}} \frac{\|f(x)-f(y)-A(x-y)\|}{\|x-y\|} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Ekkor léteznek olyan $U \subseteq X$ és $V \subseteq Y$ nyílt halmazok, hogy $p \in U$ és $q = f(p) \in V$, valamint $f|_U\colon U \to V$ homeomorfizmus. Továbbá a $g := \big(f|_U\big)^{-1}$ inverzfüggvényre teljesül, hogy

$$\limsup_{\substack{(u,v)\to(q,q)\\ u\neq v}} \frac{\|g(u)-g(v)-A^{-1}(u-v)\|}{\|u-v\|} \leq \frac{\alpha\|A^{-1}\|^2}{1-\alpha\|A^{-1}\|}.$$

Bizonyítás. A tétel feltételéből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
1 > \gamma := \alpha\|A^{-1}\| &= \limsup_{\substack{(x,y)\to(p,p)\\ x\neq y}} \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|f(x)-f(y)-A(x-y)\|}{\|x-y\|}\\
&\geq \limsup_{\substack{(x,y)\to(p,p)\\ x\neq y}} \frac{\|A^{-1}\big(f(x)-f(y)-A(x-y)\big)\|}{\|x-y\|}\\
&= \limsup_{\substack{(x,y)\to(p,p)\\ x\neq y}} \frac{\|(y-A^{-1}f(y))-(x-A^{-1}f(x))\|}{\|y-x\|}.
\end{aligned}$$

Értelmezzük a $T\colon D \to X$ leképezést a $Tx := x - A^{-1}f(x)$ képlettel. A fenti egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy rögzített $\delta \in]\gamma, 1[$ esetén létezik olyan $r_\delta > 0$, hogy

$$\|Ty - Tx\| \leq \delta\|x-y\|,$$

ha $x, y \in U(p, r_\delta)$. Tehát T kontrakció a δ faktorral az $U(p, r_\delta)$ nyílt gömbön. Így a tartományinvariancia-tétel szerint az $F(x) = x - Tx = A^{-1}f(x)$ módon értelmezett $F\colon D \to X$ függvény homeomorfizmus az $U(p, r_\delta)$ és az $F(U(p, r_\delta))$ nyílt halmazok között, sőt F^{-1} Lipschitz-tulajdonságú az $1/(1-\delta)$ modulussal. Ezért $A \circ F = f$ homeomorfizmus az $U(p, r_\delta)$ és az $f(U(p, r_\delta))$ nyílt halmazok között, továbbá $u, v \in f(U(p, r_\delta))$ esetén

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| &= \|F^{-1}(A^{-1}u) - F^{-1}(A^{-1}v)\|\\
&\leq \frac{1}{1-\delta}\|A^{-1}u - A^{-1}v\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\delta}\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Tehát f^{-1} Lipschitz-tulajdonságú az $\|A^{-1}\|/(1-\delta)$ modulussal az $f(U(p,r_\delta))$ halmazon. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $x,y \in U(p,r_\delta)$ esetén

$$\|f(x)-f(y)\| \geq \frac{1-\delta}{\|A^{-1}\|}\|x-y\|.$$

Ennélfogva $u,v \in f(U(p,r_\delta))$ esetén az $x = f^{-1}(u)$ és $y = f^{-1}(v)$ választásokkal

$$\begin{aligned}\frac{\|g(u)-g(v)-A^{-1}(u-v)\|}{\|u-v\|} &= \frac{\|x-y-A^{-1}(f(x)-f(y))\|}{\|f(x)-f(y)\|}\\ &= \frac{\|Tx-Ty\|}{\|x-y\|}\cdot\frac{\|x-y\|}{\|f(x)-f(y)\|} \leq \frac{\delta\|A^{-1}\|}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Tehát minden $\delta \in]\gamma, 1[$ esetén

$$\limsup_{\substack{(u,v)\to(q,q)\\ u\neq v}} \frac{\|g(u)-g(v)-A^{-1}(u-v)\|}{\|u-v\|} \leq \frac{\delta\|A^{-1}\|}{1-\delta}.$$

Innen $\delta \to \gamma$ jobb oldali határátmenettel kapjuk a tétel utolsó állításában szereplő becslést. $\square$

Az utolsó eredmény bemutatásához szükségünk lesz az alábbi fogalomra. Legyenek X, Y Banach-terek, és legyen $D \subseteq X$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to Y$ a $p \in D$ pontban *Fréchet-értelemben erősen differenciálható*, ha van olyan $A \in \mathscr{B}(x,y)$ leképezés, hogy

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(p,p)\\ x\neq y}} \frac{\|f(x)-f(y)-f'(p)(x-y)\|}{\|x-y\|} = 0.$$

A szokásos módon ekkor az $f'(p) := A$ jelölést használjuk. E fogalommal és az $\alpha = 0$ speciális választással az előző tétel az alábbi eredményre vezet:

3.16. következmény. *Legyenek X és Y Banach-terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy $f\colon D \to Y$ a $p \in D$ pontban Fréchet-értelemben erősen differenciálható. Ha $f'(p)$ invertálható, akkor léteznek olyan $U \subseteq X$ és $V \subseteq Y$ nyílt halmazok, hogy $p \in U$ és $q = f(p) \in V$ valamint $f|_U\colon U \to V$ homeomorfizmus. Továbbá, a $g := (f|_U)^{-1}$ inverzfüggvény erősen Fréchet-differenciálható a q pontban, és*

$$g'(q) = (f'(p))^{-1}.$$

Megmutatható, hogy az adott pontbeli folytonos Fréchet-differenciálhatóságból levezethető az adott pontbeli erős Fréchet-differenciálhatóság. Tehát a fenti következmény a szokásos inverzfüggvénytétel kiterjesztése.

4. fejezet

Fraktálelmélet

Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a fraktálok a modern matematika közismert és népszerű szülöttei közé tartoznak. Ezért meglepő, hogy a szakirodalomban jelenleg sincs egységesen elfogadott definíciójuk. Két alaptulajdonságuk, az önhasonlóság és finomszerkezet egyaránt lehetőséget kínál az értelmezésükre. Hutchinson munkáját alapul véve mi az előbbiből indulunk ki. Elsőként bevezetjük a fraktálok terét, igazoljuk ennek teljességét, majd megmutatjuk, hogy az önhasonlóságot kifejező invarianciaegyenletnek pontosan egy megoldása van e térben. Ez utóbbihoz a Banach-féle fixponttételt használjuk. Bizonyítás nélkül ismertetjük a fraktálok finomszerkezetét leíró Hutchinson-féle dimenziótételt.

4.1. A fraktálok tere

Legyen $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ egy adott nem üres X halmaz önmagába ható leképezéseinek családja. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq X$ halmaz $\mathscr{T}$-*invariáns*, ha eleget tesz a

$$H = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{T}_k(H) \tag{4.1}$$

*invarianciaegyenlet*nek. Ha (X, d) metrikus tér, akkor $\mathscr{T}$*-fraktál* alatt egy nem üres, kompakt, $\mathscr{T}$-invariáns halmazt értünk. Ilyenkor a $\mathscr{T}$ családot *iterált függvényrendszer*ként, a $\mathscr{T}$-fraktált pedig az ehhez tartozó *attraktor*ként is szokás említeni. Hutchinson alapvető eredménye szerint, ha az alaptér teljes és $\mathscr{T}$ kontrakciók családja, akkor létezik pontosan egy $\mathscr{T}$-fraktál. A bizonyítás alapgondolata, melynek részletezése jelen szakasz célja, a következő. A (4.1) jobb oldalát halmazértékű leképezésnek tekintve az invariancia kérdése fixpontproblémaként kezelhető. Blaschke nevezetes tétele szerint a nem üres, kompakt halmazok családja alkalmas metrikával ellátva teljes. E metrikára nézve (4.1) jobb oldala kontrakció. Így a fixpont egyértelmű létezése (vagyis az invarianciaegyenlet egyértelmű megoldhatósága) következik a Banach-féle fixponttételből.

A továbbiakban jelölje $\mathscr{F}(X)$ az (X, d) metrikus tér nem üres, korlátos, zárt részhalmazainak családját. Adott $A, B \in \mathscr{F}(X)$ halmazok *Hausdorff–Pompeiu-távolság*án az alábbi számot értjük:

$$d_{HP}(A, B) = \inf\Big\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq \bigcup_{b \in B} U(b, \varepsilon),\ B \subseteq \bigcup_{a \in A} U(a, \varepsilon)\Big\}.$$

4.1. tétel. *Adott metrikus tér nem üres, korlátos, zárt részhalmazainak családja metrikus tér a Hausdorff–Pompeiu-távolságra nézve.*

Bizonyítás. Legyen (X, d) metrikus tér. Elsőként megmutatjuk, hogy d_{HP} véges értékű. Ha $A, B \in \mathscr{F}(X)$, akkor a korlátosság miatt vannak olyan α, β pozitív számok és vannak olyan $x, y \in X$ elemek, hogy

$$A \subseteq U(x, \alpha) \qquad \text{és} \qquad B \subseteq U(y, \beta).$$

Így minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $d(a, b) \leq \alpha + d(x, y) + \beta$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt; tehát az $\varepsilon = \alpha + d(x, y) + \beta$ választással

$$a \in U(b, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{b \in B} U(b, \varepsilon), \qquad b \in U(a, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{a \in A} U(a, \varepsilon).$$

Vagyis $d_{HP}(A, B) \leq \varepsilon < +\infty$. Világos, hogy $A = B$ esetén $d_{HP}(A, B) = 0$. Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathscr{F}(X)$ és $d_{HP}(A, B) = 0$. Legyen $a \in A$ rögzített. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik $b_n \in B$ úgy, hogy $d(a, b_n) < 1/n$. Ez azt jelenti, hogy a (b_n) sorozat tart az $a \in A$ elemhez. Mivel B zárt, ezért $a \in B$. Azonban $a \in A$ tetszőleges elem, amiből pedig $A \subseteq B$ következik. A másik irányú tartalmazást hasonlóan igazolva kapjuk, hogy $A = B$.

A szimmetria a definíció azonnali következménye. A háromszög-egyenlőtlenség igazolásához tekintsük az $A, B, C \in \mathscr{F}(X)$ halmazokat. Legyen $\varepsilon > d_{HP}(A, B)$, valamint $\delta > d_{HP}(B, C)$. Ha $a \in A$ tetszőleges, akkor van olyan $b \in B$, hogy $d(a, b) < \varepsilon$. Ugyanígy, van olyan $c \in C$, hogy $d(b, c) < \delta$. Tehát $d(a, c) < \varepsilon + \delta$; mivel $a \in A$ tetszőleges volt, ezért $a \in U(c, \varepsilon + \delta)$. Azaz

$$A \subseteq \bigcup_{c \in C} U(c, \varepsilon + \delta).$$

Az A és C halmazok szerepének felcserélésével $d_{HP}(A,C) < \varepsilon+\delta$ adódik. Végrehajtva az $\varepsilon \downarrow d_{HP}(A,B)$ és a $\delta \downarrow d_{HP}(B,C)$ határátmenetet, a háromszög-egyenlőtlenséghez jutunk. □

Az $(\mathscr{F}(X), d_{HP})$ metrikus teret a továbbiakban *fraktáltér*nek mondjuk. Ha $\mathscr{K}(X)$ jelöli az alaptér nem üres, kompakt részhalmazait, akkor $(\mathscr{K}(X), d_{HP})$ ennek metrikus altere. A fraktáltér és ezen alterének egyik legfontosabb sajátossága, hogy átörökli az alaptér teljességét:

4.2. tétel. *(Blaschke) Teljes metrikus tér fraktáltere teljes.*

Bizonyítás. Legyen (X,d) teljes metrikus tér, s legyen (A_n) tetszőleges Cauchy-sorozat az $(\mathscr{F}(X), d_{HP})$ fraktáltérben. Azt fogjuk igazolni, hogy $A_n \to_{d_{HP}} A$, ahol

$$A = \{x \in X \mid \exists (x_k) : x_k \to x,\, x_k \in A_k\}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Cauchy-tulajdonság miatt van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $d_{HP}(A_n, A_m) < \varepsilon/2$, ha $n, m > n_0$. Elegendő megmutatni, hogy $n > n_0$ esetén teljesülnek az

$$(i) \quad A \subseteq \bigcup_{y \in A_n} U(y,\varepsilon) \qquad \text{és} \qquad (ii) \quad A_n \subseteq \bigcup_{x \in A} U(x,\varepsilon)$$

tartalmazások, hiszen ezekből $A_n \to_{d_{HP}} A$ következik. Legyen elsőként $x \in A$ tetszőleges. Ekkor van olyan (x_k) sorozat, hogy $x_k \in A_k$ és $x_k \to x$. Válasszuk a $k \in \mathbb{N}$ indexet úgy, hogy $k > n_0$ és $d(x_k, x) < \varepsilon/2$ egyszerre teljesüljön. Ekkor $d_{HP}(A_n, A_k) < \varepsilon/2$ miatt létezik olyan $y \in A_n$ elem, hogy $d(x_k, y) < \varepsilon/2$. Ezért

$$d(x,y) \le d(x,x_k) + d(x_k,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vagyis $x \in U(y,\varepsilon)$, amiből pedig már adódik az (i) tartalmazás. Másodszor, legyen $y \in A_n$ tetszőleges, továbbá (k_j) olyan szigorúan monoton indexsorozat, amelyre $k_1 = n$ és $m > k_j$ esetén

$$d_{HP}(A_m, A_{k_j}) < \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{4.2}$$

teljesül. Ilyen sorozat valóban létezik, hiszen (A_m) Cauchy-tulajdonságú. Értelmezzük ennek birtokában az (x_k) sorozatot az alábbiak szerint: Ha $k < n$, akkor legyen $x_k \in A_k$ tetszőleges. Ha $k = n$, akkor legyen $x_k = y$. Végül $k > k_1 = n$ esetén van olyan $j \in \mathbb{N}$ index, hogy $k \in$

$\{k_j+1,\dots,k_{j+1}\}$. Legyen ekkor $x_k \in A_k$ olyan, hogy $d(x_k, x_{k_j}) < \varepsilon/2^j$ teljesüljön, ahol $x_{k_j} \in A_{k_j}$ tetszőlegesen rögzített elemek. Megmutatjuk, hogy az így nyert (x_k) sorozat Cauchy-sorozat. Legyenek $l, m \in \mathbb{N}$, $l, m > n$ tetszőlegesek; ekkor vannak olyan $i, j \in \mathbb{N}$ indexek, hogy

$$l \in \{k_i+1,\dots,k_{i+1}\} \qquad \text{és} \qquad m \in \{k_j+1,\dots,k_{j+1}\}.$$

Föltehető, hogy $l \le m$, azaz $i \le j$ teljesül. Ekkor

$$\begin{aligned} d(x_l, x_m) &\le d(x_l, x_{k_i}) + d(x_{k_i}, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, x_m) \\ &\le d(x_l, x_{k_i}) + \sum_{s=i}^{j-1} d(x_{k_s}, x_{k_{s+1}}) + d(x_{k_j}, x_m) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{s=i}^{j-1} \frac{\varepsilon}{2^s} + \frac{\varepsilon}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2^{i-2}}. \end{aligned}$$

Azonban $l \to \infty$ esetén $i \to \infty$, tehát ez utóbbi tag tetszőlegesen kicsivé válhat. Ez pedig pontosan a bizonyítani kívánt Cauchy-tulajdonságot mutatja.

A teljesség miatt van olyan $x \in X$, hogy $x_k \to x$. Nyilvánvaló, hogy $x \in A$. Továbbá a (4.2) egyenlőtlenségből $j = 1$ választással kapjuk, hogy minden $m > n$ esetén van olyan $x_m \in A_m$, hogy $d(y, x_m) < \varepsilon/2$. Tehát

$$d(x, y) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, y) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $y \in U(x, \varepsilon)$, ami az (ii) tartalmazást eredményezi. Csupán azt kell még igazolni, hogy $A \in \mathscr{F}(X)$, azaz hogy A nem üres, korlátos, zárt halmaz.

Mivel $n > n_0$ esetén (ii) teljesül és A_n nem üres, ezért A sem üres. Hasonlóan, (i) miatt A korlátos, hiszen A_n korlátos. A zártság igazolásához legyenek $y \in X \setminus A$ és $x \in A$ tetszőleges elemek. Ekkor van olyan (x_n) sorozat, hogy $x_n \to x$ és $x_n \in A_n$. Másrészt $d_{HP}(A_n, A) \to 0$ és $y \notin A$, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$ és n_k indexsorozat, hogy $d(x_{n_k}, y) \ge \varepsilon$. Ám ekkor

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y) \ge \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy y nem lehet torlódási pontja az A halmaznak, hiszen $x \in A$ tetszőleges elem. Vagyis A tartalmazza valamennyi torlódási pontját, s ennélfogva valóban zárt. $\square$

4.3. tétel. *(Blaschke) Ha (X, d) teljes, akkor $(\mathscr{K}(X), d_{HP})$ szintén teljes.*

Bizonyítás. Legyen (A_n) Cauchy-sorozat a $(\mathscr{K}(X), d_{HP})$ térben, s tekintsük az előző bizonyításban szereplő A halmazt. Elegendő azt igazolni, hogy A kompakt. Ehhez belátjuk, hogy A teljes és teljesen korlátos, ami Hausdorff tétele szerint ekvivalens a kompaktsággal.

Mivel A az előző tétel szerint zárt, X pedig teljes, ezért A teljes. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszuk az $n \in \mathbb{N}$ indexet úgy, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{y \in A_n} U(y, \varepsilon/4)$$

teljesüljön. Mivel A_n kompakt, ezért léteznek olyan $y_1, \ldots, y_m \in A_n$ elemek, hogy $\{y_1, \ldots, y_m\}$ véges $\varepsilon/4$-háló az A_n számára. Ha tehát $y \in A_n$, akkor van olyan $j \in \{1, \ldots, m\}$ index, hogy $y \in U(y_j, \varepsilon/4)$. Tehát

$$\bigcup_{y \in A_n} U(y, \varepsilon/4) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U(y_j, \varepsilon/2).$$

Legyen $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq A$ olyan halmaz, hogy $x_j \in U(y_j, \varepsilon/2)$ fönnálljon. Azonnal látható, hogy e halmaz véges ε-háló az A halmaz számára. Vagyis A teljesen korlátos. □

Ez utóbbi tétel birtokában rátérhetünk Hutchinson nevezetes eredményének, a fraktálelmélet alaptételének igazolására.

4.4. tétel. *(Hutchinson) Teljes metrikus tér kontrakcióinak bármely véges $\mathscr{T}$ családja meghatároz pontosan egy $\mathscr{T}$-fraktált.*

Bizonyítás. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, s legyen $\mathscr{T} = \{T_1, \ldots, T_n\}$ ezen adott kontrakciócsalád. Értelmezzük a $T\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezést a (4.1) jobb oldalával, vagyis adott $H \in \mathscr{F}(X)$ esetén legyen

$$T(H) = \bigcup_{k=1}^{n} T_k(H).$$

Mivel a kontrakciók folytonosak és kompakt halmaz folytonos képe kompakt, ezért $T\colon \mathscr{K}(X) \to \mathscr{K}(X)$. Megmutatjuk, hogy T kontrakció $q = \max\{q_1, \ldots, q_n\}$ faktorral, ahol q_k jelöli a T_k faktorát. Legyen $A, B \in \mathscr{F}(X)$, és legyen $\varepsilon > d_{HP}(A, B)$. Ha $a \in A$ tetszőleges, akkor van olyan $b \in B$, hogy $d(a, b) < \varepsilon$. Így

$$d(T_k a, T_k b) \leq q_k d(a, b) \leq q_k \varepsilon \leq q\varepsilon.$$

Tehát

$$T_k a \in U(T_k b, q\varepsilon) \subseteq \bigcup_{y \in T(B)} U(y, q\varepsilon).$$

Mivel $a \in A$ és $k \in \{1, \dots, n\}$ tetszőlegesek, ezért innen

$$T(A) \subseteq \bigcup_{y \in T(B)} U(y, q\varepsilon)$$

adódik. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $T(B)$ része a $T(A)$ halmaz $q\varepsilon$-sugarú környezetének, vagyis $d_{HP}(T(A), T(B)) \leq q\varepsilon$. Véve az $\varepsilon \to d_{HP}(A, B)$ határátmenetet kapjuk, hogy T valóban kontrakció.

A Blaschke-tétel és a Banach-féle fixponttétel miatt T rendelkezik egyértelmű fixponttal. Ez a fixpont pedig nem más, mint a keresett $\mathscr{T}$-fraktál. $\square$

A Banach-féle fixponttétel különféle hibabecslései és a konvergencia sebességére vonatkozó egyenlőtlensége közvetlen módon átültethető a fraktálok terére:

4.5. tétel. *Legyen $\mathscr{T}$ egy teljes metrikus tér kontrakcióinak véges családja, s jelölje T az ehhez tartozó, (4.1) szerint adott invariancialeképezést. Rögzített H_1 halmaz esetén legyen $H_{n+1} = T(H_n)$, s legyen H_0 az egyértelmű $\mathscr{T}$-fraktál. Ekkor*

$$\begin{aligned}
d_{HP}(H_n, H_0) &\leq \frac{q^{n-1}}{1-q} d_{HP}(H_1, H_2);\\
d_{HP}(H_n, H_0) &\leq \frac{q}{1-q} d_{HP}(H_{n-1}, H_n);\\
d_{HP}(H_n, H_0) &\leq q d_{HP}(H_{n-1}, H_0).
\end{aligned}$$

A fraktálelmélet egyik fontos alkalmazása a képek digitális tárolásához kapcsolódik. Ennek elméleti lehetőségét a következő eredményben, a képfeldolgozás alaptételében fogalmazzuk meg. A lehetőség nem csupán elméleti: mivel az iterációs eljárás jól programozható algoritmus, a módszer a gyakorlatra is átvihető.

4.6. tétel. *Ha (X, d) teljes metrikus tér, $H \subseteq X$ nem üres, teljesen korlátos halmaz, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ kontrakciócsalád, hogy az általuk meghatározott H_0 fraktálra $d_{HP}(H, H_0) < \varepsilon$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $H_0 := \{h_1, \dots, h_m\} \subseteq H$ egy véges ε-háló H számára. Rögzített $k \in \{1, \dots, n\}$ mellett adjuk meg a $T_k\colon X \to X$ leképezést a $T_k(x) = h_k$ előírással. Világos, hogy a T_k kontrakció, H_0 pedig éppen az egyértelmű $\mathscr{T}$-fraktál. Továbbá $H_0 \subseteq H$ és $H \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U(h_k, \varepsilon)$ miatt $d_{HP}(H, H_0) < \varepsilon$ is teljesül. □

Mint említettük, a fraktálokat szokás törtdimenziós objektumként is értelmezni. Mandelbrot, a „fraktálok atyja" ezt az utat követte. Hutchinson alapvető cikke kapcsolatot teremt az invariancia és a töredezettség között. Mivel a dimenziótétel bizonyítása mértékelméleti jellegű, és így nem tartozik szorosan a fixponttételek elméletéhez, ezért nem közöljük. Azonban a tétel jelentőségére való tekintettel magát az állítást megfogalmazzuk. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra. Azt mondjuk, hogy a $\{T_1, \dots, T_n\}$ leképezéscsaládra teljesül a *nyílthalmaz-feltétel*, ha létezik olyan $U \subseteq X$ nem üres nyílt halmaz, hogy

$$\bigcup_{k=1}^{n} T_k(U) \subseteq U \qquad \text{és} \qquad T_i(U) \cap T_j(U) = \emptyset, \quad \text{ha } i \neq j.$$

4.7. tétel. *Ha $T_1, \dots, T_n\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a nyílt halmaz feltételt teljesítő kontraktív izometriák rendre a $q_1, \dots, q_n$ faktorokkal, H az általuk meghatározott fraktál, és r az*

$$1 = q_1^r + \dots + q_n^r$$

egyenlet (egyértelmű) megoldása, akkor a H fraktál Hausdorff-dimenziója $\dim_{\mathscr{H}}(H) = r$.

4.2. Példák, alkalmazások

A bemutatott eredményeket három példán keresztül szemléltetjük. Mindegyik esetben a jól ismert intuitív származtatásból könnyen felállítható a fraktált meghatározó alapegyenlet.

A Cantor-halmaz. Tekintsük az alábbi rekurzióval adott (C_n) halmazsorozatot. Legyen $C_1 = [0, 1]$; ha már C_n adott, akkor legyen C_{n+1} az a halmaz, amelyet a C_n komponensei középső nyílt harmadainak eltávolításával kapunk. Ekkor a $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ halmazt *Cantor-halmaz*nak nevezzük.

Nyilván C eleget tesz az alábbi, affin kontrakciók által meghatározott invarianciaegyenletnek:

$$C = \frac{1}{3}C \cup \Big(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\Big).$$

A Hutchinson-tétel szerint ennek az egyenletnek létezik pontosan egy nem üres, kompakt megoldása. Mivel a dimenziótétel nyílthalmaz-feltétele az $U =]0,1[$ választással teljesül, ezért ha r jelöli C Hausdorff-dimenzióját, akkor

$$1 = \frac{1}{3^r} + \frac{1}{3^r}.$$

Innen egyszerű számolással kapjuk, hogy a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\log 2/\log 3 \approx 0.6309$. Mint ismeretes, C kontinuum számosságú és nullmértékű részhalmaza a valós számok halmazának.

A Sierpiński-szőnyeg. Osszuk fel a $[0,1]^2$ négyzetet az oldalaival párhuzamos egyenesekkel 9 egybevágó részre, és hagyjuk el a középső négyzet belsejét. A megmaradó nyolc négyzet mindegyikére alkalmazzuk az előző eljárást, és ezt folytatjuk. Pontosabban fogalmazva, legyenek a $T_{ij}\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ az alábbiak szerint adott affin kontrakciók:

$$T_{ij}(x,y) = \Big(\frac{x+i}{3}, \frac{y+j}{3}\Big), \qquad i,j \in \{0,1,2\}.$$

Ekkor a Hutchinson-tétel szerint létezik pontosan egy olyan $S \subseteq [0,1]^2$ nem üres, kompakt halmaz, amely megoldása a következő invarianciaegyenletnek:

$$S = \bigcup \{T_{ij}(S) \mid i,j \in \{0,1,2\},\ (i,j) \neq (1,1)\}.$$

Ezt az S halmazt *Sierpiński-szőnyeg*nek nevezzük. A dimenziótétel nyílthalmaz-feltétele most az $U =]0,1[^2$ nyílt négyzettel teljesül. Ha tehát r jelöli S Hausdorff-dimenzióját, akkor az $1 = 8/3^r$ egyenlethez jutunk, amiből $r = \log 8/\log 3 \approx 1.8927$ adódik.

A Menger-szivacs. A Menger-szivacs az előbbiekhez hasonló eljárással kapható, az egységkocka alkalmas részeinek közepeit elhagyva. Az eljárás részletezésétől eltekintünk, csak magát az invarianciaegyenletet közöljük. Tekintsük az alábbi módon definiált $T_{ijk}\colon [0,1]^3 \to [0,1]^3$ affin kontrakciókat:

$$T_{ijk}(x,y,z) = \Big(\frac{x+i}{3}, \frac{y+j}{3}, \frac{z+k}{3}\Big).$$

A Hutchinson-tétel értelmében létezik pontosan egy nem üres, kompakt halmaz úgy, hogy

$$M = \bigcup \{T_{ijk}(M) \mid i,j,k \in \{0,1,2\},\ (1,1) \notin \{(i,j),(j,k),(k,i)\}\}.$$

Ezt az $M \subseteq [0,1]^3$ halmazt *Menger-szivacs*nak mondjuk. Mivel ezt 20 darab 1/3 faktorú affin kontrakció származtatja, és a nyílthalmaz-feltétel az $U =]0,1[^3$ nyílt kockával teljesül, ezért az r Hausdorff-dimenzióra az $1 = 20/3^r$ egyenlet következik. Ebből pedig $r = \log 20/\log 3 \approx 2.7268$ adódik.

5. fejezet

Fixponttételek monoton leképezésekre

Az iterációs módszer parciálisan rendezett struktúrák monoton leképezéseire is hatékonyan alkalmazható. A következőkben ilyen leképezésekre vonatkozó fixponttételekből és azok alkalamazásaiból adunk rövid ízelítőt.

5.1. Knaster, Tarski és Kantorovics tételei

A monoton leképezésekre vonatkozó első fixponteredmény minden bizonnyal a Knaster–Tarski-féle fixponttétel. Jelentősége abban áll, hogy meglepően egyszerű és elegáns utat kínál a Schröder–Bernstein-tétel igazolásához. Ez azért figyelemre méltó, mert a számosságaritmetika eme alapvető tételére korábban csak igen körülményes, sőt hibás bizonyítások születtek. Emlékeztetünk arra, hogy a $T\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezés *monoton*, ha $A \subseteq B$ esetén $T(A) \subseteq T(B)$ érvényes.

5.1. tétel. *(Knaster–Tarski) Ha $T\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ a tartalmazásra nézve monoton leképezés, akkor létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H} = \{H \subseteq X \mid H \subseteq T(H)\}$ és $H_0 = \bigcup \mathscr{H}$. Megmutatjuk, hogy H_0 a keresett fixpont. Valóban, ha $H \in \mathscr{H}$, akkor $H \subseteq H_0$, így a monotonitás miatt $T(H) \subseteq T(H_0)$. Azonban $H \subseteq T(H)$, ezért $H \subseteq T(H_0)$ is teljesül minden $H \in \mathscr{H}$ esetén. Vagyis $H_0 \subseteq T(H_0)$, amiből $T(H_0) \subseteq T(T(H_0))$ következik. Tehát $T(H_0) \in \mathscr{H}$, s így $T(H_0) \subseteq H_0$. Összességében $H_0 = T(H_0)$, ami a bizonyítani kívánt fixponttulajdonság. $\square$

Adott halmaz részhalmazainak rendszere a tartalmazásra nézve a legegyszerűbb példa parciálisan rendezett struktúrára. A továbbiakban a Knaster–Tarski-féle fixponttétel három absztrakt változatát közöljük. Legyen $(X \ \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz. Ennek egy részrendszerét *lánc*nak hívjuk, ha azon a $\preceq$ reláció rendezés. Az *intervallum* fogalmát a szokásos $[a, b] := \{a \preceq x \preceq b\}$ módon értelmezzük. Továbbá *teljes parciálisan rendezett halmaz*ról beszélünk, ha bármely nem üres, felülről korlátos részhalmaznak van pontos (azaz legkisebb) felső korlátja.

5.2. tétel. *(Tarski) Ha $(X, \preceq)$ teljes parciálisan rendezett halmaz, $T\colon X \to X$ monoton leképezés, $a, b \in X$ olyanok, hogy $a \preceq T(a) \preceq T(b) \preceq b$, akkor a T leképezésnek létezik fixpontja az $[a, b]$ intervallumban.*

Bizonyítás. Legyen $A := \{x \in [a, b] \mid x \preceq T(x)\}$. Mivel $a \in A$, ezért A nem üres, és mivel $A \subseteq [a, b]$, ezért A felülről korlátos. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \sup A$ fixpont. Mivel $\alpha \in [a, b]$, ezért $T(a) \preceq T(\alpha) \preceq T(b)$. Így $T(\alpha) \in [a, b]$ a feltételek szerint.

Másrészt ha $x \in A$, akkor $x \preceq \alpha$, s ezért $T(x) \preceq T(\alpha)$. Ez azt eredményezi, hogy $x \preceq T(\alpha)$, amiből viszont kapjuk, hogy $T(\alpha)$ felső korlátja az A halmaznak. Ám ekkor $\alpha \preceq T(\alpha)$, s így $T(\alpha) \preceq T(T(\alpha))$ a monotonitás miatt. Ebből és a már bizonyított $T(\alpha) \in [a, b]$ tulajdonságból $T(\alpha) \in A$ következik. Így $T(\alpha) \preceq \alpha$, tehát $\alpha = T(\alpha)$ az antiszimmetria értelmében. $\square$

5.3. tétel. *(Tarski) Ha $(X, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz, $T\colon X \to X$ monoton leképezés, valamint*

(i) létezik $a \in X$ úgy, hogy $a \preceq T(a)$, továbbá

(ii) az $\{x \in X \mid a \preceq x\}$ halmaz minden láncának létezik pontos felső korlátja,

akkor a T leképezésnek létezik olyan $\alpha \in X$ fixpontja, amely maximális az (ii) részben szereplő halmazban föllépő fixpontok között.

Bizonyítás. Legyen $A = \{x \in X \mid a \preceq x\} \cap \{x \in X \mid x \preceq T(x)\}$. Nyilván A nem üres az (i) feltétel szerint. Legyen $\mathscr{L} \subseteq A$ egy lánc és $\beta = \sup \mathscr{L}$. Tetszőleges $b \in \mathscr{L}$ esetén $b \preceq \beta$, így $T(b) \preceq T(\beta)$. Azonban $b \in A$ miatt $b \preceq T(b)$ is fennáll, tehát $T(\beta)$ szintén felső korlátja az $\mathscr{L}$ láncnak. Így $\beta \preceq T(\beta)$. Mivel $a \preceq \beta$, ezért $\beta \in A$. Vagyis minden A-beli láncnak létezik A-beli pontos felső korlátja. Ezért a Kuratowski–Zorn-lemma szerint létezik maximális $\alpha \in A$ elem. Ekkor $\alpha \preceq T(\alpha)$

teljesül, tehát $T(\alpha) \preceq T(T(\alpha))$ a monotonitás miatt. Másrészt $a \preceq \alpha$, ezért $T(a) \preceq T(\alpha)$; mivel $a \preceq T(a)$, innen $a \preceq T(\alpha)$ következik. Vagyis $T(\alpha) \in A$. Mivel α maximális, ezért $T(\alpha) \preceq \alpha$. Így $\alpha = T(\alpha)$.

A másik állítás adódik α maximalitásából, valamint abból, hogy minden fixpont eleme az $\{x \in X \mid x \preceq T(x)\}$ halmaznak. □

Célunk a fönti tétel *(ii)* pontjának gyengítése, melynek ára a leképezésre kirótt monotonitási feltétel erősítése lesz. Legyen $(X, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy a $T\colon X \to X$ leképezés *folytonos*, ha

$$T(\sup \mathscr{L}) = \sup T(\mathscr{L})$$

teljesül minden olyan $\mathscr{L} \subseteq X$ megszámlálható lánc esetén, melynek létezik pontos felső korlátja. Megjegyezzük, hogy ha T folytonos, akkor egyben monoton. Valóban, ha $x \preceq y$, akkor $\sup\{x, y\} = y$; a folytonosság miatt tehát

$$T(x) \preceq \sup\{T(x), T(y)\} = T(\sup\{x, y\}) = T(y).$$

5.4. tétel. *(Kantorovics) Ha $(X, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz, $T\colon X \to X$ folytonos leképezés, valamint*

(i) létezik $a \in X$ úgy, hogy $a \preceq T(a)$, és

(ii) $\{x \in X \mid a \preceq x\}$ minden megszámlálható láncának van pontos felső korlátja,

akkor a T leképezésnek létezik olyan $\alpha \in X$ fixpontja, amely a legkisebb az (ii) részben szereplő halmazban föllépő fixpontok között.

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{L} = \{T^n(a) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Ekkor $\mathscr{L}$ megszámlálható lánc az $\{x \in X \mid a \preceq x\}$ halmazban. Valóban, $a \preceq T(a)$ miatt $T(a) \preceq T^2(a)$ adódik, hiszen T monoton. Általánosabban, teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$a \preceq T(a) \preceq T^2(a) \preceq T^3(a) \preceq \cdots \preceq T^n(a).$$

Megmutatjuk, hogy az (ii) szerint létező $\alpha = \sup \mathscr{L}$ fixpont. Ehhez az előző észrevételt és T folytonosságát használjuk:

$$T(\alpha) = T(\sup \mathscr{L}) = \sup T(\mathscr{L}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} T^n(a) = \sup_{n\in\mathbb{N}} T^{n-1}(a) = \alpha.$$

Ha $a \preceq \beta$ szintén fixpont, akkor $a \preceq T(a) \preceq T(\beta) = \beta$; ismét indukciót alkalmazva, $a \preceq T^n(a) \preceq \beta$ minden $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ index esetén. Tehát β felső korlátja az $\mathscr{L}$ láncnak, amiből pedig $\alpha \preceq \beta$ következik. □

5.2. A számosságaritmetika alaptétele

Fölidézzük, hogy az A halmaz *kisebb vagy egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha létezik $\varphi\colon A \to B$ injektív leképezés; két halmaz *egyenlő számosságú*, ha van köztük bijektív megfeleltetés. Az előbbi tulajdonságot az $A \preceq B$, míg utóbbit az $A \sim B$ módon jelöljük. Bár a monoton leképezések fixponttulajdonságai csupán a $\preceq$ reláció antiszimmetriájának igazolásakor kapnak szerepet, a teljesség kedvéért a számosságaritmetika alaptételének bizonyítását egészében közöljük.

5.5. tétel. *Tetszőleges X halmaz esetén a $\preceq$ reláció a $\sim$ ekvivalenciarelációval kompatibilis rendezés a $\mathscr{P}(X)$ családon.*

Bizonyítás. Könnyen adódik, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció. A $\preceq$ reláció reflexivitása és tranzitivitása úgyszintén nyilvánvaló. Az antiszimmetria igazolásához azt kell megmutatni, hogy $A \preceq B$ és $B \preceq A$ esetén $A \sim B$.

Tegyük fel, hogy $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon B \to A$ injektív leképezések. Elegendő azt megmutatni, hogy létezik az A halmaznak (A_1, A_2), a B halmaznak pedig (B_1, B_2) partíciója úgy, hogy $\varphi(A_1) = B_1$ és $\psi(B_2) = A_2$ teljesül. Ekkor ugyanis a

$$\chi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } x \in A_1, \\ \psi^{-1}(x), & \text{ha } x \in A_2 \end{cases}$$

módon értelmezett $\chi\colon A \to B$ bijektív leképezés, amiből $A \sim B$ következik. Tetszőleges $A_1 \subseteq A$ halmazból kiindulva legyen $B_1 = \varphi(A_1)$ és $B_2 = B \setminus B_1$. Tekintsük az $A_2 = \psi(B_2)$ halmazt. Nyilván (A_1, A_2) pontosan akkor partíciója az A halmaznak, ha $A_1 = A \setminus A_2$, azaz ha A_1 fixpontja a

$$T(H) = A \setminus \psi(B \setminus \varphi(H))$$

leképezésnek. Könnyen adódik, hogy T monoton, ezért a Knaster–Tarski-tétel miatt valóban létezik A_1 fixpontja.

Annak igazolásához, hogy $\preceq$ valóban rendezés, legyen $A, B \in \mathscr{P}(X)$. Tekintsük most az összes $f \subseteq A \times B$ injektív függvények $\mathscr{F}$ halmazát. Mivel $\emptyset \in \mathscr{F}$, ezért $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Értelmezzük a $\trianglelefteq$ relációt az $\mathscr{F}$ halmazon a következőképpen: $f \trianglelefteq g$ pontosan akkor, ha $D_f \subseteq D_g$ és $g|_{D_f} = f$. Azonnal adódik, hogy $\trianglelefteq$ parciális rendezés. Legyen $\mathscr{L} \subseteq F$ tetszőleges lánc esetén

$$D_g = \bigcup_{f \in \mathscr{L}} D_f, \qquad g(x) = f(x),\ x \in D_f.$$

Világos, hogy $D_g \subseteq A$; sőt a lánctulajdonság biztosítja, hogy $g \subseteq A \times B$ injektív függvény. Így g felső korlátja az $\mathscr{L}$ láncnak az $\mathscr{F}$ halmazban. A Kuratowski–Zorn-lemma miatt létezik maximális $\varphi \in \mathscr{F}$ elem. Megmutatjuk, hogy $D_\varphi = A$ vagy $R_\varphi = B$ teljesül. Ellenkező esetben ugyanis létezik olyan (a, b) pár, hogy $a \notin D_\varphi$ és $b \notin R_\varphi$. Legyen

$$\psi(x) = \begin{cases} b, & \text{ha } x = a, \\ \varphi(x), & \text{ha } x \in D_\varphi. \end{cases}$$

Ekkor $\psi \subseteq A \times B$ olyan injektív függvény, amelyre $\varphi \trianglelefteq \psi$ és $\varphi \neq \psi$ teljesül. Ez azonban ellentmond φ maximalitásának. Ha tehát $D_\varphi = A$, akkor $\varphi\colon A \to B$, míg ha $R_\varphi = B$, úgy a $\varphi^{-1}\colon B \to A$ injektív. Vagyis $A \preceq B$, vagy $B \preceq A$ valamelyike biztosan teljesül. □

5.3. További alkalmazások

Az alábbiakban elsőként egy Cauchy-feladat, majd egy függvényegyenlet megoldásának létezését vizsgáljuk. Mindkét esetben kiderül, hogy a jobb oldal monotonitását, valamint az alsó, illetve felső félmegoldások létezését megkövetelve az eredeti problémáknak van olyan megoldása, mely a félmegoldások között halad.

5.6. tétel. *Ha $f\colon [\tau, b[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, második változójában monoton növő függvény, $\xi \in \mathbb{R}$, valamint $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvények, hogy minden $t \in [\tau, b[$ esetén $u(t) \leq v(t)$ és*

$$\begin{aligned} u(\tau) \leq \xi, &\quad u'(t) \leq f\big(t, u(t)\big), \\ v(\tau) \geq \xi, &\quad v'(t) \geq f\big(t, v(t)\big), \end{aligned}$$

akkor az

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \qquad x(\tau) = \xi$$

Cauchy-feladatnak létezik az egész I intervallumon értelmezett u és v között haladó megoldása.

Bizonyítás. Jelölje X azon $x\colon I \to \mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyekre $u \leq x \leq v$ teljesül. Nyilván X teljes parciálisan rendezett halmaz a pontonkénti rendezésre nézve. Adott $x \in X$ esetén legyen

$$(Tx)(t) = \xi + \underline{\int_\tau^t} f\big(s, x(s)\big) ds,$$

ahol a jobb oldalon az alsó Darboux-integrál szerepel. Mivel ez az integrál monoton és f a második változójában monoton növő, ezért T monoton operátor. Így $u \le v$ miatt $Tu \le Tv$ is fennáll. Továbbá $x \in X$ és $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned}(Tx)(t) &= \xi + \underline{\int_\tau^t} f(s, x(s))ds \ge \xi + \underline{\int_\tau^t} f(s, u(s))ds \\ &\ge \xi + \int_\tau^t f(s, u(s))ds \ge \xi + \int_\tau^t u'(s)ds = \xi + u(t) - u(\tau) \ge u(t).\end{aligned}$$

Vagyis $u \le Tx$. Hasonlóan adódik, hogy $Tx \le v$ szintén fennáll. Innen egyrészt a $T(X) \subseteq X$ tartalmazás, másrészt pedig $u \le Tu \le Tv \le v$ adódik. Mivel teljesül a Tarski-féle fixponttétel valamennyi feltétele, ezért van olyan $x\colon I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $u \le x \le v$ és $Tx = x$, azaz minden $t \in I$ esetén

$$x(t) = \xi + \underline{\int_\tau^t} f(s, x(s))ds.$$

Az f második változóbeli monotonitása miatt az $s \mapsto f(s, x(s))$ leképezés az $s \mapsto f(s, u(s))$ és az $s \mapsto f(s, v(s))$ folytonos függvények közé esik, ezért a fenti egyenlet jobb oldala t-nek folytonos függvénye. Emiatt az egyenlet bal oldala, vagyis x folytonos, így az integrandus is az. Tehát az alsó Darboux-integrál valójában a szokásos integrál. Vagyis x teljesíti az eredeti Cauchy-feladattal ekvivalens integrálegyenletet. □

5.7. tétel. *Legyen H nem üres halmaz, $(Y, \le)$ teljes parciálisan rendezett halmaz, továbbá $\varphi_1, \dots, \varphi_n\colon H \to H$ adottak. Tegyük fel, hogy $F\colon H \times Y^n \to Y$ a második változójának mindegyik koordinátájában monoton, és hogy $u, v\colon H \to Y$ olyanok, hogy minden $t \in H$ esetén $u(t) \le v(t)$ és*

$$\begin{aligned}u(t) &\le F\big(t, u(\varphi_1(t)), \dots, u(\varphi_n(t))\big), \\ v(t) &\ge F\big(t, v(\varphi_1(t)), \dots, v(\varphi_n(t))\big).\end{aligned}$$

Ekkor az

$$f(t) = F\big(t, f(\varphi_1(t)), \dots, f(\varphi_n(t))\big)$$

függvényegyenletnek létezik az u és v közötti $f\colon H \to Y$ megoldása.

Bizonyítás. Jelölje X az olyan $f\colon H \to Y$ függvények halmazát, melyekre minden $t \in H$ esetén $u(t) \le f(t) \le v(t)$ érvényes. Ekkor X az $(Y, \le)$ térből származó pontonkénti rendezéssel teljes parciálisan rendezett halmaz. Értelmezzük a $T\colon X \to Y^H$ operátort a

$$(Tf)(t) := F\big(t, f(\varphi_1(t)), \dots, f(\varphi_k(t))\big)$$

összefüggéssel. Az F monotonitási tulajdonsága miatt ekkor T monoton. Így $u \leq v$ miatt $Tu \leq Tv$ is fennáll, és $f \in X$ esetén

$$\begin{aligned}(Tf)(t) &= F\big(t, f(\varphi_1(t)), \dots, f(\varphi_k(t))\big)\\ &\geq F\big(t, u(\varphi_1(t)), \dots, u(\varphi_k(t))\big) \geq u(t).\end{aligned}$$

Tehát $u \leq Tf$. Hasonlóan kapjuk, hogy $Tf \leq v$. Innen látható, hogy $T(X) \subseteq X$, továbbá hogy $u \leq Tu \leq Tv \leq v$. A Tarski-féle fixponttétel értelmében T-nek létezik fixpontja X-ben, így a szóban forgó függvényegyenletnek létezik u és v közé eső $f\colon H \to Y$ megoldása. □

Végezetül fraktálelméleti alkalmazásokat tárgyalunk. Emlékeztetünk arra, hogy a (4.1) invarianciaegyenlet jobb oldalával definiált T leképezést invarianciaoperátornak nevezzük. Szubinvariáns halmazról szólunk, ha $H \subseteq T(H)$ teljesül.

5.8. tétel. *Ha $\mathscr{T}$ olyan leképezéscsalád az X halmazon, melynek létezik nem üres szubinvariánsa, akkor létezik e szubinvariánst tartalmazó legszűkebb $\mathscr{T}$-invariáns halmaz.*

Bizonyítás. Az X részhalmazainak családja parciálisan rendezett halmaz a tartalmazásra nézve, melyen az invarianciaoperátor folytonos. Nyilvánvaló, hogy a Kantorovics-féle fixponttétel (i) és (ii) feltétele is teljesül. □

5.9. tétel. *Ha $\mathscr{T}$ folytonos leképezések olyan véges családja az X kompakt metrikus téren, melynek létezik nem üres szubinvariánsa, akkor létezik e szubinvariánst tartalmazó $\mathscr{T}$-fraktál.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ folytonos tagokból álló család, és legyen $H_0 \subseteq X$ nem üres, $\mathscr{T}$-szubinvariáns halmaz. Jelölje $\mathscr{P}_{H_0}(X)$ az alaphalmaz H_0-t tartalmazó részhalmazainak családját, és értelmezzük a $T\colon \mathscr{P}_{H_0}(X) \to \mathscr{P}(X)$ leképezést az alábbi képlettel:

$$T(H) := \overline{T_1(H)} \cup \dots \cup \overline{T_n(H)}.$$

Nyilván T monoton (a tartalmazásra mint parciális rendezésre nézve), és $H_0 \subseteq T(H_0)$ érvényes a szubinvariancia miatt. Ezért T a $\mathscr{P}_{H_0}(X)$ halmazcsaládot saját magába képezi, ami teljes parciálisan rendezett halmaz. Így a Tarski-féle fixponttétel miatt létezik olyan $K \in \mathscr{P}_{H_0}(X)$ halmaz, hogy $K = T(K)$. Azonban X kompakt és T értékei zártak, ezért K kompakt. A folytonossági feltevés értelmében $T_k(K)$ kompakt, tehát $T(K) = T_1(K) \cup \dots \cup T_n(K)$ teljesül. Vagyis K egy H_0-t tartalmazó $\mathscr{T}$-fraktál. □

Ha a $\mathscr{T}$ leképezéscsalád valamelyik tagjának létezik fixpontja, akkor a fixpontból álló egyelemű halmaz $\mathscr{T}$-szubinvariáns. Ez az egyszerű észrevétel lehetőséget nyújthat egyéb (iteratív vagy topologikus) fixponttételek fraktálelméleti alkalmazására és az előző két eredmény élesítésére.

A Kantorovics-féle fixponttétel bizonyításában látott iteráció és az 5.8. tétel segítségével megtalálhatjuk a fraktálegyenletek „kicsi” megoldásait. Ezt a módszert a Cantor-halmaz példáján szemléltetjük.

Nyilvánvaló, hogy $\{0\}$ szubinvariánsa a Cantor-halmaz egyenletéből származó invarianciaoperátornak, és ez a T operátor folytonos. Teljes indukcióval egyszerűen igazolhatjuk, hogy

$$T^n(\{0\}) = \{(0,x_1\dots x_n)_3 \mid x_k \in \{0;2\},\, k = 1,\dots,n\}.$$

Az 5.8. tétel szerint a $\{0\}$ szubinvariáns halmazt tartalmazó legszűkebb invariáns halmazt a Kantorovics-iteráció határértéke, vagyis az iménti lánc egyesítése adja:

$$H = \{(0,x_1\dots x_n)_3 \mid x_k \in \{0;2\},\, k = 1,\dots,n,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Vagyis a Cantor-halmazt definiáló invarianciaegyenlet nullát tartalmazó legszűkebb megoldása azon $[0,1]$-beli valós számokból áll, melyek triadikus kifejtése véges, és jegyei a $\{0,2\}$ halmazból valók. Ez a megoldás számosságaritmetikai szempontból igen távol van a Cantor halmaztól, hiszen csak megszámlálhatóan végtelen, nem pedig kontinuum számosságú. Topológiai értelemben azonban nagyon közel van a Cantor-halmazhoz, ahogy azt rövidesen látni fogjuk.

Jelölje C a Cantor-halmazt. Mivel a Cantor-halmazban olyan triadikus törtek szerepelnek, melyek nulla vagy kettő jegyekből állnak (nem reguláris kifejtést is megengedve), ezért C minden elemét előállíthatjuk egy H-beli sorozat határértékeként. Tehát $C \subseteq \overline{H}$.

Nyilvánvaló, hogy C egy olyan nem üres, kompakt megoldása az invarianciaegyenletnek, amely tartalmazza a nullát. Azonban H a nullát tartalmazó legszűkebb megoldás, ezért $H \subseteq C$ az 5.8. tétel szerint. Így C zártsága miatt $\overline{H} \subseteq C$. Tehát a nullát tartalmazó legszűkebb invariáns halmaz lezártja egybeesik a Cantor-halmazzal.

6. fejezet

Az Ekeland-elv és alkalmazásai

Ha egy valós értékű folytonos függvény értelmezési tartománya nem kompakt, akkor nem állíthatjuk, hogy a függvénynek létezik minimumhelye. Ugyanakkor a kompaktság feltételezése számos szélsőérték-probléma esetén túl erős megszorítás lenne. Az Ekeland-féle variációs elv, melynek bemutatása e fejezet fő célja, az ilyen problémák kezelésére is lehetőséget biztosít.

6.1. A Bishop–Phelps-féle rendezés

Az Ekaland-féle variációs elvet egy önmagában is jelentős eszköz, Bishop és Phelps nevezetes eredménye segítségével fogjuk igazolni. Elsőként ezt az eredményt mutatjuk be.

Ha (X, d) metrikus tér és $f\colon X \to \mathbb{R}$ adott függvény, akkor $x, y \in X$ esetén jelentse $x \preceq_f y$ azt, hogy

$$d(x, y) \leq f(x) - f(y).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $\preceq_f$ parciális rendezés az X téren, melyet *Bishop–Phelps-féle parciális rendezés*nek nevezünk.

Legyen most X topologikus tér. Azt mondjuk, hogy $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *alulról félig folytonos* a $p \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan U környezete p-nek, hogy minden $x \in U$ esetén

$$f(x) > f(p) - \varepsilon.$$

Az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt alulról félig folytonosnak mondjuk, ha minden $p \in X$ pontban alulról félig folytonos. Az alulról félig folytonosság kapcsolatba hozható határérték-tulajdonsággal és a nívók topológiai tulajdonságával. Nevezetesen megmutatható, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(i) *$f\colon X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos;*

(ii) *minden $p \in X$ esetén* $\liminf_{x\to p} f(x) \geq f(p)$*;*

(iii) *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $L_c(f) = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ nívó nyílt halmaz.*

Hasonló módon értelmezhetjük egy adott pontbeli felülről félig folytonosság, illetve felülről félig folytonosság fogalmát. Ez utóbbira a föntihez hasonló jellemzési tulajdonság érvényes: limesz inferior helyett limesz szuperiorral és fordított egyenlőtlenséggel, az alsó nívó helyett pedig a fölső nívó nyíltságával.

Nyilván, ha valamely függvény (egy adott pontban) folytonos, akkor (az adott pontban) alulról félig folytonos is. Az állítás megfordítása azonban nem igaz. A következő két példában szereplő függvények a $p = 0$ pontban alulról félig folytonosak, miközben az első esetben elsőfajú, a másodikban pedig másodfajú szakadás lép föl ugyanitt.:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t = 0; \\ 1, & \text{ha } t \neq 0. \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} -1, & \text{ha } t = 0; \\ \sin\left(\frac{1}{t}\right), & \text{ha } t \neq 0. \end{cases}$$

A Bishop–Phelps-féle parciális rendezéssel kapcsolatos alábbi tétel kulcsszerepet játszik majd az Ekeland-féle variációs elv igazolásában.

6.1. tétel. *(Bishop–Phelps) Ha (X, d) teljes metrikus tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos és alulról korlátos, akkor minden $x \in X$ esetén létezik olyan $x^* \in X$ elem, amelyre $x \preceq_f x^*$, és amely maximális a $\preceq_f$ parciális rendezés szerint.*

Bizonyítás. Legyen rögzített $z \in X$ esetén

$$T(z) := \{y \in X \mid z \preceq_f y\} = \{y \in X \mid d(z, y) + f(y) \leq f(z)\}.$$

Mivel az $y \mapsto d(z, y) + f(y)$ leképezés alulról félig folytonos, ezért $T(z)$ zárt (és nyilván nem üres). Értelmezzük az (x_n) sorozatot a következő rekurzióval. Legyen $x_0 = x$ rögzített; ha x_n már adott, úgy legyen $x_{n+1} \in T(x_n)$ olyan, hogy

$$f(x_{n+1}) \leq \frac{1}{n+1} + \inf\{f(z) \mid z \in T(x_n)\}$$

teljesüljön. Megmutatjuk, hogy $\big(T(x_n)\big)$ szűkülő halmazsorozat. Ha $y \in T(x_{n+1})$, akkor $x_{n+1} \preceq_f y$; másrészt a konstrukció miatt $x_n \preceq_f x_{n+1}$. Így a tranzitivitás értelmében $x_n \preceq_f y$, amiből $y \in T(x_n)$ adódik. Tehát $T(x_{n+1}) \subseteq T(x_n)$.

Végezetül megmutatjuk, hogy $\big(\operatorname{diam} T(x_n)\big)$ nullsorozat. Ha $y \in T(x_{n+1})$, akkor $x_{n+1} \preceq_f y$ és $y \in T(x_n)$; innen

$$d(x_{n+1}, y) \leq f(x_{n+1}) - f(y) \qquad \text{és} \qquad f(x_{n+1}) \leq \frac{1}{n+1} + f(y).$$

Összevetve ezeket az egyenlőtlenségeket, $d(x_{n+1}, y) \leq 1/(n+1)$ következik. Így a háromszög-egyenlőtlenség miatt kapjuk, hogy

$$\operatorname{diam} T(x_{n+1}) \leq \frac{2}{n+1}.$$

Ezért a Cantor–Fréchet-féle metszettétel szerint létezik pontosan egy olyan $x^* \in X$ elem, hogy

$$x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n).$$

Mivel $x^* \in T(x_0)$, ezért $x = x_0 \preceq_f x^*$. A maximalitás adódik az egyértelműségből. Ha ugyanis $y^* \in X$ olyan elem, hogy $x^* \preceq_f y^*$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ index esetén $x_n \preceq_f x^*$ miatt $x_n \preceq_f y^*$ szintén fönnáll. Ez azonban azt jelenti, hogy y^* benne van a fönti metszetben, tehát $x^* = y^*$. $\square$

Az Ekeland-féle variációs elv ismertetése és igazolása előtt a Bishop–Phelps-tétel azonnali következményeként a Banach-féle fixponttétel Caristitól származó általánosítására fogunk kitérni.

6.2. tétel. *(Caristi) Ha (X, d) teljes metrikus tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos és alulról korlátos, valamint $T\colon X \to X$ minden $x \in X$ esetén eleget tesz a*

$$d(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx)$$

Caristi-féle feltételnek, akkor a T leképezésnek van fixpontja.

Bizonyítás. Tekintsük azt a $\preceq_f$ parciális rendezést, melyet az f függvény származtat. A Bishop–Phelps-féle tétel szerint az $(X, \preceq_f)$ parciálisan rendezett halmazban van egy x^* maximális elem. A Caristi-féle feltétel szerint $x^* \preceq_f Tx^*$; a maximalitás miatt ebből $x^* = Tx^*$ adódik. $\square$

Caristi eredményéből valóban következik a Banach-féle fixponttétel. Ha ugyanis (X, d) teljes metrikus tér és $T\colon X \to X$ kontrakció q faktorral, akkor értelmezzük az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$f(x) = \frac{d(x, Tx)}{1-q}. \tag{6.1}$$

Nyilvánvaló, hogy f folytonos és alulról korlátos. Továbbá a Caristi-féle feltétel is teljesül. Ha ugyanis $x \in X$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned} f(x) - f(Tx) &= \frac{d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)}{1-q} \\ &\geq \frac{d(x, Tx) - qd(x, Tx)}{1-q} = d(x, Tx). \end{aligned}$$

Most a Caristi-féle feltétel teljesülésére adunk elegendő feltételt.

6.3. tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér és $T\colon X \to X$. Pontosan akkor található a Caristi-féle feltételt teljesítő alulról korlátos $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény, ha a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(T^{n-1}x, T^n x) \tag{6.2}$$

sor minden $x \in X$ pontban konvergens. Amennyiben T folytonos és a fenti sor minden $x \in X$ esetén konvergens, akkor a Caristi-féle feltételnek létezik alulról félig folytonos és alulról korlátos $f\colon X \to \mathbb{R}$ megoldása.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely alulról korlátos $f\colon X \to \mathbb{R}$ teljesíti a Caristi-féle feltételt, és legyen $x \in X$. A feltételt rendre az $x, Tx, \dots, T^k x$ helyeken alkalmazva és a kapott egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} d(T^{n-1}x, T^n x) &\leq \sum_{n=1}^{k} \big(f(T^{n-1}x) - f(T^n x)\big) \\ &= f(x) - f(T^k x) \leq f(x) - \inf(f). \end{aligned}$$

Mivel a (6.2) alatti sor nemnegatív tagú, ezért a részletösszegei sorozatának a korlátosságából azonnal következik a konvergenciája.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a tételbeli sor minden $x \in X$ esetén konvergens. Értelmezzük az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} d(T^n x, T^{n+1} x)$$

képlettel. Azonnal látható, hogy f nemnegatív és

$$f(x) = d(x, Tx) + \sum_{n=1}^{\infty} d(T^n x, T^{n+1} x) = d(x, Tx) + f(Tx),$$

tehát f egyenlőséggel teljesíti a Caristi-féle feltételt. Ha T még folytonos is, akkor az f definiáló függvénysorának tagjai nemnegatívak és folytonosak, ezért f alulról félig folytonos. $\square$

A fenti tétel alapján látható, hogy a Caristi-féle feltételből következik a $(T^n x)$ iteráció konvergenciája. Az alábbi következményekből kiderül, hogy a T leképezésre szabott folytonossági feltétel már elegendő ahhoz, hogy az iteráció határértéke a leképezés fixpontja legyen. Megjegyezzük, hogy a második következmény ismét csak a Banach-féle fixponttétel egy elegáns általánosítása.

6.4. következmény. *Ha (X, d) teljes metrikus tér és $T\colon X \to X$ olyan folytonos leképezés, hogy a (6.2) alatti sor minden $x \in X$ pontban konvergens, akkor a T leképezésnek van fixpontja.*

Bizonyítás. Az állítás azonnali következménye az előző két tételnek. Bizonyítása másképpen is elvégezhető. Ha $x \in X$ rögzített, akkor a (6.2) alatti sor konvergenciája miatt az $x_1 = x$ és $x_{n+1} := T^n x$ iterációval értelmezett (x_n) sorozat Cauchy-sorozat, ami a teljesség miatt konvergál az X valamilyen x_0 eleméhez. Mivel T folytonos, ezért a rekurzióban az $n \to \infty$ határátmenetet végrehajtva kapjuk, hogy x_0 a T leképezés fixpontja. $\square$

6.5. következmény. *Ha (X, d) teljes metrikus tér, valamint $T\colon X \to X$ olyan folytonos leképezés, amely eleget tesz a*

$$d(Tx, T^2 x) \le q d(x, Tx) \qquad (x \in X)$$

pályakontrakciós feltételnek valamilyen $0 \le q < 1$ faktorral, akkor a T leképezésnek van fixpontja.

Bizonyítás. Értelmezzük az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt a (6.1) szerint. Ekkor T folytonossága miatt f folytonos, és ahogyan azt korábban láttuk, a Caristi-féle feltétel is teljesül. Így a Caristi-féle fixponttétel szerint T rendelkezik fixponttal. Használhatjuk a következő érvelést is. A pálya-kontrakciós feltétel miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(T^n x, T^{n+1}x) \leq d(x, Tx) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{d(x, Tx)}{1-q} < \infty.$$

Tehát az előző következmény szerint T rendelkezik fixponttal. $\square$

Valójában az állítás Banach eredeti gondolatmenetéből közvetlen módon levezethető, aminek részletezésétől eltekintünk.

6.2. Az Ekeland-féle variációs elv és alkalmazásai

Az Ekeland által 1974-ben felfedezett variációs elv lényegében azt állítja, hogy egy szélsőérték-probléma bármely közelítő megoldásához megadható az eredeti problémának egy olyan perturbációja, amelynek szigorú globális minimuma van, és e minimumhely a közelítő megoldások egy környezetébe esik.

6.6. tétel. *(Ekeland) Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos és alulról korlátos függvény, valamint legyen $\varepsilon > 0$. Ha $x \in X$ olyan, hogy $f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon$, akkor minden $\lambda > 0$ esetén létezik olyan $x_\lambda \in X$ elem, amelyre*

(i) $f(x_\lambda) \leq f(x)$;

(ii) $d(x, x_\lambda) \leq \varepsilon/\lambda$;

(iii) *x_λ szigorú globális minimumhelye az $y \mapsto f(y) + \lambda d(y, x_\lambda)$ leképezésnek.*

Bizonyítás. Rögzített $\lambda > 0$ esetén alkalmazzuk a Bishop–Phelps-féle tételt az $\big(X, \lambda d\big)$ metrikus térben és az f által indukált $\preceq_f$ parciális rendezéssel. Ekkor létezik olyan $x^* =: x_\lambda \in X$ elem, hogy $x \preceq_f x_\lambda$ és x_λ maximális a parciális rendezésre nézve. Az $x \preceq_f x_\lambda$ miatt $\lambda d(x, x_\lambda) \leq f(x) - f(x_\lambda)$ teljesül. Mivel itt a bal oldal nemnegatív, ezért (i) érvényes. Másrészt a jobb oldalnak ε felső becslése, ezért (ii) is fennáll. A maximalitás miatt $\lambda d(y, x_\lambda) > f(x_\lambda) - f(y)$, amiből azonnal adódik az (iii) alatti állítás. $\square$

Kiderül, hogy Banach-téren értelmezett differenciálható célfüggvény esetén a közelítő megoldásokban a derivált nullához tart. E tulajdonság, melynek két változatát közöljük, a klasszikus Fermat-elv approximációs megfelelője.

6.7. következmény. *Legyen X Banach-tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ Fréchet szerint differenciálható és alulról korlátos függvény, valamint legyen $\varepsilon > 0$. Ha $x \in X$ olyan, hogy $f(x) \leq \inf(f) + \varepsilon$, akkor minden $\lambda > 0$ esetén létezik olyan $x_\lambda \in X$ elem, hogy*

$$f(x_\lambda) \leq f(x), \qquad \|x - x_\lambda\| \leq \varepsilon/\lambda \qquad \text{és} \qquad \|f'(x_\lambda)\| \leq \lambda.$$

Bizonyítás. Az x_λ létezése, valamint az első két tulajdonság az előző tétel, valamint annak (i) és (ii) állításának azonnali következménye. Ugyancsak az előző tétel (iii) pontja szerint minden $y \in X$ esetén

$$f(y) + \lambda\|y - x_\lambda\| \geq f(x_\lambda).$$

Rögzített $t > 0$ és $h \in X$ esetén alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget az $y = x_\lambda + th$ pontban. Ekkor $f(x_\lambda + th) + \lambda\|th\| \geq f(x_\lambda)$, amiből rendezéssel

$$\frac{f(x_\lambda + th) - f(x_\lambda)}{t} \geq -\lambda\|h\|$$

adódik. Képezve a $t \to 0 + 0$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$f'(x_\lambda)h = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_\lambda + th) - f(x_\lambda)}{t} \geq -\lambda\|h\|.$$

Ebben az egyenlőtlenségben a h helyett $(-h)$-t írva $|f'(x_\lambda)h| \leq \lambda\|h\|$ következik. Ezért $\|f'(x_\lambda)\| \leq \lambda$, azaz (iii) is teljesül. □

6.8. következmény. *Legyen X egy Banach-tér, $f\colon X \to \mathbb{R}$ Fréchet szerint differenciálható és alulról korlátos függvény. Ha (x_n) olyan X-beli sorozat, hogy $f(x_n) \to \inf(f)$, akkor van olyan (y_n) sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

- $f(y_n) \leq f(x_n)$,
- $\|x_n - y_n\| \leq \sqrt{f(x_n) - \inf(f)}$,
- $\|f'(y_n)\| \leq \sqrt{f(x_n) - \inf(f)}$.

Bizonyítás. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\varepsilon_n = f(x_n) - \inf(f)$ és $\lambda_n = \sqrt{\varepsilon_n}$, majd alkalmazzuk az előző következményt! □

Az Ekeland-féle variációs elv közvetlen alkalmazásaként kapjuk Clarke alábbi eredményét, melyről rövidesen kiderül, hogy szintén a Banach-féle fixponttétel egyik általánosítása.

6.9. következmény. *(Clarke) Legyen (X, d) teljes metrikus tér, és legyen $T\colon X \to X$ olyan folytonos leképezés, amelyhez találhatók $0 < q < p \le 1$ konstansok, hogy minden olyan $x \in X$ esetén, melyre $x \ne Tx$, van olyan $y \in X \setminus \{x\}$, hogy*

$$pd(x, y) + d(y, Tx) \le d(x, Tx) \qquad \text{és} \qquad d(Tx, Ty) \le qd(x, y).$$

Ekkor a T leképezésnek van fixpontja.

Bizonyítás. Az $f(x) := d(x, Tx)$ képlettel adott folytonos nemnegatív függvényre és a $\lambda := p - q$ pozitív számra alkalmazzuk az Ekeland-féle variációs elvet! Ekkor létezik olyan $x = x_\lambda \in X$ elem, hogy minden $y \in X \setminus \{x\}$ esetén

$$d(x, Tx) < d(y, Ty) + (p - q)d(x, y).$$

Megmutatjuk, hogy $x = Tx$. Ha ez nem így lenne, akkor a feltevésünk szerint lenne olyan $y \in X \setminus \{x\}$, amellyel a tételbeli egyenlőtlenségek teljesülnek. Azaz

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &< d(y, Ty) + (p - q)d(x, y) \\ &\le \big(d(y, Tx) + pd(x, y)\big) + \big(d(Tx, Ty) - qd(x, y)\big) \le d(x, Tx). \end{aligned}$$

A kapott ellentmondás miatt tehát x valóban fixpont. □

Ha T pálya-kontraktív a 6.5. következmény szerinti értelemben, akkor a Clarke-féle fixponttétel feltételei az $y := Tx$ és $p = 1$ választással teljesülnek. Tehát a 6.5. következmény, s ennélfogva a Banach-féle fixponttétel is a 6.9. következmény speciális esetei. Banach-terek zárt és konvex részhalmazai esetén Clarke eredménye a Banach-féle fixponttétel alábbi általánosítását adja:

6.10. következmény. *Legyen D az X Banach-tér zárt és konvex részhalmaza, $T\colon D \to D$ folytonos leképezés, valamint $0 \le q < 1$. Tegyük fel, hogy minden $x \in D$ esetén van olyan $0 < \lambda \le 1$, hogy az $y := (1 - \lambda)x + \lambda Tx$ választással*

$$\|Tx - Ty\| \le q\|x - y\|$$

teljesül. Ekkor a T leképezésnek van fixpontja.

6.3. Nemlineáris nyíltleképezés-tételek

Végezetül a Banach-féle nyíltleképezés-tétel Graves–Ljuszternyik-féle nemlineáris kiterjesztését mutatjuk be. Emlékeztetünk arra, hogy Banach említett tétele szerint, ha A egy az X és Y Banach-terek között ható szürjektív korlátos lineáris operátor, akkor A nyílt, azaz minden $U \subseteq X$ nyílt halmaz esetén $A(U) \subseteq Y$ nyílt. Ezért létezik olyan $r > 0$, hogy $r\overline{U}_Y \subseteq A(\overline{U}_X)$, ahol $\overline{U}_X \subseteq X$ és $\overline{U}_Y \subseteq Y$ a zárt egységgömbök. Az ilyen tulajdonságú r pozitív számok halmazának pontos felső korlátját az A *operátor szürjektivitási modulusának* nevezzük:

$$\operatorname{sur}(A) := \sup\left\{r \geq 0 \mid r\overline{U}_Y \subseteq A(\overline{U}_X)\right\}.$$

Azonnal látható, hogy $\operatorname{sur}(A) \leq \|A\|$ és $\operatorname{sur}(A)$ akkor és csak akkor pozitív, ha A szürjektív.

6.11. tétel. *Legyenek X és Y Banach-terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$ rögzített, valamint $f\colon D \to Y$ adott függvény, és $A\colon X \to Y$ olyan szürjektív korlátos lineáris operátor, hogy*

$$\alpha_0 = \limsup_{\substack{(x,u)\to(p,p)\\ x\neq u}} \frac{\|f(x) - f(u) - A(x-u)\|}{\|x-u\|} < \operatorname{sur}(A). \tag{6.3}$$

Ekkor bármely $K > \frac{1}{\operatorname{sur}(A)-\alpha_0}$ esetén a $(p, f(p))$ pontnak létezik olyan $U \subseteq X \times Y$ környezete, hogy bármely $(x,y) \in U$ esetén van olyan $z \in D$, amelyre

$$f(z) = y \qquad \text{és} \qquad \|x - z\| \leq K\|f(x) - y\|. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. Legyen $K > \frac{1}{\operatorname{sur}(A)-\alpha_0}$, és válasszuk meg az α és β számokat úgy, hogy

$$\alpha_0 < \alpha < \beta < \operatorname{sur}(A) \qquad \text{és} \qquad K = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Mivel $\alpha_0 < \alpha$, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, u \in \overline{U}_X(p,\delta)$ esetén

$$\|f(x) - f(u) - A(x-u)\| \leq \alpha\|x-u\|; \tag{6.5}$$

másrészt $\beta < \operatorname{sur}(A)$ miatt

$$\beta\overline{U}_Y \subseteq A(\overline{U}_X).$$

Legyen most

$$U := \Big\{(x,y) \in D \times Y \mid \|x-p\| < \frac{\delta}{3}, \ \|f(x)-y\| < \frac{\delta}{3K}\Big\}.$$

Ekkor $U \subseteq X \times Y$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az $(p, f(p))$ pontot. Megmutatjuk, hogy ezen az U halmazon teljesül a tétel állítása.

Legyen $(x,y) \in U$ rögzített. A tételbeli feltételeknek eleget tevő $z \in D$ vektor konstrukciójához alkalmazzuk az Ekeland-féle variációs elvet az $u \mapsto \|f(u)-y\|$ leképezésre az $\varepsilon := \|f(x)-y\|$ és $\lambda := 1/K = \beta - \alpha$ konstansokkal az $\overline{U}_X(p,\delta)$ zárt gömbön (ami teljes metrikus tér, hiszen teljes metrikus tér zárt részhalmaza). Az Ekeland-elv szerint van olyan $z := x_\lambda \in M$ elem, hogy

(*i*) $\|f(z)-y\| \le \|f(x)-y\|$, valamint

(*ii*) $\|x-z\| \le K\|f(x)-y\| < \frac{\delta}{3}$ és

(*iii*) $\|f(z)-y\| < \|f(u)-y\| + \lambda\|u-z\|$, amennyiben $u \in \overline{U}_X(p,\delta) \setminus \{z\}$.

A tétel második állítása azonnal adódik az (*ii*) tulajdonságból. Befejezésül tehát azt kell még belátnunk, hogy $f(z) = y$ is érvényes. Ismét az (*ii*) tulajdonságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$\|z-p\| \le \|z-x\| + \|x-p\| \le \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}.$$

Tehát $z \in \overline{U}_X(p,\delta)$. A $\beta\overline{U}_Y \subseteq A(\overline{U}_X)$ tartalmazás miatt bármely $v \in Y$ esetén $v \in A(\frac{\|v\|}{\beta}\overline{U}_X)$, ezért a $v = f(z) - y$ elemhez van olyan $u \in X$, hogy $y - f(z) = Au$ és

$$\|u\| \le \frac{\|f(z)-y\|}{\beta} \le \frac{\|f(x)-y\|}{\beta-\alpha} = K\|f(x)-y\| < \frac{\delta}{3}. \tag{6.6}$$

Tehát $z + u \in \overline{U}_X(p,\delta)$, hiszen $\|z+u-p\| \le \|z-p\| + \|u\| \le \delta$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $u \ne 0$. Az (*iii*) tulajdonság valamint a (6.5) és az imént látott becslések alapján ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|f(z)-y\| &< \|f(z+u)-y\| + \lambda\|(z+u)-z\| \\ &= \|f(z+u)-f(z)-Au\| + (\beta-\alpha)\|u\| \\ &\le \alpha\|u\| + (\beta-\alpha)\|u\| = \beta\|u\| \le \|f(z)-y\|.\end{aligned}$$

A kapott ellentmondás miatt $u = 0$, és ennélfogva $f(z) = y$. □

6.12. következmény. *(Graves–Ljuszternyik) Legyenek X és Y Banach-terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$, és $f\colon D \to Y$ olyan, a p pontban Fréchet szerint erősen differenciálható függvény, amelynek az $f'(p)\colon X \to Y$ deriváltja szürjektív korlátos lineáris operátor. Ekkor van olyan $K > 0$ és a $(p, f(p))$ pontnak olyan U környezete, hogy minden $(x, y) \in U$ esetén van olyan $z \in D$, amelyre a 6.11. tétel állítása érvényes.*

Bizonyítás. Mivel $A := f'(p)$ szürjektív, Banach nyíltleképezés-tétele szerint $\operatorname{sur}(A) > 0$. Másrészt f a p pontban Fréchet szerint erősen differenciálható, ezért a 6.11. tételben $\alpha_0 = 0$. □

Az alábbi következmény azt mutatja, hogy a Banach-terek között ható szürjektív korlátos lineáris operátorok halmaza nyílt az $\mathscr{L}(X, Y)$ térben.

6.13. következmény. *Ha X és Y Banach-terek, $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$ olyanok, hogy A szürjektív és korlátos, valamint $\|B - A\| < \operatorname{sur}(A)$, akkor B szürjektív, és*

$$\operatorname{sur}(A) - \|B - A\| \leq \operatorname{sur}(B).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 6.11. tételt az $f(x) = Bx$ választással. Ekkor

$$\alpha_0 = \limsup_{\substack{(x,u)\to(p,p)\\ x\neq u}} \frac{\|f(x) - f(u) - A(x - u)\|}{\|x - u\|} = \|B - A\| < \operatorname{sur}(A).$$

Így a 6.11. tétel szerint minden $0 < r < \operatorname{sur}(A) - \|B - A\|$ esetén a $0 \in Y$ elemnek van olyan V környezete, hogy minden $y \in V$ esetén van olyan $z \in X$, amelyre

$$Bz = y \qquad \text{és} \qquad \|z\| \leq \frac{1}{r}\|y\|.$$

Innen a B operátor pozitív homogenitását is kihasználva azonnal kapjuk, hogy $r\overline{U}_Y \subseteq B(\overline{U}_X)$. A szürjektivitási modulus értelmezése miatt $r \leq \operatorname{sur}(B)$. Mivel ez az egyenlőtlenség bármely $0 < r < \operatorname{sur}(A) - \|B - A\|$ esetén érvényes, ezért innen a tétel állítása következik. □

A fenti következményből könnyen levezethető, hogy a $\operatorname{sur}\colon \mathscr{L}(X, Y) \to \mathbb{R}$ függvény globálisan Lipschitz-folytonos 1 modulussal, azaz minden $A, B \in \mathscr{L}(X, Y)$ esetén

$$|\operatorname{sur}(A) - \operatorname{sur}(B)| \leq \|A - B\|.$$

A következő tétel megfogalmazásához normált terek részhalmazai érintővektorainak fogalmát értelmezzük. Ha H az X normált tér egy részhalmaza és $p \in H$, akkor egy $h \in X$ vektort a *H halmaz p pontbeli érintővektorának* nevezünk, ha

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{d(p+th, H)}{t} = 0.$$

A H halmaz p pontbeli érintővektorainak halmazára a $T_p(H)$ jelölést fogjuk használni, és ezt a *H halmaz p pontbeli érintőterének* nevezzük.

6.14. tétel. *(Ljuszternyik) Legyenek X és Y Banach-terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$, valamint $f\colon D \to Y$ olyan, a p pontban Fréchet szerint erősen differenciálható függvény, amelynek $f'(p)\colon X \to Y$ deriváltja szürjektív korlátos lineáris operátor. Ekkor a*

$$H := \{x \in D \mid f(x) = f(p)\}$$

halmaz (nemlineáris sokaság) p pontbeli érintőtere az $f'(p)$ operátor nulltere.

Bizonyítás. Legyen először $h \in T_p(H) \setminus \{0\}$ tetszőleges és $r > 0$ olyan, hogy tetszőleges $t \in [0, r]$ esetén $p + th \in D$ teljesüljön. Ekkor minden $t \in [0, r]$ esetén található olyan $v(t) \in X$ vektor, hogy

$$p + th + v(t) \in H \qquad \text{és} \qquad \|v(t)\| \le d(p + th, H) + t^2.$$

Ezekből a H halmaz értelmezését, illetve az érintővektor fogalmát szem előtt tartva következik, hogy

$$f(p + th + v(t)) = f(p) \qquad \text{és} \qquad \lim_{t \to 0^+} \frac{v(t)}{t} = 0.$$

Az f függvény p-beli Fréchet-differenciálhatósága és a fentiek miatt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\|f(p + th + v(t)) - f(p) - f'(p)(th + v(t))\|}{\|th + v(t)\|} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\|f'(p)(th + v(t))\|}{\|th + v(t)\|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|f'(p)(h + t^{-1}v(t))\|}{\|h + t^{-1}v(t)\|} = \frac{\|f'(p)h\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Tehát $f'(p)h = 0$, azaz h benne van $f'(p)$ nullterében.

A fordított irányú tartalmazás igazolásához legyen $h \in X$ az $f'(p)$ operátor nullterének tetszőleges nem nulla eleme. A 6.12. következmény szerint a $(p, f(p))$ pontnak van olyan $U \subseteq X \times Y$ környezete és van olyan $K > 0$, hogy minden $(x, y) \in U$ esetén van olyan $z \in D$, amelyre (6.4) fennáll.

Válasszuk meg az r pozitív számot úgy, hogy $(p+th, f(p)) \in U$ teljesüljön minden $t \in [0, r]$ esetén. A fentiek szerint minden $t \in [0, r]$ esetén van olyan $z = z(t) \in D$, hogy

$$f(z(t)) = f(p) \qquad \text{és} \qquad \|p + th - z(t)\| \leq K\|f(p+th) - f(p)\|.$$

Az első egyenlőség miatt $z(t) \in H$, így a második egyenlőtlenség szerint

$$d(p+th, H) \leq K\|f(p+th) - f(p)\|$$

minden $t \in [0, r]$ esetén. Ezért és az f Fréchet-differenciálhatósága miatt

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0^+} \frac{d(p+th, H)}{t} &\leq K \limsup_{t\to 0^+} \frac{\|f(p+th) - f(p)\|}{t} \\ &= K\|h\| \limsup_{t\to 0^+} \frac{\|f(p+th) - f(p) - f'(p)(th)\|}{\|th\|} = 0,\end{aligned}$$

ami azt igazolja, hogy a h vektor a H sokaság p-beli érintővektora. $\square$

II. rész

Topologikus fixponttételek és alkalmazásaik

Bevezetés – topologikus eredmények

A topologikus fixponttételek elméletének születését Brouwer alapvető dolgozatának megjelenésétől számítjuk. Fontos azonban közvetlen előfutárként Bohl nevét megemlíteni, aki pár évvel korábban a speciális háromdimenziós esetben igazolta a Brouwer-féle fixponttételt. Idézzük most az eredményt általános formájában [11]:

Tétel. *Az euklideszi tér zárt egységgömbjének bármely önmagába történő folytonos leképezése rendelkezik fixponttal.*

Az egydimenziós eset igazolása nem okoz túl nagy problémát, bevezető analíziskurzusok tárgya lehet a Bolzano-tétel alkalmazására. A kétdimenziós eset bizonyítása azonban, mint látni fogjuk, korántsem ennyire egyszerű. Már maga az állítás fölruházható olyan szemléletes tartalommal, mely messze nem magától értetődő. Például: a palacsinta tésztájának van olyan pontja, mely a sütés előtt ugyanott volt, mint ahová a sütés végeztével került. (Föltéve persze, hogy közben nem mozgatjuk a serpenyőt.) Ha hinni lehet a hagyománynak, Brouwer érdeklődését is gasztronómiai élmény keltette föl: a kávéba kevert tejszín mozgását figyelve fogalmazódott meg benne fixponttétele. Említsünk meg azonban egy másik jellegzetes topológiai eredményt, a negatív retrakt elvet!

Tétel. *Az euklideszi tér zárt egységgömbjének nem létezik a héjra való retraktja, azaz a héjat pontonként fixen hagyó folytonos leképezése.*

Ehhez az eredményhez szintén kapcsolható szemléletes tartalom. Ha a dob hártyáját rá akarjuk feszíteni a peremre, akkor a hártya szükségképpen el fog szakadni. Ez utóbbi talán hihetőbben hangozhat a Brouwer-féle fixponttétel bármelyik illusztrációjánál. Lényegében azonban nincs köztük matematikai különbség, mint ahogy ezt az alábbi ekvivalenciatétel mutatja.

Tétel. *A Brouwer-féle fixponttétel és a negatív retrakt elv egymással ekvivalensek.*

Bizonyítás. Jelölje K a zárt egységgömböt, ∂K pedig ennek héját. Ha tudjuk, hogy létezik $r\colon K \to \partial K$ retrakció, akkor létezik $f\colon K \to K$ fixpontmentes leképezés is; egyszerűen ellenőrizhető, hogy például $f = -r$ ilyen.

Megfordítva, tegyük fel, hogy létezik $f\colon K \to K$ fixpontmentes leképezés, és legyen $r\colon K \to K$ az alábbi módon értelmezett függvény:

$$r(x) = \{y \in S \mid \exists t \geq 0\colon y = x + t(x - f(x))\}.$$

Ekkor r valóban függvény. A fixpontmentesség miatt ugyanis $x - f(x)$ nem a nullvektor; K kompaktsága és szigorú konvexitása miatt pedig létezik pontosan egy olyan t nemnegatív szám, amely a fönt megkövetelt tulajdonsággal bír. Az is igazolható, hogy r folytonos, a héjra képez, és $r|_{\partial K} = \mathrm{id}$. Vagyis r retrakció. □

A továbbiakban a Brouwer-féle fixponttétel kétdimenzós esetét tárgyaljuk a negatív retrakt elv tükrében. Ehhez az algebrai topológia elemeit fogjuk dióhéjban ismertetni. Legyen X topologikus tér és $p \in X$ rögzített pont. Azt mondjuk, hogy a $g\colon [0,1] \to X$ leképezés *p alappontú hurok*, ha folytonos, és $g(0) = p = g(1)$ teljesül. Jelölje a p alappontú hurkok halmazát $P(X,p)$. Ha $g_0, g_1 \in P(X,p)$, akkor értelmezzük a $g = g_0 g_1$ szorzatot az alábbi módon:

$$g(t) = \begin{cases} g_0(2t), & \text{ha } t \in [0,1/2]; \\ g_1(2t-1), & \text{ha } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Nyilván ekkor $g \in P(X,p)$ szintén fönnáll. Tekintsük ezek után a $P(X,p)$ halmazon a következő relációt: $g_0 \simeq g_1$, ha a két hurok megengedett homotópiára nézve ekvivalens, azaz ha van olyan $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ folytonos leképezés, mellyel

(i) $H(t,0) = g_0(t)$;

(ii) $H(t,1) = g_1(t)$;

(iii) $H(t,s) = g_s(t) \in P(X,p)$.

Könnyen megmutatható, hogy $\simeq$ valóban ekvivalenciareláció a p alappontú hurkok halmazán. Jelölje az indukált osztályok rendszerét $\pi(X,p)$.

A $P(X,p)$ halmazon bevezetett művelet kompatibilis módon átültethető az ekvivalenciaosztályok rendszerére a szokásos módon: két osztály szorzata a reprezentánsok szorzatának osztálya. Megmutatható, hogy e művelettel fölruházva $\pi(X,p)$ csoport, melynek neutrális elemét a $g \equiv p$ hurok reprezentálja. Ezt a csoportot az X topologikus tér p pontbeli *Poincaré-csoport*jának vagy *fundamentális csoport*jának nevezzük. A fundamentális csoport azért jelentős, mert segítségével a topológiai kérdések egy része algebrai kérdéssé válik, s így kapu nyílik az algebra módszerei előtt.

Azt mondjuk, hogy az X topologikus térnek Y *retraktív altere*, ha topologikus altere, és létezik $r\colon X \to Y$ retrakció. Retraktív altér fundamentális csoportja és az alaptér fundamentális csoportja szoros kapcsolatban állnak egymással:

Tétel. *Ha Y retraktív altere az X topologikus térnek és $p \in Y$ tetszőleges, akkor $\pi(Y,p)$ részcsoportja a $\pi(X,p)$ fundamentális csoportnak.*

Bizonyítás. Csupán azt kell belátni, hogy ha két Y-beli görbe X-beli megengedett H homotópiára nézve ekvivalens, akkor ekvivalens Y-beli megengedett homotópiával szemben is. Ilyen homotópia az $r \circ H$ leképezés, ahol $r\colon X \to Y$ retrakció. $\square$

A fönti egyszerű észrevétel módot ad a negatív retrakt elv, s így közvetve a Brouwer-féle fixponttétel kétdimenziós esetének bizonyítására. Intuitíven látható, hogy a zárt körlap fundamentális csoportja triviális, míg az ívé végtelen ciklikus. Ám ez utóbbi nem részcsoportja az előbbinek, így nem létezhet a zárt körlapnak az ívre való retraktja.

Ezek a gondolatok sajnos nem vihetők át közvetlen módon a három- vagy annál magasabb dimenziós esetre. Ilyenkor ugyanis a zárt egységgömbnek és a héjnak ugyanaz a fundamentális csoportja, mégpedig a triviális csoport. E probléma a homológiacsoportok bevezetésével áthidalható, azonban ez az út hosszadalmas előkészületekkel jár. Már annak precíz bizonyítása sem könnyű, amit pedig heurisztikusan bárki elfogad, hogy a körív fundamentális csoportja végtelen ciklikus.

Brouwer eredeti módszere, mely a klasszikus analízis és a vektoranalízis kifinomult technikáin alapul, szintén körülményes. Az eredmény fölfedezésekor kevés remény volt arra, hogy egyetemi kurzus keretében tárgyalni lehet majd.

Pusztán emiatt is jelentős Sperner eredménye [66], mely mind szemléletmódjában, mind pedig eleganciájában hatalmas áttörésnek bizonyult.

Sperner 21 éves egyetemistaként igazolt egy gráfelméleti eredményt, melyet aztán Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz [37] kombinatorikus geometriai tartalommal ruháztak föl. Módszerük közvetlenül adja Brouwer fixponttételét abban az esetben, amikor az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanaz a szimplex. A Riesz Frigyestől származó pozitív retrakt elv [59] birtokában pedig a szimplex tetszőleges nem üres, konvex, kompakt halmazra cserélhető. Megemlítjük, hogy Milnor [49], később Milnor gondolatmenetét egyszerűsítve Rogers [60] más szellemű, egyszerű bizonyítását adták Brouwer fixponttételének.

A Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz-féle lemmát Ky Fan fejlesztette tovább [21]. Ötletével a kombinatorikus geometriai elv közvetlenül kiterjeszthető Hausdorff-topologikus vektorterekre, és segítségével igazolható a róla elnevezett egyenlőtlenség. A Ky Fan-egyenlőtlenségből pedig adódik nemcsak Brouwer fixponttétele, hanem Schauder első fixponttétele, sőt a Tyihonov-fixponttétel is [68].

Az alkalmazások szempontjából az alaphalmaz kompaktságát föltételezni túl nagy megszorítás. Valójában e tény ösztönözte Schaudert [63], s vezetett a kompakt leképezések fixponttulajdonságainak vizsgálatához. Eredményét, nevezetes második fixponttételét a nevét viselő approximációs tétel segítségével kapta.

A topologikus fixponttételek elméletét a most felvázoltak szerint építjük fel. A hetedik fejezetben folytonos és kompakt leképezések fixponttulajdonságaival foglalkozunk. Közben bepillantást adunk a retrakt elvek világába és néhány egyszerű alkalmazást, például Perron [55] és Frobenius [23, 24] pozitív mátrixok sajátértékeire vonatkozó tételét vagy Schauder alternatíva tételét bemutatva.

Kérdés természetesen, hogy a leképezésre vonatkozó kompaktsági feltétel mekkora ár. Kiderült, hogy az ennél gyöngébb kondenzáló tulajdonság is biztosítja a fixpont létezését. Ezt az állítást fogalmazza meg Darbo [17] és Szadovszkij [62] tétele, a nyolcadik fejezet fő eredménye. A megközelítés egy frappáns konstrukció, a Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték tulajdonságain alapszik. Végül az előző fejezetek tételeihez visszanyúlva affin leképezéscsaládok fixponttulajdonságaival foglalkozunk.

A kilencedik fejezetben néhány jellegzetes és fontos alkalmazással szemléltetjük a topologikus fixponttételek hatékonyságát. Bemutatjuk a klasszikus inverzfüggvénytétel egy általánosítását, Peano közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó egzisztenciatételét, Neumann [52] és Nash [51] játékelméleti eredményeit, Lomonoszov tételét az invariáns altérről [42], végül pedig Haar eltolásinvariáns mérték létezésére vonatkozó konstrukcióját [28]. Neumann tétele kapcsán felhívjuk a figyelmet Joó [33] egyszerű bizonyítására, valamint Komornik [38] dolgozatára.

A tizedik fejezetben a halmazértékű leképezések világába nyújtunk bepillantást. Ennek legfontosabb eredménye az equilibrium-tétel, melyből könnyen levezethetők a kifelé, illetve befelé irányuló leképezések fixponttulajdonságai, Kakutani [34], Fan [20] és Glicksberg [25] játékelméleti szempontból is alapvető tételei, és természetesen sok egyéb korábban tárgyalt topologikus eredmény is. További alkalmazásként a Bolzano-féle középértéktétel különféle általánosításait, köztük Miranda tételét [50] tárgyaljuk.

A rész utolsó, tizenegyedik fejezetében kitekintést kívánunk adni a fokszám- és fixpontindex-elmélet csodálatos világára. Bizonyítás nélkül ismertetjük Leray és Schauder fokszámtételét [40], megvilágítva kapcsolatát az algebra alaptételével, a Brouwer-féle fixponttétellel, valamint Poincaré sündisznótételével. Az alaptétel bizonyítása megtalálható például Zeidler [71] monográfiájában. A fejezetet záró antipodális tétel Ulam sejtése volt, amit Borsuk [9] igazolt. Ehhez kapcsolódóan említjük meg Bajmóczy és Bárány dolgozatát [1], melyet maga Gromov „kiemelkedően fontos” műnek tekint.

7. fejezet

Fixponttételek folytonos és kompakt leképezésekre

A folytonos és kompakt leképezések fixponttulajdonságainak tárgyalásakor az elegáns és hatékony kombinatorikus megközelítést követjük. Elsőként a baricentrikus koordinátázással ismerkedünk meg, majd igazoljuk Sperner gráfelméleti lemmáját, s ennek segítségével Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz kombinatorikus geometriai tételét. Mindezek és a pozitív retrakt elv birtokában, a második alfejezetben közvetlen bizonyítást kínálunk Brouwer fixponttételére. A harmadik alfejezet a másodiktól függetlenül tanulmányozható. Ky Fan gondolatait követve megmutatjuk, hogy Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz tétele topologikus vektorterekben is érvényes. Ennek felhasználásával igazoljuk a Ky Fan nevét viselő egyenlőtlenséget, melyből már következik Tyihonov fixponttétele. Ily módon Brouwer eredményét és a negatív retrakt elvet ennek következményeként kapjuk. Az utolsó alfejezetben az előzőleg megismert fixponttételek kompaktsági feltételét vizsgáljuk, majd Schauder tételét bizonyítjuk a szintén róla elnevezett approximációs technika segítségével.

7.1. Kombinatorikai háttér

Azt mondjuk, hogy az $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ elemek *affin független* pontok, ha $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Az első lemma jellemzi az affin függetlenséget, és egyben rámutat arra, hogy x_0 szerepe csak látszólag kitüntetett. A második lemma biztosítja a baricentrikus koordinátázást.

7.1. lemma. *Az $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ pontok akkor és csakis akkor affin függetlenek, ha az $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ és $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 0$ azonosságok csak triviális együtthatókkal teljesülnek. Speciálisan az affin függetlenség fogalma nem függ az abban szereplő vektorok sorrendjétől.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x_0, \dots, x_n$ affin független rendszer, továbbá hogy az $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ együtthatók eleget tesznek a tételben szereplő feltételeknek. Ekkor α_0 kifejezhető a második összefüggés segítségével. Ezt az elsőbe írva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ &= -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ &= \alpha_1 (x_1 - x_0) + \dots + \alpha_n (x_n - x_0). \end{aligned}$$

Mivel $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek, ezért $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, amiből $\alpha_0 = 0$ is adódik. Megfordítva, tegyük fel, hogy $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ nem bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nem mind nulla együtthatók, hogy

$$\alpha_1 (x_1 - x_0) + \dots + \alpha_n (x_n - x_0) = 0.$$

Innen az $\alpha_0 := -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ választással kapjuk, hogy a tételben szereplő összefüggések nemtriviális együtthatókkal is teljesülnek. $\square$

7.2. lemma. *Ha $x_0, \dots, x_n$ affin független pontok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor bármely $x \in \mathbb{R}^n$ esetén egyértelműen léteznek olyan $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$ valós számok, amelyekkel az*

$$x = \lambda_0(x) x_0 + \dots + \lambda_n(x) x_n, \qquad 1 = \lambda_0(x) + \dots + \lambda_n(x)$$

azonosságok teljesülnek. Továbbá az $x \to (\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x))$ leképezés folytonos.

Bizonyítás. Rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén jelölje $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ az $x - x_0$ elemnek az $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ bázisra vonatkozó (egyértelmű) koordinátáit. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda_1(x)(x_1 - x_0) + \dots + \lambda_n(x)(x_n - x_0) \\ &= \big(1 - (\lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x))\big) x_0 + \lambda_1(x) x_1 + \dots + \lambda_n(x) x_n \\ &= \lambda_0(x) x_0 + \lambda_1(x) x_1 + \dots + \lambda_n(x) x_n. \end{aligned}$$

Tekintsük most az $\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0\} \setminus \{x_i - x_0\}$ elemek által generált hipersík ortogonális komplementerének valamely h_i egységvektorát. Ekkor az $x - x_0$ bázis-előállítását belsőleg szorozva h_i-vel kapjuk, hogy

$$\langle x - x_0, h_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \langle x_j - x_0, h_i \rangle = \lambda_i(x) \langle x_i - x_0, h_i \rangle.$$

Ez utóbbi tagban a belső szorzat értéke nullától különbözik a h_i elem választása miatt. Tehát minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $\lambda_i(x) = \langle x - x_0, h_i \rangle / \langle x_i - x_0, h_i \rangle$, és itt a jobb oldal x-nek folytonos függvénye. Azonban a tétel második azonosságából λ_0 folytonossága szintén következik. □

A fönti lemma jelöléseit és feltételeit megtartva a $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$ valós számokat az x elem $x_0, \ldots, x_n$ affin független rendszerre vonatkozó *baricentrikus koordinátáinak* nevezzük.

Az $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ affin független pontok által meghatározott n dimenziós S *szimplex*en azon $\mathbb{R}^n$-beli pontok halmazát értjük, amelyeknek mindegyik baricentrikus koordinátája nemnegatív. Jelölésben: $S = [x_0, \ldots, x_n]$. Egyszerűen igazolható, hogy bármely n dimenziós szimplex az adott affin pontrendszer konvex burka. Legyenek $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n$ rögzített indexek. Az S szimplex k dimenziós részszimplexén az alábbi halmazt értjük:

$$[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}] = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j}(x) = 1, \lambda_{i_j}(x) \geq 0 \Big\}.$$

Az S szimplex *trianguláció*ján olyan $T = \{S_1, \ldots, S_m\}$ szimplexcsaládot értünk, amelynek egyesítése S, továbbá különböző i, j indexek esetén $S_i \cap S_j$ vagy üres halmaz, vagy pedig valódi részszimplexe mind S_i-nek, mind pedig S_j-nek.

Legyen S szimplex, T ennek triangulációja, és jelölje V_T a triangulációban szereplő csúcsok halmazát. Azt mondjuk, hogy a $\sigma\colon V_T \to \{0, \ldots, n\}$ leképezés *Sperner-számozás*, ha minden $v \in V_T$ esetén

$$\sigma(p) \in \{i \mid \lambda_i(p) > 0\}.$$

Egy T trianguláció σ Sperner-számozásához tartozó *Sperner-szimplex*ének nevezzük a T olyan szimplexét, amelynek csúcsainál pontosan a $\{0, \ldots, n\}$ halmaz elemei állnak. Sperner eredménye szerint ilyen szimplex mindig létezik.

7.3. lemma. *(Sperner) Ha $S \subseteq \mathbb{R}^n$ szimplex, T ennek tetszőleges triangulációja, akkor bármely Sperner-számozása esetén a Sperner-szimplexek száma páratlan. Speciálisan keletkezik legalább egy Sperner-szimplex.*

Bizonyítás. A tér dimenziószáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Az egydimenziós esetben legyen $S = [x_0, x_1]$ és legyenek $x_0 := p_0 < \cdots < p_n =: x_1$ a triangulációban szereplő csúcsok. Nyilván $\sigma(p_0) = 0$ és $\sigma(p_n) = 1$; tehát

$$\begin{aligned} 1 = \sigma(p_n) - \sigma(p_0) &= \sum_{i=1}^{n} (\sigma(p_i) - \sigma(p_{i-1})) \\ &= \sharp\{i | \sigma(p_i) - \sigma(p_{i-1}) = 1\} - \sharp\{i \mid \sigma(p_i) - \sigma(p_{i-1}) = -1\} \\ &= (k+1) - k. \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben a Sperner-szimplexek azok az egymást követő pontpárok, amelyeknél a számozás nulláról egyre vagy pedig egyről nullára vált. A föntiek szerint tehát a Sperner-szimplexek száma épp $(k+1) + k = 2k+1$, azaz páratlan.

A kétdimenziós esetben legyen $S = [x_0, x_1, x_2]$ tetszőleges szimplex, T ennek triangulációja, s tekintsük ennek egy Sperner-számozását. Rendeljünk hozzá a számozott triangulációhoz egy gráfot a következő módon. A csúcsok legyenek T szimplexei; két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha van közös, 0-val és 1-gyel számozott egydimenziós részszimplexük. Az S komplementerét szintén csúcsként kezeljük; ezt pontosan azokkal a T-beli szimplexekkel kötjük össze, amelyeknek az $[x_0, x_1]$ oldallal van közös, 0-val és 1-gyel számozott egydimenziós részszimplexük.

Az egydimenziós eset miatt a komplementert reprezentáló csúcs foka páratlan. Továbbá minden egyéb csúcs foka 0, 1, vagy 2; egy csúcs foka pontosan akkor 1, ha Sperner-szimplex. Azonban bármely gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros, a páratlan fokú csúcsok pedig jelen esetben pontosan a komplementer és a Sperner-szimplexek reprezentánsai. Eszerint a Sperner-szimplexek száma páratlan.

Az n dimenziós eset hasonlóan kezelhető. A megfelelő gráfban pontosan akkor tekintünk két csúcsot szomszédosnak, ha van a $\{0, \ldots, n-1\}$ halmaz elemeivel számozott közös részszimplexük. A fokszámok a kétdimenziós esethez hasonlóan alakulnak, így a korábbi érvelést ugyanúgy használhatjuk. □

Legyen $S = [x_0, \ldots, x_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ szimplex. Azt mondjuk, hogy a $\{C_0, \ldots, C_n\}$ halmazrendszer *KKM-lefedése* S-nek, ha minden $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq$

n esetén

$$[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}] \subseteq C_{i_0} \cup \dots \cup C_{i_k}$$

teljesül. A KKM-lefedés igen erős tulajdonság: létezik a szimplexnek olyan pontja, melyet „lényegében” a fedőrendszer minden tagja tartalmaz. Ezt fogalmazza meg a következő állítás, melyet a továbbiakban KKM-lemma néven fogunk idézni.

7.4. lemma. *(Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz) Ha $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges szimplex és $\{C_0, \dots, C_n\}$ ennek KKM-lefedése, akkor*

$$S \cap \overline{C}_0 \cap \dots \cap \overline{C}_n \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Legyen (T_m) az S szimplexnek olyan triangulációsorozata, melyben szereplő szimplexek átmérője nullához tart $m \to \infty$ esetén. Jelölje V_{T_m} a T_m trianguláció csúcsainak halmazát. Tekintsük azt a σ_m Sperner-számozást, amelyre minden $p \in V_{T_m}$ esetén $\sigma_m(p) \in \{i \mid p \in C_i\}$ teljesül. Ilyen számozás választása valóban lehetséges; ehhez elegendő azt megmutatni, hogy

$$\{i \mid \lambda_i(p) > 0\} \cap \{i \mid p \in C_i\} \neq \emptyset.$$

Legyen ugyanis $p \in V_{T_m}$ tetszőleges csúcs, melynek $i_0, \dots, i_k$ indexű baricentrikus koordinátái pozitívak. Világos, hogy ekkor $p \in [x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$; ám ez utóbbi szimplex része a $C_{i_0} \cup \ldots \cup C_{i_k}$ halmaznak a KKM-tulajdonság miatt. Ezért van olyan i_j index, hogy $p \in C_{i_j}$, s így a fönti metszet valóban nem üres.

A Sperner-lemma szerint létezik a σ_m számozáshoz tartozó Sperner-szimplex a T_m triangulációban; jelölje ezt $S_m = [p_{0m}, \dots, p_{nm}]$, ahol föltesszük, hogy $\sigma_m(p_{im}) = i$ teljesül minden lehetséges i index esetén. Mivel S kompakt halmaz, ezért a $(p_{0m}, \dots, p_{nm})$ sorozatnak van konvergens részsorozata; az általánosság csorbítása nélkül azt is föltehetjük, hogy az eredeti sorozat konvergens. Legyen $p_i := \lim_{m\to\infty} p_{im}$. A Sperner-számozás konstrukciójából adódóan $p_{im} \in C_i$, ezért $p_i \in \overline{C}_i$. Másrészt $m \to \infty$ esetén S_m átmérője nullához tart, tehát $p_0 = \dots = p_n =: p$. Ez azt jelenti, hogy a tételben szereplő metszet tartalmazza a p pontot, így valóban nem üres. □

7.2. Pozitív retrakt elvek és alkalmazásaik

A KKM-lemmából Brouwer fixponttétele közvetlenül igazolható, ha az alaphalmaz szimplex. A szimplextől általánosabb értelmezési tartományra való áttérést a pozitív retrakt elvek teszik lehetővé. Emlékeztetünk arra, hogy egy X topologikus tér K részhalmazára való retrakcióján egy olyan $r\colon X \to K$ folytonos függvényt értünk, amely K elemeit fixen hagyja. Elsőként Riesz eredményét mutatjuk be.

7.5. tétel. *Legyen X Hilbert-tér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és definiáljuk az $r \subseteq X \times K$ relációt az*

$$r := \{(x, y) \in X \times K \mid \|x - y\| = d(x, K)\}$$

képlettel. Ekkor r az X-nek K-ra való retrakciója.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy r függvény, azaz $r(x)$ minden $x \in X$ esetén egyelemű. Legyen $x \in X$ rögzített. Mivel az $y \mapsto \|x - y\|$ leképezés folytonos és K kompakt, ezért ez a függvény felveszi a minimumát K-n. Így létezik olyan $y \in K$, amivel $\|x - y\| = d(x, K)$ teljesül, tehát $r(x)$ nem üres. Tegyük fel, hogy $y, z \in r(x)$. Ekkor $\|x - y\| = d(x, K) = \|x - z\|$.

Jól ismert (és könnyen ellenőrizhető), hogy bármely belsőszorzatból származó norma eleget tesz az alábbi, úgy nevezett *paralelogrammaazonosság*nak:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \qquad (u, v \in X).$$

Ebből $u := \frac{1}{2}(y + z) - x$ és $v := \frac{1}{2}(y - z)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\left\|\frac{y + z}{2} - x\right\|^2 + \left\|\frac{y - z}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \frac{1}{2}\|x - z\|^2 = d^2(x, K).$$

Mivel K konvex, ezért $\frac{1}{2}(y + z) \in K$, tehát a fönti egyenlőség első tagja legalább $d^2(x, K)$. Emiatt a második tag szükségképpen nulla, amiből $y = z$ adódik.

Most megmutatjuk, hogy r Lipschitz-tulajdonságú, amiből a folytonosság már azonnal következik. Ehhez az alábbi egyenlőtlenséget igazoljuk: minden $u \in X$ és $v \in K$ esetén

$$\langle u - r(u), v - r(u)\rangle \le 0. \tag{7.1}$$

Legyen $t \in]0, 1[$ tetszőleges; ekkor K konvexitása miatt $w := tv + (1 - t)r(u)$ szintén K-beli elem, s így az u elemtől való távolsága legalább $d(u, K)$. Azaz $\|u - r(u)\| \le \|u - w\|$. Innen

$$\begin{aligned}
0 \ge & \|u - r(u)\|^2 - \|u - w\|^2 \\
= & - 2\langle u, r(u)\rangle + \|r(u)\|^2 + 2\langle u, w\rangle - \|w\|^2 \\
= & - 2\langle u, r(u)\rangle + \|r(u)\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + 2(1-t)\langle u, r(u)\rangle \\
& - t^2\|v\|^2 - 2t(1-t)\langle v, r(u)\rangle - (1-t)^2\|r(u)\|^2 \\
= & - 2t\langle u, r(u)\rangle - (t^2 - 2t)\|r(u)\|^2 + 2t\langle u, v\rangle \\
& - t^2\|v\|^2 - 2t(1-t)\langle v, r(u)\rangle.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséget t-vel osztva, majd véve a $t \to 0$ határátmenetet, épp a bizonyítandó állítást kapjuk. Legyen most $x, y \in X$. Ekkor $r(x), r(y) \in K$, így $u := x$ és $v := r(y)$, illetve $u := y$ és $v := r(x)$ helyettesítésekkel (7.1)-ből nyerjük, hogy

$$0 \ge \langle x - r(x), r(y) - r(x)\rangle, \qquad \text{illetve} \qquad 0 \ge \langle y - r(y), r(x) - r(y)\rangle.$$

Ezt a két egyenlőtlenséget összeadva, majd a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle x - y - r(x) + r(y), r(x) - r(y)\rangle \\
&= \langle x - y, r(x) - r(y)\rangle - \|r(x) - r(y)\|^2 \\
&\le \|x - y\|\|r(x) - r(y)\| - \|r(x) - r(y)\|^2.
\end{aligned}$$

Ha $\|r(y) - r(x)\| = 0$, azaz $r(x) = r(y)$, akkor a Lipschitz-tulajdonság nyilvánvalóan teljesül; ha $r(x) \ne r(y)$, akkor pedig a fönti egyenlőtlenséget rendezve egyszerűsítés után kapjuk a kívánt tulajdonságot. □

7.6. tétel. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan zárt, konvex halmaz, aminek p belső pontja, és értelmezzük a $\rho\colon X \to [0, 1]$ leképezést a*

$$\rho(x) := \sup\{t \in [0, 1] \mid p + t(x - p) \in K\}$$

képlettel. Ekkor az $r(x) = p + \rho(x)(x - p)$ módon definiált $r\colon \mathbb{R}^n \to K$ függvény retrakció.

Bizonyítás. Ha $x \in K$, akkor $\rho(x) = 1$ miatt $r(x) = x$, tehát $r|_K = \mathrm{id}$. Ha $x \notin K$, akkor K zártsága miatt $p + \rho(x)(x - p) \in K$, így $r(x)$ ekkor is K-beli. Az r folytonosságához elegendő csupán ρ folytonosságát igazolnunk. Ehelyett többet mutatunk meg: belátjuk, hogy $1/\rho$ konvex függvény. Ebből ugyanis a véges dimenziós tereken értelmezett konvex függvények folytonossági tulajdonságából ρ folytonossága azonnal következik. A számolás egyszerűsítése végett az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p = 0$. Ebben az esetben

$$\rho(x) := \sup\{t \in [0,1] \mid tx \in K\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in [0,1]$ tetszőleges. Ekkor $\rho(x), \rho(y) \in]0,1]$, valamint

$$\rho(x)x \in K \qquad \text{és} \qquad \rho(y)y \in K.$$

Tehát a K konvexitása miatt

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \frac{\lambda}{\rho(x)}K + \frac{1-\lambda}{\rho(y)}K \subseteq \left(\frac{\lambda}{\rho(x)} + \frac{1-\lambda}{\rho(y)}\right)K.$$

Mivel $\rho(x), \rho(y) \leq 1$, ezért

$$t := \left(\frac{\lambda}{\rho(x)} + \frac{1-\lambda}{\rho(y)}\right)^{-1} \leq \left(\frac{\lambda}{1} + \frac{1-\lambda}{1}\right)^{-1} = 1$$

és

$$t(\lambda x + (1-\lambda)y) \in K.$$

Így $t \leq \rho(\lambda x + (1-\lambda)y)$, amiből az $1/\rho$ konvexitása következik. □

7.7. tétel. *(Brouwer) Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, továbbá $f\colon K \to K$ folytonos leképezés, akkor létezik f-nek fixpontja.*

Bizonyítás. Elsőként tegyük fel, hogy $K = [x_0, \ldots, x_n]$ szimplex. Legyen $C_i := \{x \in K \mid \lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)\}$. Megmutatjuk, hogy $\{C_0, \ldots, C_n\}$ zárt halmazokból álló KKM lefedése K-nak. Legyenek $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n$ tetszőleges indexek és $x \in [x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$. Világos, hogy ekkor $\lambda_j(x) = 0$ minden olyan j indexre, amely különbözik az előbb fölsoroltaktól. Így $f(x) \in K$ miatt

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j}(f(x)) \leq \sum_{j=0}^{n} \lambda_j(f(x)) = 1 = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j}(x).$$

Vagyis létezik olyan $j \in \{0, \ldots, k\}$ index, amivel $\lambda_{i_j}(f(x)) \leq \lambda_{i_j}(x)$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy x benne van a C_{i_j} halmazban, tehát a $\{C_{i_0}, \ldots, C_{i_k}\}$ halmazrendszer egyesítésében is, ami épp a KKM-tulajdonságot jelenti. A zártság igazolásához tekintsük valamelyik C_i halmazt, ennek egy p torlódási pontját. Legyen (x_m) olyan p-hez tartó sorozat, melynek tagjai C_i-ből valók. Ekkor $\lambda_i(f(x_m)) \leq \lambda_i(x_m)$; mivel az itt szereplő függvények folytonosak, ezért $\lambda_i(f(p)) \leq \lambda_i(p)$ adódik $m \to \infty$ esetén. Tehát $p \in C_i$, ami C_i zártságát adja.

A KKM-lemma miatt $K \cap C_0 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$; legyen x_0 ennek eleme. Ekkor $\lambda_i(f(x_0)) \leq \lambda_i(x_0)$ teljesül minden i index esetén. Ám ezen egyenlőtlenségeket összegezve mindkét oldalon 1 adódik, hiszen az ott szereplő tagok baricentrikus koordináták. Ez csak úgy lehetséges, hogy tagonként is egyenlőség teljesül. A baricentrikus koordináták egyértelműsége miatt ekkor $f(x_0) = x_0$ következik.

Legyen most $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, és $S \subseteq \mathbb{R}^n$ olyan szimplex, hogy $K \subseteq S$. Tekintsük a $g := f \circ r$ leképezést, ahol $r \colon \mathbb{R}^n \to K$ retrakció. Ekkor $g : \mathbb{R}^n \to K$ folytonos leképezés, továbbá $g(S) \subseteq S$. A előzőek miatt g-nek van fixpontja S-ben, azaz $f(r(p)) = p$ teljesül valamely $p \in S$ elemmel. Azonban r retrakció, tehát $r(p) \in K$; másrészt f értékkészlete K-beli, s így $r(p) = p$. Vagyis $p \in K$ fixpontja f-nek. □

A Brouwer-féle fixponttétel első alkalmazásaként a sugarak elhagyásának elvét ismertetjük, amely a feltételekben foglalt szemléletes geometriai jelentésről kapta a nevét. Ebből közvetlen módon kaphatjuk a Schauder-féle alternatívát, melynek bizonyítását egyszerűsége miatt nem részletezzük.

7.8. következmény. *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $f \colon K \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonos leképezés, hogy valamely $p \in K^\circ$ és minden $x \in \partial K$ esetén $f(x) \neq x + \lambda(x - p)$ ha $\lambda > 0$, akkor létezik f-nek fixpontja.*

Bizonyítás. A 7.6. tételben megadott $r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény a K egy retrakciója. Ekkor $r \circ f \colon K \to K$ folytonos, ezért a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik $x \in K$ fixpontja.

Ha most $x \in K^\circ$, akkor nyilván fixpontja f-nek is. Ha $x \in \partial K$, akkor a fixponttulajdonság és r értelmezése miatt $x = r(f(x)) = p + \rho(f(x))(f(x) - p)$, amiből rendezéssel kapjuk, hogy

$$f(x) = x + \left(\frac{1}{\rho(f(x))} - 1\right)(x - p).$$

A tétel feltétele szerint ez csak úgy lehetséges, ha $\rho(f(x)) = 1$, azaz $f(x) \in K$. Ám ekkor x megint csak fixpontja f-nek. □

7.9. következmény. *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ a zárt egységgömb, $f \colon K \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezés, akkor* *(i) vagy létezik f-nek fixpontja, vagy*

(ii) létezik f-nek egység-sajátvektora $\lambda > 1$ sajátértékkel.

A következő klasszikus eredmény szintén a Brouwer-fixponttétel egyszerű következménye.

7.10. tétel. *(Perron–Frobenius) Bármely pozitív elemű négyzetes mátrixnak létezik pozitív sajátértéke és ehhez tartozó pozitív koordinátájú sajátvektora.*

Bizonyítás. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy pozitív elemű mátrix, és legyen

$$S := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \geq 0,\, x_1 + \dots + x_n = 1\}.$$

Ekkor minden $x \in S$ esetén Ax koordinátái pozitívak, ezért az

$$f(x) := \frac{1}{(Ax)_1 + \dots + (Ax)_n} A(x)$$

képlettel adott $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ leképezés jól definiált, folytonos, és $f(S) \subseteq S$ is teljesül. Így a Brouwer-féle fixponttétel miatt létezik f-nek $x \in S$ fixpontja. Vagyis x az A sajátvektora a $\lambda := (Ax)_1 + \dots + (Ax)_n$ pozitív sajátértékkel. □

A bevezetőben láttuk, hogy a Brouwer-féle fixponttétel és a negatív retrakt elv egymással ekvivalens állítások, majd a negatív retrakt elv speciális esetéből kaptuk Brouwer tételét – szintén speciális esetre. Arra is kitértünk, hogy e módszer miért nem működik magasabb dimenziós esetekben. Most, a Brouwer-féle fixponttétel birtokában, végre kimondhatjuk a negatív retrakt elvet általános formájában is.

7.11. következmény. *Nem létezik az euklideszi tér zárt egységgömbjének a héjra való retrakciója.*

Érdemes megemlíteni, hogy Brouwer tétele nemcsak a negatív retrakt elvvel, hanem a KKM-lemmával is ekvivalens. Ennek bizonyítására itt nem térünk ki.

7.3. A Tyihonov-féle fixponttétel

Egy halmazcsaládot *centrált rendszer*nek mondunk, ha bármely véges részrendszerének metszete nem az üres halmaz. Elsőként két segéderedményt fogalmazunk meg. Az első elegendő feltételt ad arra, hogy egy centrált rendszer metszete ne legyen üres, míg a második egy speciális, de lényeges konstrukciót ad centrált halmazrendszerre.

7.12. lemma. *(Riesz) Ha X topologikus tér, $\mathscr{F}$ zárt halmazok olyan centrált rendszere, melynek van kompakt tagja, akkor $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$. Jelölje $\mathscr{H}$ azt a nyílt halmazcsaládot, amely az $\mathscr{F}$ tagjainak komplementereiből áll. Az indirekt feltétel és a De Morgan-azonosságok miatt ekkor $\bigcup \mathscr{H} = X$. Vagyis ha K jelöli $\mathscr{F}$ kompakt elemét, akkor

$$K \subseteq H_1 \cup \ldots \cup H_n = (X \setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n) = X \setminus (F_1 \cap \ldots \cap F_n),$$

ahol $F_1, \ldots, F_n$ alkalmas $\mathscr{F}$-beli tagok. Ám ekkor $K \cap F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$, ami ellentmond az $\mathscr{F}$ rendszer centráltságának. $\square$

Legyen X vektortér és $H \subseteq X$ nem üres halmaz. Az $F \colon H \to 2^X$ leképezést *KKM-leképezés*nek mondjuk, ha minden $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \ldots, x_n \in H$ esetén fönnáll, hogy

$$\operatorname{conv}\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} F(x_i).$$

7.13. lemma. *(Ky Fan) Ha X topologikus vektortér, $H \subseteq X$ nem üres halmaz, $F : H \to 2^X$ KKM-leképezés, akkor $\{\overline{F(x)} \mid x \in H\}$ centrált rendszer.*

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és legyenek $x_0, \ldots, x_n \in H$ rögzített elemek. Legyenek $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^n$ rögzített affin független pontok és tekintsük az általuk meghatározott $S \subseteq \mathbb{R}^n$ szimplexet. Értelmezzük a $\varphi \colon S \to X$ leképezést az alábbi módon:

$$\varphi(y) := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(y) x_i.$$

A baricentrikus koordinátafüggvények és a vektortérműveletek folytonossága miatt φ folytonos. Legyen $C_i := \varphi^{-1}\big(\overline{F(x_i)}\big)$. Ekkor C_i zárt halmaz, hiszen zárt halmaz folytonos ősképeként áll elő. Sőt, $\{C_0, \ldots, C_n\}$ KKM-lefedése az S szimplexnek. Legyenek ugyanis $0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n$ tetszőleges indexek és $y \in [y_{i_0}, \ldots, y_{i_k}]$. Ekkor

$$\varphi(y) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j}(y) x_{i_j} \in \operatorname{conv}\{x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} \overline{F(x_{i_j})},$$

azaz

$$y \in \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{j=0}^{k} \overline{F(x_{i_j})}\Big) = \bigcup_{j=0}^{k} \varphi^{-1}\big(\overline{F(x_{i_j})}\big) = \bigcup_{j=0}^{k} C_{i_j}.$$

A KKM-lemma miatt $C_0 \cap \ldots \cap C_n \cap S \neq \emptyset$; jelölje p e metszetnek valamely elemét. Ekkor $\varphi(p)$ benne van a $\bigcap_{i=0}^{n} \overline{F(x_i)}$ metszetben, ami épp a centráltságot jelenti. $\square$

A továbbiakban ismét szükségünk lesz a 6. fejezetben bevezetett alulról félig folytonosság fogalmára, melyet az egyszerűség kedvéért most megismétlünk. Legyen X topologikus tér. Azt mondjuk, hogy $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *alulról félig folytonos* a $p \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan U környezete p-nek, hogy minden $x \in U$ esetén

$$f(x) > f(p) - \varepsilon.$$

Az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt alulról félig folytonosnak mondjuk, ha minden $p \in X$ pontban alulról félig folytonos.

Legyen X vektortér, $K \subseteq X$ konvex halmaz. Az $f\colon K \to \mathbb{R}$ függvényt *kvázikonkáv*nak nevezzük, ha minden $x, y \in K$ és minden $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Minden konkáv függvény egyúttal kvázikonkáv is. Kvázikonvex függvényekről ehhez hasonló módon beszélhetünk, a föntiekben fordított egyenlőtlenséget, valamint minimum helyett maximumot szerepeltetve. Az is világos, hogy f pontosan akkor kvázikonkáv, ha $(-f)$ kvázikonvex.

7.14. tétel. *(Ky Fan-egyenlőtlenség) Ha X Hausdorff-féle topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $\varphi\colon K \times K \to \mathbb{R}$ első változójában alulról félig folytonos, másodikban kvázikonkáv függvény, akkor van olyan $x_0 \in K$, hogy*

$$\sup_{y \in K} \varphi(x_0, y) \leq \sup_{z \in K} \varphi(z, z).$$

Bizonyítás. Jelölje c a fönti egyenlőtlenség jobb oldalát. A $c = +\infty$ eset nyilvánvaló lévén föltehetjük, hogy $c < +\infty$. Legyen $F(y) := \{x \in K \mid \varphi(x, y) \leq c\}$. Ha $y \in K$ rögzített és p az $F(y)$ komplementeréből való, akkor vagy $p \notin K$, vagy $p \in K$ és $\varphi(p, y) > c$. Az első esetben a Hausdorff-tulajdonság miatt p egy környezetével együtt K komplementeréhez tartozik. A második esetben az alulról félig folytonosság miatt létezik olyan U környezete p-nek, hogy minden $x \in U$ esetén $\varphi(x, y) > c$. Tehát $F(y)$ komplementere nyílt, s így $F(y)$ zárt halmaz. Sőt, $F(y)$ kompakt, hiszen zárt részhalmaza a kompakt K halmaznak.

Legyenek $y_1, \ldots, y_n$ rögzített K-beli elemek, valamint $y = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ konvex kombinációs együtthatók. Tegyük fel, hogy y nincs benne az $F(y_1) \cup \ldots \cup F(y_n)$ halmazban. Ekkor szükségképpen $\varphi(y, y_k) > c$ teljesül minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, hiszen $y \in K$; így a kvázikonkávitás miatt

$$c \geq \varphi(y, y) = \varphi(y, \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n) \geq \min_{k=1,\ldots,n} \varphi(y, y_k) > c.$$

A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy az $F\colon K \to 2^X$ KKM-leképezés. Így a Ky Fan-lemma és a Riesz-lemma szerint van olyan $x_0 \in K$, hogy minden $y \in K$ esetén $x_0 \in F(y)$, azaz $\varphi(x_0, y) \leq c$, ami épp a bizonyítandó állítással ekvivalens. $\square$

Azt mondjuk, hogy $p\colon X \to \mathbb{R}$ *félnorma* az X valós vektortéren, ha p szubadditív és abszolút homogén. E két tulajdonság miatt p nemnegatív értékű. Vegyük észre, hogy egy félnorma pontosan akkor norma, ha $p(x) = 0$ csak $x = 0$ esetén teljesül. Adott $\varepsilon > 0$ és $x \in X$ esetén legyen

$$U_p(x, \varepsilon) := \{u \in X \mid p(u - x) < \varepsilon\}.$$

Ha p norma, akkor a fenti halmaz az x középpontú és ε sugarú nyílt gömböt jelenti.

Legyen adott félnormáknak egy $P = \{p_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ családja, és tekintsük az alábbi halmazcsaládokat:

$$\mathscr{B}(x) := \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\Gamma} \{U_{p_{\gamma_1}}(x, \varepsilon) \cap \cdots \cap U_{p_{\gamma_n}}(x, \varepsilon)\}.$$

Ha most $\mathscr{G}$ jelöli azokat a halmazokat, amelyek bármely x pontjukkal együtt valamely $U \in \mathscr{B}(x)$ halmazt is tartalmaznak, akkor $\mathscr{G}$ topológia X-en. Ezt a topológiát a P félnormacsalád által indukált topológiának nevezzük. Megmutatható, hogy P minden eleme folytonos a kapott topológiára nézve. A P félnormacsalád *elválasztó*, ha $x = 0$ az egyetlen olyan elem, amelyen minden félnorma eltűnik.

Egy topologikus vektorteret *lokálisan konvex*nek mondunk, ha létezik a nullvektornak konvex halmazokból álló környezetbázisa. A félnormált terek és a lokálisan konvex terek szoros kapcsolatát fejezi ki a következő eredmény: *Egy topologikus vektortér pontosan akkor lokálisan konvex, ha* *topológiáját valamely félnormacsalád származtatja. Továbbá az indukált topológia pontosan akkor Hausdorff-tulajdonságú, ha a félnormacsalád elválasztó.*

7.15. tétel. *(Tyihonov) Ha X lokálisan konvex, Hausdorff-féle topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, akkor bármely folytonos $f\colon K \to K$ leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. A lokálisan konvex Hausdorff-topológia miatt van olyan elválasztó tulajdonságú P félnormacsalád, amely épp a szóban forgó topológiát származtatja. Legyen $p \in P$ esetén $K_p := \{x \in K \mid p(f(x)-x) = 0\}$. Ekkor K_p zárt halmaz, hiszen folytonos függvény zérushelyeinek halmaza. Vagyis K_p zárt részhalmaza a kompakt K halmaznak, így maga is kompakt.

Megmutatjuk, hogy a $\{K_p \mid p \in P\}$ halmazcsalád centrált. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ tetszőleges P-beli elemek, és definiáljuk a $\varphi\colon K \times K \to \mathbb{R}$ leképezést az alábbi módon:

$$\varphi(x, y) := -\sum_{k=1}^{n} p_k(f(x) - y).$$

A félnormák továbbá f folytonossága miatt φ folytonos az első változójában. A félnormák szubadditivitását és abszolút homogenitását fölhasználva közvetlen számolással adódik, hogy φ a második változójában konkáv és így kvázikonkáv is. A Ky Fan-egyenlőtlenség szerint ekkor létezik olyan $x_0 \in K$, hogy

$$\sup_{y \in K} \varphi(x_0, y) \leq \sup_{z \in K} \varphi(z, z).$$

A félnormák nemnegativitását és φ definícióját figyelembe véve világos, hogy a bal oldali szuprémum legfeljebb nulla lehet. Így, mivel f értékkészlete K-nak részhalmaza, ezért az $y = f(x_0)$ választással kapjuk, hogy a bal oldali szuprémum pontosan nulla. Jelölje most $z_0 \in K$ azt az elemet, amivel

$$\varphi(z_0, z_0) = \sup_{z \in K} \varphi(z, z)$$

teljesül. Ilyen z_0 elem valóban létezik, hiszen φ kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor $\varphi(z_0, z_0) = 0$, azaz z_0 benne van a $K_{p_1}, \ldots, K_{p_n}$ halmazok mindegyikében. A Riesz-lemma miatt létezik a K_p halmazoknak közös w eleme. Ekkor $p(f(w) - w) = 0$ fönnáll minden $p \in P$ esetén. Mivel a család elválasztó, innen w fixponttulajdonsága adódik. $\square$

A Tyihonov-fixponttétel azonnali következményeként kaphatjuk Schauder első fixponttételét és természetesen Brouwer fixponttételét is:

7.16. következmény. *Ha X Banach-tér, $K \subseteq X$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, akkor minden folytonos $f\colon K \to K$ leképezésnek létezik fixpontja.*

7.17. következmény. *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, akkor minden folytonos $f\colon K \to K$ leképezésnek létezik fixpontja.*

Mint látni fogjuk, számos fontos alkalmazásban a vizsgált leképezések értelmezési tartománya tipikusan nem kompakt, csupán korlátos és zárt. A következő fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen további feltételek mellett állítható mégis a fixpont létezése.

7.4. A Schauder-féle fixponttétel

Egyszerű példa mutatja, hogy a korábbi fixponttételekben az értelmezési tartomány kompaktsága nem helyettesíthető korlátossággal és zártsággal. Legyen ugyanis K az ℓ_2 Hilbert-tér zárt egységgömbje, és legyen $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in B$ esetén

$$f(x) := (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

Nyilván ekkor $f\colon K \to \partial K$ teljesül. Ha $x \in K$ fixpont, akkor az $f(x) = x$ egyenletből $\sqrt{1 - \|x\|^2} = x_1$, valamint $x_n = x_{n+1}$ adódik. Azonban f a héjra képez, tehát az első összefüggésből $x_1 = 0$ következik; ám ekkor $x_n = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tehát $x = 0$, ami nem lehetséges. Tehát f fixpontmentes. Mindebből és a bevezetőben bemutatott konstrukcióból természetesen az is következik, hogy ℓ_2 zárt egységgömbjének létezik a saját határára való retrakciója.

Az értelmezési tartomány kompaktsága helyett annak zártságát és korlátosságát feltételezve, cserében a leképezés folyonosságát egy további feltétellel kiegészítve, mégis biztosítható a fixpont létezése. Elsőként ezt a többletfeltételt mutatjuk be.

Legyenek X és Y metrikus terek, $H \subseteq X$ nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f\colon H \to Y$ leképezés *kompakt*, ha folytonos és minden $K \subseteq H$ korlátos halmaz esetén $f(K)$ relatív kompakt. Megmutatható, hogy egy folytonos leképezés pontosan akkor kompakt, ha az értelmezési tartomány bármely korlátos sorozatát olyan sorozatba képezi, amelynek van konvergens részsorozata. Amennyiben Y teljes metrikus tér, úgy

f kompaktsága azzal ekvivalens, hogy minden $K \subseteq H$ korlátos halmaz esetén $f(K)$ teljesen korlátos.

Bizonyítható, hogy a kompakt leképezések halmaza zárt a kompozíció műveletére nézve. Általánosabban, folytonos és kompakt, illetve kompakt és Lipschitz-leképezések kompozíciója szintén kompakt. Amennyiben a leképezés képtere normált tér, úgy a kompakt leképezések halmaza a pontonkénti műveletekre nézve is zárt. Ebből adódóan a normált terek közti kompakt lineáris leképezések kétoldali ideált alkotnak a korlátos lineáris leképezések algebrájában.

A fejezet fő eredménye, Schauder 2. fixponttétele a Brouwer-féle fixponttételből és egy önmagában is érdekes approximációs tulajdonságból következik. Az alábbiakban *véges rangú leképezés* alatt olyan vektorértékű függvényt értünk, aminek az értékkészletét a képtér egy véges dimenziós altere tartalmazza.

7.18. tétel. *(Schauder-approximáció) Ha X és Y Banach-terek, $K \subseteq X$ nem üres, korlátos halmaz, $f\colon K \to Y$ kompakt leképezés, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $f_\varepsilon\colon X \to Y$ véges rangú, folytonos leképezés, hogy $f_\varepsilon(K) \subseteq \operatorname{conv}\big(f(K)\big)$ és minden $x \in K$ esetén*

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel az $f(K)$ halmaz relatív kompakt, ezért létezik számára véges ε-háló; vagyis léteznek $y_1, \dots, y_n \in f(K)$ elemek úgy, hogy minden $x \in K$ esetén

$$\min_{k=1,\dots,n} \|f(x) - y_k\| < \varepsilon.$$

Legyen

$$a_k(x) := \max\{0, \varepsilon - \|f(x) - y_k\|\}, \quad f_\varepsilon(x) := \frac{\sum_{k=1}^n a_k(x) y_k}{\sum_{k=1}^n a_k(x)}.$$

Világos, hogy ekkor az f_ε függvény jól definiált, hiszen nevezőjében nemnegatív tagok szerepelnek, amelyek közül legalább az egyik mindig pozitív. Az értelmezésből az is világos, hogy $f_\varepsilon\colon K \to Y$ véges rangú, folytonos függvény, valamint hogy $f_\varepsilon(K) \subseteq \operatorname{conv}\big(f(K)\big)$. Végezetül legyen $x \in K$ rögzített, és jelölje $I(x)$ az aktív $k \in \{1, \dots, n\}$ indexek halmazát, vagyis amelyekre $\|f(x) - y_k\| < \varepsilon$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy $k \notin I$

pontosan akkor, ha $a_k(x) = 0$. Így

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| &= \frac{\|\sum_{k=1}^n a_k(x)(f(x) - y_k)\|}{\sum_{k=1}^n a_k(x)} \\ &\le \frac{\sum_{k\in I(x)} a_k(x)\|f(x) - y_k\|}{\sum_{k=1}^n a_k(x)} < \frac{\sum_{k=1}^n a_k(x)\varepsilon}{\sum_{k=1}^n a_k(x)} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ami pontosan a kívánt approximációs tulajdonságot jelenti. □

7.19. tétel. *(Schauder 2. fixponttétele) Ha X Banach-tér, $K \subseteq X$ nem üres, korlátos, zárt, konvex halmaz, akkor minden $f\colon K \to K$ kompakt leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az általánosság csorbítása nélkül föltehetjük, hogy $0 \in K$. A Schauder-féle approximációs tétel miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik véges dimenziós X_n altere az X térnek, és létezik olyan $f_n\colon K \to X_n$ folytonos leképezés, hogy $f_n(K) \subseteq \operatorname{conv}\big(f(K)\big)$, és minden $x \in K$ esetén

$$\|f(x) - f_n(x)\| < \frac{1}{n}.$$

Legyen $K_n := K \cap X_n$. Ekkor K_n korlátos, zárt konvex részhalmaza X_n-nek, amely tartalmazza a nullvektort. Mivel X_n véges dimenziós, ezért a Heine–Borel-tétel szerint K_n kompakt. Másrészt $f_n(K) \subseteq \operatorname{conv}\big(f(K)\big)$ miatt $f_n\colon K_n \to K_n$ teljesül. A Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik f_n-nek fixpontja K_n-ben, amelyet jelöljön x_n. Ekkor

$$\|f(x_n) - x_n\| = \|f(x_n) - f_n(x_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Mivel $K_n \subseteq K$, ezért az (x_n) sorozat korlátos; f kompaktsága miatt az $(f(x_n))$ sorozatnak van konvergens részsorozata. Az általánosság sérelme nélkül föltehető, hogy $\big(f(x_n)\big)$ konvergens; jelölje határértékét x_0. Ekkor

$$\|x_0 - x_n\| \le \|x_0 - f(x_n)\| + \|f(x_n) - x_n\| < \|x_0 - f(x_n)\| + \frac{1}{n}.$$

Ez utóbbi kifejezés nullához tart $n \to \infty$ esetén, vagyis (x_n) konvergens és határértéke x_0. Mivel $f(x_n) \in K$ és K zárt halmaz, ezért $x_0 \in K$. Végezetül f folytonossága miatt $f(x_0) = x_0$ adódik, ami épp a bizonyítandó fixponttulajdonság. □

8. fejezet

Fixponttételek kondenzáló leképezésekre

Korábban láttuk, hogy az értelmezési tartományra szabott feltétel nem cserélhető le a korlátosság és zártság együttes teljesülésére. Az áthidaló megoldást a fixpont biztosításához a leképezésre szabott erősebb feltétel jelentette. Ebben a fejezetben azonban megmutatjuk, hogy a korábban használt kompaktsági feltétel gyengíthető.

8.1. A Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték

Legyen (X, d) metrikus tér. A $H \subseteq X$ halmaz *Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték*én az alábbi (bővített) valós számot értjük:

$$\chi(H) := \inf\Big\{\varepsilon > 0 \mid \exists n \in \mathbb{N},\, \exists x_1, \dots, x_n \in X : \, H \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U(x_k, \varepsilon)\Big\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\chi(H)$ pontosan akkor véges, ha H korlátos. Valamint $\chi(H)$ pontosan akkor nulla, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik H számára véges ε-háló, azaz hogyha H teljesen korlátos. Elsőként összefoglaljuk a nemkompaktsági mérték tulajdonságait.

8.1. tétel. *A fönti jelölések és feltételek megtartása mellett,*

(i) ha $A \subseteq B \subseteq X$, *akkor* $\chi(A) \leq \chi(B)$*;*

(ii) ha $A \subseteq X$, *akkor* $\chi(A) = \chi(\overline{A})$*;*

(iii) ha $A, B \subseteq X$, *akkor* $\chi(A \cup B) = \max\{\chi(A), \chi(B)\}$*;*

(iv) ha X teljes, úgy $\chi(H) = 0$ pontosan akkor, ha H relatív kompakt;

(v) ha X normált tér, $A, B \subseteq X$, akkor $\chi(A + B) \leq \chi(A) + \chi(B)$;

(vi) ha X normált tér, $A \subseteq X$ és $\lambda > 0$, akkor $\chi(\lambda A) = \lambda\chi(A)$;

(vii) ha X normált tér és $A \subseteq X$, akkor $\chi(A) = \chi(\mathrm{conv}(A))$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > \chi(B)$. Ekkor létezik B számára véges ε-háló, amely a tartalmazás miatt egyúttal véges ε-háló A számára. Vagyis $\varepsilon > \chi(A)$; innen pedig $\varepsilon \to \chi(B)$ határátmenettel adódik az első állítás.

Az első rész miatt elegendő csupán a $\chi(A) \geq \chi(\overline{A})$ egyenlőtlenséget igazolni. Ha $\delta > 0$ tetszőleges, akkor

$$\overline{A} \subseteq U(A, \delta) := \bigcup_{a \in A} U(a, \delta)$$

teljesül. Ha $\varepsilon > \chi(A)$, akkor létezik A számára E véges ε-háló. E halmaz azonban $(\varepsilon + \delta)$-háló $U(A, \delta)$ számára: ha $x \in U(A, \delta)$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $d(x, a) < \delta$; másrészt van olyan y eleme az ε-hálónak, hogy $d(a, y) < \varepsilon$. Így tehát $d(x, y) < \varepsilon + \delta$ teljesül a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

Azonban E véges $(\varepsilon+\delta)$-háló $\overline{A}$ számára is, tehát $\varepsilon+\delta > \chi(\overline{A})$. Innen $\delta \to 0$, majd $\varepsilon \to \chi(A)$ határátmenetekkel kapjuk a második állítást.

Elegendő csupán a $\chi(A \cup B) \leq \max\{\chi(A), \chi(B)\}$ egyenlőtlenséget igazolnunk. Ha $\varepsilon > \max\{\chi(A), \chi(B)\}$, akkor létezik véges ε-háló A számára és létezik véges ε-háló B számára. E két háló egyesítése véges ε-háló $A \cup B$ számára, amiből $\varepsilon > \chi(A \cup B)$ adódik. Innen határátmenettel kapjuk a harmadik állítást.

Tegyük fel, hogy (X, d) teljes. Ha $\chi(H) = 0$, akkor az első tulajdonság miatt $\chi(\overline{H}) = 0$, vagyis $\overline{H}$ teljesen korlátos. A teljesség miatt $\overline{H}$ szintén teljes, így Hausdorff tétele értelmében $\overline{H}$ kompakt.

Megfordítva tegyük fel, hogy H relatív kompakt. Ekkor $\overline{H}$ kompakt, speciálisan teljesen korlátos, amiből $\chi(\overline{H}) = 0$ következik. Tehát $\chi(H) = 0$.

A továbbiakban föltesszük, hogy X normált tér. Legyen $\varepsilon > \chi(A)$ és $\delta > \chi(B)$. Ekkor létezik E_A véges ε-háló A számára, és létezik E_B véges δ-háló B számára. Elegendő megmutatni, hogy

$$\{x + y \mid x \in E_A,\, y \in E_B\}$$

véges $(\varepsilon + \delta)$-háló az $A + B$ halmaz számára. Az $A + B$ halmaz minden eleme felírható $a+b$ alakban, alkalmas $a \in A$ és $b \in B$ segítségével. Tehát léteznek olyan $x \in E_A$ és $y \in E_B$ elemek, hogy $\|a-x\| < \varepsilon$ és $\|b-y\| < \delta$. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\|(a+b)-(x+y)\| \leq \|a-x\| + \|b-y\| < \varepsilon + \delta.$$

A hatodik állítás igazolásához legyen $\varepsilon > \chi(A)$. Ekkor létezik E véges ε-háló A számára; nyilvánvalóan λE véges $\lambda\varepsilon$-háló λA számára. Vagyis $\chi(\lambda A) < \lambda\varepsilon$, ahonnan $\chi(\lambda A) \leq \lambda\chi(A)$ adódik. Ebben az egyenlőtlenségben λ helyett az $1/\lambda$ választással a fordított irányú egyenlőtlenséghez jutunk.

Az utolsó állításhoz elegendő a $\chi(A) \geq \chi(\operatorname{conv}(A))$ egyenlőtlenséget igazolni. Legyen $\varepsilon > \chi(A)$ és legyen E véges ε-háló A számára. Legyen

$$K := U(0,\varepsilon) + \operatorname{conv}(E).$$

Nyilvánvalóan $A \subseteq K$, másrészt K konvex (mivel két konvex halmaz összege), ezért $\operatorname{conv}(A) \subseteq K$. Így a már igazolt ötödik tulajdonság szerint

$$\chi(\operatorname{conv}(A)) \leq \chi(K) \leq \chi(U(0,\varepsilon)) + \chi(\operatorname{conv}(E)) \leq \varepsilon,$$

hiszen E végessége miatt $\operatorname{conv}(E)$ kompakt halmaz, és ezért $\chi(\operatorname{conv}(E)) = 0$. Képezve az $\varepsilon \to \chi(A)$ határátmenetet a bizonyítandó állítást kapjuk. □

Lássuk elsőként e tétel két közvetlen alkalmazását. Az első azonnal adódik a (*iv*) és (*vii*) állításokból, ezért a bizonyítás részletezésétől eltekintünk. Meglepőbb a második alkalmazás: kiderül ugyanis, hogy a nemkompaktsági mérték tulajdonságait és Schauder 1. fixponttételét használva igen egyszerű érveléssel nyerjük Schauder 2. fixponttételét.

8.2. tétel. *(Mazur-lemma) Banach-tér relatív kompakt részhalmazának konvex burka relatív kompakt.*

8.3. tétel. *Ha X Banach-tér, $K \subseteq X$ nem üres, korlátos, zárt, konvex halmaz, akkor minden $f\colon K \to K$ kompakt leképezésnek van fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $H := \overline{\operatorname{conv}}(f(K))$. Mivel f kompakt, ezért $f(K)$ relatív kompakt; a Mazur-lemma miatt tehát H kompakt halmaz. Továbbá $f(K) \subseteq K$ miatt $H \subseteq K$ adódik, hiszen K zárt és konvex. Innen azonban közvetlenül kapjuk, hogy $f(H) \subseteq f(K)$. Összefoglalva, H nem üres, konvex, kompakt halmaz, $f\colon H \to H$ folytonos leképezés. Schauder 1. fixponttétele értelmében létezik $x_0 \in H$ fixpont, ami nyilván fixpont a K halmazban is. □

8.2. A Darbo–Szadovszkij-féle fixponttétel

Legyen X Banach-tér, D ennek nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy $f\colon D \to X$ *kondenzáló leképezés*, ha folytonos, és bármely korlátos, nem relatív kompakt $H \subseteq D$ halmaz esetén $\chi(f(H)) < \chi(H)$. Elsőként megmutatjuk, hogy kontrakció kompakt perturbáltja kondenzál, amiből speciálisan nyerjük, hogy a kompakt leképezések és a kontrakciók egyben kondenzálnak.

8.4. tétel. *(Krasznoszelszkij) Ha X normált tér, $D \subseteq X$ nem üres halmaz, $g, h\colon D \to X$ olyan leképezések, hogy g kompakt és h kontrakció, akkor a $g + h$ kondenzáló.*

Bizonyítás. Legyen $f := g + h$, jelölje $q \in]0, 1[$ a h kontrakció faktorát. Nyilván f folytonos, hiszen két folytonos leképezés összege. Tekintsünk egy $H \subseteq D$ korlátos, nem relatív kompakt halmazt. Ekkor $f(H) \subseteq g(H) + h(H)$ teljesül, így a nemkompaktsági mérték tulajdonságai miatt

$$\chi(f(H)) \le \chi(g(H)) + \chi(h(H)) \le 0 + q \cdot \chi(H) < \chi(H).$$

Vagyis f csökkenti a nemkompaktsági mértéket, tehát f kondenzáló. □

Schauder 2. fixponttételének előbb ismertetett bizonyítása nem csak az újszerű szemléletmód miatt érdekes. A gondolatmenet ügyes módosításával a kompaktság feltétele kondenzálásra cserélhető.

8.5. tétel. *(Darbo–Szadovszkij) Ha X Banach-tér, $K \subseteq X$ nem üres, korlátos, zárt, konvex halmaz, és $f\colon K \to K$ kondenzáló leképezés, akkor létezik f-nek fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $p \in K$ tetszőleges, és tekintsük az alábbi összefüggéssel definiált $T\colon 2^K \to 2^K$ leképezést:

$$T(H) := \overline{\operatorname{conv}}(\{p\} \cup f(H)).$$

Mivel T monoton, ezért a Tarski-féle fixponttétel miatt létezik $H_0 \subseteq K$ fixpontja. Figyelembe véve T definícióját H_0 nem üres, konvex, korlátos és zárt halmaz. Sőt, H_0 kompakt is: ellenkező esetben a zártság miatt nem lehet relatív kompakt sem, tehát f kondenzáló voltát és a nemkompaktsági mérték tulajdonságait fölhasználva

$$\begin{aligned}\chi(f(H_0)) < \chi(H_0) = \chi(T(H_0)) &= \chi(\overline{\operatorname{conv}}(\{p\} \cup f(H_0)))\\ &= \chi(\operatorname{conv}(\{p\} \cup f(H_0))) = \chi(\{p\} \cup f(H_0))\\ &= \max\{\chi(\{p\}), \chi(f(H_0))\} = \chi(f(H_0))\end{aligned}$$

adódik, ami ellentmondás. Mivel H_0 fixpontja T-nek, ezért $f(H_0) \subseteq H_0$ teljesül; tehát $f\colon H_0 \to H_0$. A Schauder-féle fixponttétel első változata szerint létezik f-nek fixpontja H_0-ban, amely nyilván fixpont K-ban is. $\square$

8.3. Leképezéscsaládok közös fixpontjai

Legyen X vektortér, $D \subseteq X$ nem üres, konvex halmaz. Azt mondjuk, hogy $f\colon D \to X$ *affin leképezés*, ha minden $x, y \in D$ és minden $\lambda \in [0,1]$ esetén

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

A továbbiakban két Markov–Kakutani-típusú eredményt mutatunk be. Mindkét eset affin leképezéscsaládok közös fixpontjára vonatkozik; az elsőhöz Tyihonov fixponttételét, a másodikhoz a Darbo–Szadovszkij-féle fixponttételt használjuk.

8.6. tétel. *(Markov–Kakutani–Tyihonov) Ha X lokálisan konvex Hausdorff-féle topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, akkor az $\{f_\alpha\colon K \to K \mid \alpha \in A\}$ folytonos, affin, páronként fölcserélhető leképezések családjának létezik közös fixpontja.*

Bizonyítás. Jelölje $\alpha \in A$ esetén K_α azon K-beli elemek halmazát, amelyek fixpontjai az f_α leképezésnek. A Tyihonov-féle fixponttétel miatt K_α nem üres. Másrészt K_α zárt, hiszen az $\mathrm{id} - f_\alpha$ folytonos függvény zéróhelyeinek halmaza; így kompakt is, mivel zárt részhalmaza a K kompakt halmaznak. Megmutatjuk, hogy K_α konvex. Legyenek $x, y \in K_\alpha$ tetszőlegesek és $\lambda \in [0,1]$. Ekkor fölhasználva, hogy f_α affin,

$$f_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda)f_\alpha(y) = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Vagyis x és y bármely konvex kombinációja fixpontja f_α-nak, azaz eleme K_α-nak. Végezetül igazoljuk, hogy a $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ halmazcsalád centrált. Az állítás $n = 1$ esetén a Tyihonov-féle fixponttételből adódik. Tegyük fel, hogy adott $n \in \mathbb{N}$ esetén az állítás igaz. Legyenek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ tetszőlegesek, és legyen

$$H := K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}.$$

Az indukciós feltevés értelmében H nem üres, továbbá kompakt, konvex halmazok metszete, ezért maga is kompakt, konvex halmaz. Legyen $x \in$

$f_{\alpha_0}(H)$ tetszőleges. Ekkor $x = f_{\alpha_0}(h)$ alakba írható valamilyen alkalmas $h \in H$ elemmel; fölhasználva a leképezéscsalád fölcserélhetőségét,

$$f_{\alpha_k}(x) = f_{\alpha_k}\big(f_{\alpha_0}(h)\big) = f_{\alpha_0}\big(f_{\alpha_k}(h)\big) = f_{\alpha_0}(h) = x.$$

Vagyis x fixpontja az f_{α_k} leképezésnek minden $k = 1, \dots, n$ esetén, azaz $x \in H$. Ez azt jelenti, hogy az f_{α_0} leképezés a H halmazt önmagába képzi, így a Tyihonov-féle fixponttétel miatt van $x_0 \in H$ fixpontja. Nyilván x_0 fixpontja az f_{α_k} leképezéseknek, azaz eleme a $K_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}$ metszetnek. Ezzel a centráltságot igazoltuk. A Riesz-lemma szerint $\bigcap\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ nem üres, ami pontosan azt jelenti, hogy az $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ leképezéscsaládnak van közös fixpontja. □

8.7. tétel. *(Markov–Kakutani–Darbo–Szadovszkij) Ha X Banach-tér, $K \subseteq X$ nem üres, korlátos, zárt, konvex halmaz, akkor az $\{f_\alpha\colon K \to K \mid \alpha \in A\}$ kondenzáló, affin, páronként felcserélhető leképezések családjának létezik közös fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in A$ esetén K_α azon K-beli elemek halmaza, amelyek fixpontjai az f_α leképezésnek. Az előző tétel bizonyításának mintájára igazolható (most a Tyihonov-féle fixponttétel helyett a Darbo–Szadovszkij-féle fixponttételt alkalmazva), hogy K_α nem üres, konvex, korlátos, zárt halmaz, továbbá hogy a $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ halmazcsalád centrált.

Megmutatjuk, hogy K_α kompakt minden $\alpha \in A$ esetén. Ha ugyanis nem kompakt, akkor zárt lévén relatív kompakt sem lehet. Vagyis K_α nem üres, korlátos, nem relatív kompakt halmaz. Mivel f_α kondenzáló és $f_\alpha(K_\alpha) = K_\alpha$, ezért

$$\chi\big(f_\alpha(K_\alpha)\big) < \chi(K_\alpha) = \chi\big(f_\alpha(K_\alpha)\big).$$

A kapott ellentmondás miatt K_α kompakt, és így $\bigcap\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ nem üres a Riesz-lemma szerint. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy a szóban forgó leképezéscsaládnak van közös fixpontja. □

9. fejezet

Alkalmazások

Az eddig bemutatott eredmények hatékonyságát öt terület, nevezetesen: a klasszikus analízis, a játékelmélet, a közönséges differenciálegyenletek elmélete, a funkcionálanalízis és a mértékelmélet egy-egy alapvető tételével illusztráljuk. Az inverzfüggvénytétel egy általánosításához Brouwer fixponttételét, Neumann és Nash eredményeinek igazolásához a Ky Fan-egyenlőtlenséget, Peano és Lomonoszov tételeihez pedig Schauder második fixponttételét használjuk. Végezetül a Haar-féle mértékkonstrukciót az affin leképezéscsaládok fixponttulajdonsága segítségével bizonyítjuk.

9.1. Egy jobbinverzfüggvény-tétel

Az alábbi tételben egy függvény lokális jobbinverzének létezését állíthatjuk a függvénynek adott pontbeli Fréchet-differenciálhatósága és a derivált lineáris jobbinverzének létezése esetén.

9.1. tétel. *Legyenek X, Y normált terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$, és tegyük fel, hogy Y véges dimenziós. Legyen $f\colon D \to Y$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $A\colon X \to Y$ és $B\colon Y \to X$ lineáris leképezések, hogy B korlátos, $A \circ B = \mathrm{id}_Y$ és*

$$\alpha := \limsup_{x \to p} \frac{\|f(x) - f(p) - A(x-p)\|}{\|x-p\|} < \frac{1}{\|B\|}.$$

Ekkor létezik $q := f(p)$-nek olyan $V \subseteq X$ környezete és f-nek egy olyan $g\colon V \to D$ jobbinverze, hogy $g(q) = p$ és

$$\limsup_{y \to q} \frac{\|g(y) - g(q) - B(y-q)\|}{\|y-q\|} \leq \frac{\alpha\|B\|^2}{1-\alpha\|B\|}.$$

Bizonyítás. Mivel Y véges dimenziós, ezért A korlátos. Legyen

$$E := B^{-1}(D-p), \qquad \text{és } y \in E \text{ esetén} \qquad F(y) := f(By+p)-q.$$

Ekkor E az Y tér zérusvektorának egy környezete, és $F(0)=0$. Továbbá a tétel $\alpha\|B\|<1$ feltétele szerint

$$\begin{aligned}
\beta :=& \limsup_{y\to 0} \frac{\|F(y)-y\|}{\|y\|} = \limsup_{y\to 0} \frac{\|f(By+p)-q-y\|}{\|y\|}\\
=& \limsup_{y\to 0,\, By\neq 0} \frac{\|f(By+p)-f(p)-A((By+p)-p)\|}{\|(By+p)-p\|}\cdot\frac{\|By\|}{\|y\|}\\
\leq& \|B\|\cdot \limsup_{x\to p} \frac{\|(f(x)-f(p)-A(x-p)\|}{\|x-p\|} = \|B\|\alpha < 1,
\end{aligned}$$

amiből $\beta \leq \alpha\|B\| < 1$ is következik. Értelmezzük most a $T\colon E\to Y$ leképezést a

$$T(y) := y - F(y)$$

képlettel. Az alábbiakban először azt fogjuk megmutatni, hogy „kis” v esetén a $T(y+v)=T(y)$ egyenletnek létezik a 0 ponthoz közeli y megoldása.

Válasszuk az $r>0$ számot úgy, hogy az Y tér $\overline{U}(0,r)$ zárt gömbje része legyen E-nek. Legyen továbbá $\varepsilon\in\,]0,r]$ esetén

$$b(\varepsilon) := \sup_{0<\|y\|\leq\varepsilon} \frac{\|F(y)-y\|}{\|y\|}.$$

Ekkor $b\colon\ ]0,r]\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ monoton növő és $\lim_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon)=\beta$. Ezért az imént igazolt $\beta<1$ egyenlőtlenség miatt van olyan $\varepsilon_0\in\,]0,r]$, hogy $b(\varepsilon)<1$, ha $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0]$. Legyen

$$\delta_0 := \frac{1}{1-b(\varepsilon_0)} > 0, \quad \text{valamint} \quad 0<t\leq\frac{\varepsilon_0}{\delta_0} \quad \text{esetén} \quad r(t) := \frac{tb(\delta_0 t)}{1-b(\delta_0 t)}.$$

A fenti választások és jelölések mellett megmutatjuk, hogy $0<\|v\|\leq\frac{\varepsilon_0}{\delta_0}$ esetén

$$T\big(\overline{U}(v,r(\|v\|))\big) \subseteq \overline{U}(0,r(\|v\|)).$$

Legyen $v\in Y$ olyan, hogy $0<\|v\|\leq\frac{\varepsilon_0}{\delta_0}$. Ekkor a b függvény monotonitását is kihasználva $y\in\overline{U}(v,r(\|v\|))$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|y\| &\leq \|y-v\|+\|v\| \leq r(\|v\|)+\|v\|\\
&= \frac{\|v\|b(\delta_0\|v\|)}{1-b(\delta_0\|v\|)}+\|v\| = \frac{\|v\|}{1-b(\delta_0\|v\|)} \leq \frac{\|v\|}{1-b(\varepsilon_0)} = \delta_0\|v\|.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\|T(y)\| = \|y - F(y)\| \le b(\|y\|)\|y\| \le b(\delta_0\|v\|)\frac{\|v\|}{1 - b(\delta_0\|v\|)} = r(\|v\|).$$

Tehát $T(y) \in \overline{U}(0, r(\|v\|))$, és pontosan ezt akartuk igazolni.

A fönti tartalmazás azt mutatja, hogy $0 < \|v\| \le \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}$ esetén a $T_v(y) = T(y+v)$ képlettel értelmezett T_v leképezés az $\overline{U}(0, r(\|v\|))$ kompakt konvex halmazt saját magába képezi le. Így a Brouwer-féle fixponttétel szerint van olyan $y \in \overline{U}(0, r(\|v\|))$, hogy $T_v(y) = T(y)$, azaz $T(y+v) = T(y)$. Jelöljük ezt a megoldást $y(v)$-vel. Legyen továbbá $y(0) := 0$. Értelmezzük a $G\colon \overline{U}\left(0, \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}\right) \to Y$ leképezést a $G(v) := y(v) + v$ képlettel. Ekkor $G(0) = 0$ és

$$F(G(v)) = F(y(v)+v) = y(v) + v - T(y(v)+v) = y(v) + v - y(v) = v,$$

tehát G jobbinverze F-nek. Ha $y \in \overline{U}\left(q, \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}\right)$ esetén $g(y) := B(G(y - q)) + p$, akkor nyilván $g(q) = p$. Továbbá F értelmezése miatt, valamint amiatt, hogy G jobbinverze F-nek,

$$f(g(y)) = f(B(G(y-q)) + p) = F(G(y-q)) + q = (y-q) + q = y,$$

adódik minden $y \in \overline{U}\left(q, \frac{\varepsilon_0}{\delta_0}\right)$ esetén. Tehát g jobbinverze f-nek.

Végezetül $\|y\| \le r(\|v\|)$ miatt

$$\begin{aligned}\limsup_{v\to 0} \frac{\|G(v) - v\|}{\|v\|} &= \limsup_{v\to 0} \frac{\|y(v)\|}{\|v\|} \\ &\le \limsup_{v\to 0} \frac{r(\|v\|)}{\|v\|} = \limsup_{v\to 0} \frac{b(\delta_0\|v\|)}{1 - b(\delta_0\|v\|)} = \frac{\beta}{1-\beta}.\end{aligned}$$

Ezért és a már igazolt $\beta \le \alpha\|B\|$ egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\limsup_{y\to q} \frac{\|g(y) - g(q) - B(y-q)\|}{\|y-q\|} &= \limsup_{y\to q} \frac{\|B(G(y-q)) - B(y-q)\|}{\|y-q\|} \\ &\le \|B\| \limsup_{y\to q} \frac{\|G(y-q) - (y-q)\|}{\|y-q\|} \le \frac{\|B\|\beta}{1-\beta} \le \frac{\alpha\|B\|^2}{1-\alpha\|B\|}.\end{aligned}$$

Tehát a tételbeli egyenlőtlenség is teljesül. □

A fenti bizonyítás lépéseinek átgondolásával látható, hogy az állítás a végtelen dimenziós képtérre is kiterjeszthető, ha az Banach-tér, és a $T\colon E \to Y$ leképezés kondenzál. Ekkor a $T(y+v) = T(y)$ egyenlet megoldásának a létezését a Brouwer-féle fixponttétel helyett a Darbo–Szadovszkij-tétel segítségével lehet megmutatni. A tétel az $\alpha = 0$ speciális esetben az alábbi eredményt adja:

9.2. következmény. *Legyenek X, Y normált terek, $D \subseteq X$ nyílt halmaz, $p \in D$ és tegyük fel, hogy Y véges dimenziós. Legyen $f\colon D \to Y$ olyan folytonos függvény, amely a p pontban Fréchet-differenciálható. Ha létezik $A = f'(p)$-nek $B\colon Y \to X$ korlátos lineáris jobbinverze, akkor létezik $q := f(p)$-nek olyan $V \subseteq X$ környezete és f-nek egy olyan $g\colon V \to D$ jobbinverze, amely Fréchet-differenciálható a q pontban, $g(q) = p$ és $g'(q) = B$.*

9.2. Neumann és Nash tételei

Adott két játékos, A és B az $\mathscr{A}$ és $\mathscr{B}$ stratégiahalmazokkal. Jelölje $\varphi\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ az A játékos kifizetőfüggvényét, vagyis legyen $\varphi(a, b)$ az A játékos előjeles nyeresége (és egyben a B előjeles vesztesége), ha A és B az $a \in \mathscr{A}$, illetve $b \in \mathscr{B}$ stratégiát választja. Ekkor az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ hármast *kétszemélyes zérusösszegű játék*nak nevezzük. Azt mondjuk, hogy (a_0, b_0) *nyeregpontja* az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ játéknak, ha

$$\varphi(a, b_0) \le \varphi(a_0, b_0) \le \varphi(a_0, b)$$

teljesül minden $a \in \mathscr{A}$ és $b \in \mathscr{B}$ választás mellett. Ha az $\mathscr{A}$ és $\mathscr{B}$ stratégiahalmazok végesek, akkor *véges játék*ról beszélünk. Az első tételben a nyeregpont néhány elemi tulajdonságát ismertetjük.

9.3. tétel. *Ha (a_0, b_0) és (x_0, y_0) nyeregpontjai az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ zérusösszegű játéknak, akkor szükségképpen $\varphi(a_0, b_0) = \varphi(x_0, y_0)$ teljesül. Az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ véges zérusösszegű játéknak pontosan akkor létezik nyeregpontja, ha*

$$\min_{b \in \mathscr{B}} \max_{a \in \mathscr{A}} \varphi(a, b) = \max_{a \in \mathscr{A}} \min_{b \in \mathscr{B}} \varphi(a, b).$$

Bizonyítás. Mivel (a_0, b_0) nyeregpont, ezért $\varphi(a_0, b_0) \le \varphi(a_0, y_0)$ teljesül; azonban mivel (x_0, y_0) szintén nyeregpont, $\varphi(a_0, y_0) \le \varphi(x_0, y_0)$ fennáll. Hasonlóan, az (x_0, y_0) nyeregpont-tulajdonságából kapjuk, hogy ez utóbbi függvényérték nem nagyobb, mint a $\varphi(x_0, b_0)$ érték. Ám ekkor szükségképp $\varphi(x_0, b_0) \le \varphi(a_0, b_0)$ adódik, lévén (a_0, b_0) nyeregpont.

A második állítás bizonyításához elsőként tegyük fel, hogy (a_0, b_0) nyeregpont. Vegyük figyelembe, hogy ekkor fönnáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned}\alpha := \min_{b \in \mathscr{B}} \max_{a \in \mathscr{A}} \varphi(a, b) &\le \max_{a \in \mathscr{A}} \varphi(a, b_0) \le \varphi(a_0, b_0) \\ &\le \min_{b \in \mathscr{B}} \varphi(a_0, b) \le \max_{a \in \mathscr{A}} \min_{b \in \mathscr{B}} \varphi(a, b) =: \beta.\end{aligned}$$

Mivel a stratégiahalmazok véges halmazok, ezért léteznek $a^* \in \mathscr{A}$ és $b^* \in \mathscr{B}$ elemek úgy, hogy

$$\alpha = \max_{a \in \mathscr{A}} \varphi(a, b^*), \qquad \beta = \min_{b \in \mathscr{B}} \varphi(a^*, b).$$

Azonban ekkor $\varphi(a^*, b^*) \leq \alpha \leq \beta \leq \varphi(a^*, b^*)$, amiből $\alpha = \beta$ következik. Megfordítva és az előző jelölések megtartása mellett tegyük fel, hogy $\alpha = \beta$. Az α és β definíciója miatt elegendő azt igazolni, hogy α és β közös értéke megegyezik a $\varphi(a^*, b^*)$ értékkel. Ez azonban adódik az $\beta \leq \varphi(a^*, b^*) \leq \alpha$ egyenlőtlenségből. $\square$

Természetesen előfordulhat, hogy az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ véges játéknak nincs nyeregpontja. Tekintsük ekkor az ebből származtatott úgynevezett *kevert játék*ot, azaz legyen $\mathscr{A}^*$, illetve $\mathscr{B}^*$ az $\mathscr{A}$, illetve $\mathscr{B}$ halmazon adott valószínűségi mértékek halmaza, és legyen $\varphi^* \colon \mathscr{A}^* \times \mathscr{B}^* \to \mathbb{R}$ a következő módon adott függvény:

$$\varphi^*(\mu, \nu) := \int_{\mathscr{A}} \int_{\mathscr{B}} \varphi(a, b) d\nu(b) d\mu(a).$$

Neumann János eredménye szerint az $(\mathscr{A}^*, \mathscr{B}^*, \varphi^*)$ kétszemélyes kevert játéknak létezik nyeregpontja. Ennél kicsit általánosabb eredményt fogalmazunk meg:

9.4. tétel. *Ha X, Y Hausdorff-topologikus vektorterek, $\mathscr{A} \subseteq X$ és $\mathscr{B} \subseteq Y$ nem üres, kompakt, konvex halmazok, továbbá $\varphi \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ első változójában felülről félig folytonos és konvex, második változójában alulról félig folytonos és konkáv függvény, akkor az $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \varphi)$ játéknak létezik nyeregpontja.*

Bizonyítás. Legyen $K := \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Ekkor K az $X \times Y$ szorzattérben nem üres, kompakt, konvex halmaz. Legyen továbbá $\Phi \colon K \times K \to \mathbb{R}$ az alábbi módon adott függvény:

$$\Phi\big((a, b), (c, d)\big) := -\varphi(a, d) + \varphi(c, b).$$

Világos, hogy φ tulajdonságaiból adódóan Φ az első változójában alulról félig folytonos, a másodikban pedig (kvázi)konkáv függvény. A Ky Fan-egyenlőtlenség szerint létezik olyan $(a_0, b_0) \in K$ elem, hogy

$$\sup_{(c,d) \in K} \Phi\big((a_0, b_0), (c, d)\big) \leq \sup_{(a,b) \in K} \Phi\big((a, b), (a, b)\big) = 0.$$

Így Φ értelmezése miatt $\varphi(c, b_0) \leq \varphi(a_0, d)$ teljesül minden $(c, d) \in K$ esetén. Innen a $c = a_0$, majd a $d = b_0$ speciális választásokkal kapjuk, hogy (a_0, b_0) a játék nyeregpontja. $\square$

A továbbiakban a többszemélyes játékok Nash-féle elméletét ismertetjük röviden. Legyenek $A_1, \dots, A_n$ játékosok. Jelölje $\mathscr{A}_k$, illetve $\varphi_k \colon \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n \to \mathbb{R}$ a k-adik játékos stratégiahalmazát, illetve kifizetőfüggvényét.

Az $(a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$ pontot az n-személyes játék *Nash-féle egyensúlypont*jának mondjuk, ha minden $k \in \{1, \dots, n\}$ és minden $x_k \in \mathscr{A}_k$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_1(a_1, \dots, a_n) &\geq \varphi_1(x_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n), \\
\varphi_2(a_1, \dots, a_n) &\geq \varphi_2(a_1, x_2, \dots, a_{n-1}, a_n), \\
&\vdots \\
\varphi_n(a_1, \dots, a_n) &\geq \varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

teljesül. A rövidség kedvéért a továbbiakban $(\mathscr{A}, \varphi)$ többszemélyes játékról szólunk, ha adottak a játékosok stratégiahalmazai, valamint kifizetőfüggvényei. Ezek után megfogalmazhatjuk azt az eredményt, amivel John Nash kiérdemelte az 1994. évi közgazdasági Nobel-díjat.

9.5. tétel. *(Nash) Ha minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén X_k Hausdorff-topologikus vektortér, $\mathscr{A}_k \subseteq X_k$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $\varphi_k \colon \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n \to \mathbb{R}$ folytonos és a k-adik változójában konkáv, akkor az $(\mathscr{A}, \varphi)$ játéknak létezik Nash-féle egyensúlypontja.*

Bizonyítás. Legyen $K := \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$. Ekkor a szorzattérben K nem üres, konvex, kompakt halmaz. Értelmezzük a $\Phi \colon K \times K \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
\Phi\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) :=& \\
&\varphi_1(y_1, x_2 \dots, x_{n-1}, x_n) - \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&+\varphi_2(x_1, y_2 \dots, x_{n-1}, x_n) - \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&\vdots \\
&+\varphi_n(x_1, x_2 \dots, x_{n-1}, y_n) - \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Világos, hogy Φ az első változójában folytonos, a másodikban pedig konkáv függvény, így a Ky Fan-egyenlőtlenség szerint van olyan $(a_1, \dots, a_n) \in K$ elem, hogy

$$\begin{aligned}
\sup_{(y_1,\dots,y_n)\in K} & \Phi\big((a_1, \dots, a_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \\
&\leq \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in K} \Phi\big((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Így az $a = (a_1, \dots, a_n)$ jelöléssel élve $\Phi(a, y) \leq 0$ teljesül minden $y = (y_1, \dots, y_n) \in K$ esetén. Speciálisan, ha $y_k \in \mathscr{A}_k$ rögzített, akkor $k \neq j$ esetén $y_j = a_j$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $(a_1, \dots, a_n)$ Nash-féle egyensúlypont. $\square$

9.3. Peano egzisztenciatétele

A továbbiakban legyen I kompakt intervallum. Az I intervallumon értelmezett, $\mathbb{R}^m$-beli értékű függvények valamely $\mathscr{F}$ családját a $t \in I$ pontban *egyformán folytonos*nak mondjuk, ha minden $\varepsilon > 0$ és minden $x \in \mathscr{F}$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$ teljesül, ha $s \in U(t, \delta)$. Az $\mathscr{F}$ családot egyformán folytonosnak nevezzük, ha I minden pontjában egyformán folytonos. Világos, hogy egy egyetlen függvényből álló $\mathscr{F}$ halmaz adott pontbeli, illetve I-n vett egyformán folytonossága a szóban forgó függvény adott pontbeli, illetve I-n vett folytonosságát jelenti.

Az $\mathscr{F}$ családot a $t \in I$ pontban *egyformán korlátos*nak nevezzük, ha van olyan $M > 0$, hogy minden $x \in \mathscr{F}$ esetén $|x(t)| \leq M$ teljesül. Az $\mathscr{F}$ családot az I intervallumon egyformán korlátosnak mondjuk, ha I minden pontjában egyformán korlátos.

Az alábbiakban szükséges és elegendő feltételt adunk arra nézve, hogy az $\mathscr{F}$ függvénycsalád teljesen korlátos legyen a szuprémumnormával ellátott $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ térben. Ezt az eredményt Arzelà és Ascoli tétele fogalmazza meg.

9.6. tétel. *(Arzelà–Ascoli) Ha I kompakt intervallum, úgy az $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ függvénycsalád pontosan akkor teljesen korlátos, ha egyformán folytonos és egyformán korlátos.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathscr{F}$ teljesen korlátos. Ekkor korlátos is, és ezért pontonként egyformán korlátos. Legyen $t \in I$ rögzített és legyen $\varepsilon > 0$. A feltevés miatt létezik $\mathscr{F}$ számára $E \subseteq \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ véges $\frac{\varepsilon}{3}$-háló. Mivel E tagjai folytonosak, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $s \in U(t, \delta)$ esetén $|y(s) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ teljesül minden $y \in E$ elemre. Legyen $x \in \mathscr{F}$ tetszőleges és $y \in E$ olyan, hogy $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ha most $s \in U(t, \delta)$, akkor

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - y(s)| + |y(s) - y(t)| + |y(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

ami az $\mathscr{F}$ egyformán folytonosságát mutatja a t pontban.

Most tegyük fel, hogy $\mathscr{F}$ egyformán folytonos és egyformán korlátos, s legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az egyformán folytonosság miatt minden $t \in I$

esetén van olyan $\delta_t > 0$, hogy $|x(s) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{4}$ ha $s \in U(t, \delta_t)$ és $x \in \mathscr{F}$. Mivel I kompakt, létezik olyan véges $t_1, \ldots, t_n \in I$ pontrendszer, hogy $\{U(t_i, \delta_{t_i})\}_{i=1}^{n}$ az I lefedése.

Az egyformán korlátosság miatt $\mathscr{F}(t_i) = \{x(t_i) \mid x \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ korlátos halmaz minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ezért teljesen korlátos is, hiszen véges dimenzióban e két fogalom ekvivalens. Így minden i indexhez van olyan véges $y_{i,1}, \ldots, y_{i,k_i} \in \mathbb{R}^m$ elemrendszer, ami $\frac{\varepsilon}{4}$-háló $\mathscr{F}(t_i)$ számára.

Legyen J az olyan $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \{1, \ldots, k_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, k_n\}$ multiindexek halmaza, amelyekhez van olyan $x_j \in \mathscr{F}$ függvény, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$|x_j(t_i) - y_{i,j_i}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor $\{x_j \mid j \in J\}$ egy véges ε-háló $\mathscr{F}$ számára. Ha $x \in \mathscr{F}$ tetszőleges, akkor minden i index esetén van olyan $j_i \in \{1, \ldots, k_i\}$ index, hogy $|x(t_i) - y_{i,j_i}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nyilvánvalóan $j = (j_1, \ldots, j_n) \in J$, s ezért

$$|x(t_i) - x_j(t_i)| \leq |x(t_i) - y_{i,j_i}| + |y_{i,j_i} - x_j(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $s \in I$ tetszőleges, és $i \in \{1, \ldots, n\}$ olyan, hogy $s \in U(t_i, \delta_{t_i})$. Ekkor

$$|x(s) - x_j(s)| \leq |x(s) - x(t_i)| + |x(t_i) - x_j(t_i)| + |x_j(t_i) - x_j(s)| < \varepsilon.$$

Tehát $x \in U(x_j, \varepsilon)$, és pontosan ezt kellett igazolni. □

Megjegyezzük, hogy a tétel állítása akkor is érvényes, ha az I kompakt intervallumot kompakt metrikus térre cseréljük. A bizonyítás minden lépése ugyanaz marad. Hasznosnak bizonyul majd az Arzelà–Ascoli-tétel következő változata.

9.7. következmény. *Ha I kompakt intervallum, úgy az $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ függvénycsalád pontosan akkor relatív kompakt, ha egyformán folytonos és egyformán korlátos.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{F}$ relatív kompakt, akkor lezártja teljesen korlátos a Hausdorff-tétel értelmében. Ezért az Arzelà–Ascoli-tétel szerint egyformán folytonos és egyformán korlátos; ám ekkor $\mathscr{F}$ is az. Megfordítva, ha $\mathscr{F}$ egyformán folytonos és egyformán korlátos, akkor teljesen korlátos. Így $\overline{\mathscr{F}}$ is teljesen korlátos, és mivel zárt részhalmaza a $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^m)$ Banach-térnek, ezért teljes. Hausdorff kompaktsági tétele miatt tehát $\overline{\mathscr{F}}$ kompakt. □

9.8. tétel. *(Peano) Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $\tau \in I$ és $\xi \in \mathbb{R}^m$ rögzített elemek, valamint $f\colon I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor az*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(\tau) = \xi$$

Cauchy-feladatnak létezik τ valamely környezetében értelmezett megoldása.

Bizonyítás. Az általánosság sérelme nélkül föltehető, hogy I balról zárt, és τ ennek bal végpontja. Legyen $\alpha \in I$ olyan, hogy $\tau < \alpha$, s legyen $\rho > 0$ tetszőleges. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} H &:= \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^m \mid t \in [\tau, \alpha], |x - \xi| \le \rho\}; \\ M &:= \sup_H |f|, \qquad \delta := \min\Big\{\alpha - \tau, \frac{\rho}{M}\Big\}; \\ K &:= \{x \in \mathscr{C}([\tau, \tau + \delta], \mathbb{R}^m) \mid \|x - \xi\| \le \rho\}. \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy K nem üres, hiszen az $x \equiv \xi$ leképezést tartalmazza. Ha (x_n) tetszőleges K-beli sorozat, amely tart valamely $x\colon [\tau, \tau+\delta] \to \mathbb{R}^m$ függvényhez, akkor az egyenletes konvergencia miatt x folytonos. Az $|x_n(t) - \xi| \le \rho$ egyenlőtlenségben határátmenetet, majd szuprémumot képezve $[\tau, \tau + \delta]$ fölött $\|x - \xi\| \le \rho$ adódik, ami K zártságát mutatja. Sőt, K konvex: ha ugyanis $x, y \in K$ és $\lambda \in [0, 1]$, akkor a $\xi = \lambda\xi + (1-\lambda)\xi$ felbontás miatt

$$|\lambda x(t) + (1 - \lambda)y(t) - \xi| \le \lambda|x(t) - \xi| + (1 - \lambda)|y(t) - \xi| \le \rho.$$

Végezetül K korlátos, ami azonnal következik az $\|x\| \le \|x - \xi\| + \|\xi\|$ egyenlőtlenségből. Összefoglalva: K nem üres, korlátos, zárt és konvex részhalmaza a $\mathscr{C}([\tau, \tau + \delta], \mathbb{R}^m)$ Banach-térnek.

Legyen $x \in K$ és $t \in [\tau, \tau + \delta]$ esetén

$$(Tx)(t) := \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))ds.$$

Ekkor

$$|(Tx)(t) - \xi| \le \int_\tau^t |f(s, x(s))|ds \le M(t - \tau) \le M\delta \le \rho,$$

ami azt jelenti, hogy $T(K) \subseteq K$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel H kompakt, f pedig folytonos, ezért f egyenletesen folytonos a H halmazon;

létezik tehát $\eta > 0$ úgy, hogy $|(t_1, x_1) - (t_2, x_2)| \leq \eta$ esetén $|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \leq \varepsilon/\delta$ teljesül. Ekkor

$$|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \leq \int_\tau^t |f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))| ds \leq \frac{\varepsilon}{\delta}(\alpha - \tau) \leq \varepsilon.$$

Vagyis $T\colon K \to K$ (egyenletesen) folytonos. Nyilván $T(K)$ korlátos, hiszen része a korlátos K halmaznak. Speciálisan, $T(K)$ egyformán korlátos függvényekből áll. Másrészt

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))| ds \right| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Ez mutatja, hogy $T(K)$ ekvi-Lipschitz függvénycsalád, tehát egyformán folytonos is. Az Arzelà–Ascoli-tétel következménye szerint $T(K)$ relatív kompakt. Így $T\colon K \to K$ kompakt leképezés.

A Schauder-féle fixponttétel értelmében létezik T-nek fixpontja K-ban, ami nem más, mint az eredeti Cauchy-feladattal ekvivalens integrálegyenlet megoldása. □

9.4. Lomonoszov tétele az invariáns alterekről

Legyen X legalább kétdimenziós komplex Banach-tér és $A\colon X \to X$ lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy az $Y \subseteq X$ altér *invariáns altere* A-nak, ha $A(Y) \subseteq Y$. Milyen feltételek mellett állíthatjuk, hogy A rendelkezik valódi zárt invariáns altérrel? E kérdéssel kapcsolatban számos alapvető eredmény született.

Jól ismert, hogy unitér terek minden lineáris operátora ilyen tulajdonságú. A Hilbert-terek kompakt operátoraira vonatkozó pozitív válasz Neumann nevéhez fűződik. Érdemes megemlíteni, hogy ennek önadjungált speciális esetére Riesz adott szép, geometriai szemléletű bizonyítást. Aronszajn és Smith 1954-ben megmutatták, hogy Neumann eredménye Banach-terekben is igaz. Bernstein és Robinson 1966-ban a kompaktsági feltételt tovább gyengítve az invariáns altér létezését olyan leképezések esetén igazolták, melyeknek valamilyen polinomja kompakt. Módszerükben a nemstandard analízis eszköztára jutott kulcsszerephez. Halmos ugyanebben az évben ugyanerre az eredményre egyszerűbb, standard bizonyítást talált.

Az eddig ismert legelegánsabb eredményt e problémakörben Lomonoszov érte el 1973-ban. Tételéből azonnal adódik, hogy ha egy komplex Banach-tér valamely korlátos lineáris operátora fölcserélhető egy nem nulla kompakt operátorral, akkor létezik valódi zárt invariáns altere. Speciálisan, komplex Banach-tér minden (polinomiálisan) kompakt operátorának létezik valódi zárt invariáns altere.

9.9. tétel. *(Lomonoszov) Ha A az X végtelen dimenziós komplex Banach-tér nem nulla kompakt lineáris operátora, akkor van X-nek olyan valódi zárt altere, amely minden, az A-val felcserélhető korlátos lineáris operátornak invariáns altere.*

Bizonyítás. Mivel A nem nulla, így van olyan $x_0 \in X$, hogy $Ax_0 \neq 0$; A folytonossága miatt pedig van olyan $S = \overline{U}(x_0, \varepsilon)$ zárt gömb, hogy $0 \notin \overline{A(S)}$. A linearitás miatt x_0 megfelelő nyújtásával elérhető, hogy $\varepsilon = 1$ legyen.

Jelölje $\mathscr{A}$ az A-val felcserélhető összes $\mathscr{B}(X)$-beli operátor algebráját. Legyen $T \in \mathscr{A}$ esetén

$$U(T) := T^{-1}(S^\circ) = \{y \in X \mid \|Ty - x_0\| < 1\}.$$

Mivel T folytonos, ezért $U(T)$ nyílt. Az alábbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a $\mathscr{T} := \{U(T) \mid T \in \mathscr{A}\}$ nyílt halmazcsalád lefedi-e az $X \setminus \{0\}$ halmazt, vagy nem.

Először tegyük fel, hogy van olyan nem nulla y_0 elem, hogy $y_0 \notin U(T)$, azaz $T(y_0) \notin S$ semmilyen $T \in \mathscr{A}$ esetén. Legyen

$$\mathscr{H} := \overline{\{Ty_0 \mid T \in \mathscr{A}\}}.$$

A konstrukcióból adódik, hogy $\mathscr{H}$ egy $\mathscr{A}$-invariáns zárt altér. Másrészt $y_0 \in \mathscr{H}$, hiszen $\mathrm{id} \in \mathscr{A}$, és ugyanakkor $x_0 \notin \mathscr{H}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{H}$ valódi altér, tehát a tétel állítása az első esetben teljesül.

Tegyük most fel, hogy a $\mathscr{T}$ család lefedi az $X \setminus \{0\}$ halmazt, és tekintsük az $\overline{A(S)}$ halmazt. Mivel ez kompakt és a feltétel szerint része az $X \setminus \{0\}$ halmaznak, ezért léteznek olyan $T_1, \dots, T_n \in \mathscr{A}$ operátorok, hogy

$$\overline{A(S)} \subseteq U(T_1) \cup \dots \cup U(T_n).$$

A következő lépésben $T_1, \dots, T_n$ segítségével egy Schauder-típusú operátort konstruálunk. Legyen $y \neq 0$ esetén

$$a_k(y) := \max\{0, 1 - \|T_k y - x_0\|\}.$$

Ekkor $a_k \colon X \setminus \{0\} \to [0, 1]$ folytonos leképezés; továbbá minden $y \in \overline{A(S)}$ esetén van olyan $k \in \{1, \dots, n\}$ index, hogy $a_k(y) > 0$. E tulajdonság miatt a

$$\Psi \colon S \to X, \quad \Psi(x) := \frac{\sum_{k=1}^n a_k(Ax) T_k Ax}{\sum_{k=1}^n a_k(Ax)}$$

módon értelmezett leképezés jól definiált. Jelölje $I(x)$ az aktív indexek halmazát. Azaz $k \in I(x)$ pontosan akkor, ha $a_k(Ax) \neq 0$; vagy ezzel ekvivalens módon, ha $\|T_k Ax - x_0\| < 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|\Psi(x) - x_0\| &= \frac{\|\sum_{k=1}^{n} a_k(Ax)(T_k Ax - x_0)\|}{\sum_{k=1}^{n} a_k(Ax)} \\ &\leq \frac{\sum_{k\in I(x)} a_k(Ax)\|T_k Ax - x_0\|}{\sum_{k\in I(x)} a_k(Ax)} < 1,\end{aligned}$$

tehát $\Psi\colon S \to S$. Sőt, az is megmutatható, hogy Ψ kompakt leképezés. Mivel S nem üres, zárt, korlátos, konvex halmaz, ezért Schauder 2. fixponttétele szerint létezik Ψ-nek $z_0 \in S$ fixpontja. Legyen ezek után

$$T(x) := \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k(Az_0) T_k Ax}{\sum_{k=1}^{n} a_k(Az_0)}.$$

Ekkor $T \in \mathscr{A}$ kompakt, és $Tz_0 = \Psi(z_0) = z_0$. Legyen $\mathscr{M} := \{z \in X \mid Tz = z\}$. Nyilván $\mathscr{M}$ altér, és $\mathscr{M} \neq \{0\}$, hiszen $z_0 \neq 0$ eleme. Mivel $T|_{\mathscr{M}}$ identitás, másrészt $T|_{\mathscr{M}}$ kompakt is, ezért $\mathscr{M}$ szükségképpen véges dimenziós. Vegyük észre, hogy $x \in \mathscr{M}$ esetén $TAx = ATx = Ax$, azaz $A\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$. Így az $A|_{\mathscr{M}}$ lineáris leképezésnek van λ komplex sajátértéke, ami természetesen magának A-nak is sajátértéke. Tekintsük az ehhez tartozó L_λ sajátalteret. Ha $L_\lambda = X$, akkor $A = \lambda\mathrm{id}$, ami ellentmond annak, hogy A nem nulla és kompakt. Vagyis L_λ valódi altér, ami az A folytonossága miatt zárt is. Legyen $x \in L_\lambda$ és $T \in \mathscr{A}$. Ekkor $ATx = TAx = T\lambda x = \lambda Tx$, amiből $Tx \in L_\lambda$ adódik. Tehát L_λ invariáns az $\mathscr{A}$ algebrára nézve. □

Mint ahogy azt Per Enflo 1976-ban konstruált példája mutatja, létezik olyan Banach-tér, melyben bármely korlátos, de nem kompakt lineáris operátor csak triviális sajátaltérrel rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy a Lomonoszov-tétel kompaktsági feltétele valóban szükséges.

Azonban teljesen másként viselkednek ilyen szempontból a nem szeparábilis Hilbert-terek. Ha ugyanis X nem szeparábilis Hilbert-tér, akkor minden nem nulla A lineáris operátornak létezik valódi invariáns altere. Valóban: legyen x_0 olyan, hogy $Ax_0 \neq 0$, valamint legyen

$$\mathscr{H} := \overline{\mathrm{lin}\{A^n x_0 \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}}.$$

Ekkor $\mathscr{H} \neq \{0\}$, és mivel X nem szeparábilis, $\mathscr{H} \neq X$. Tehát $\mathscr{H}$ olyan valódi zárt altér, amely nyilvánvalóan invariáns altere az A operátornak.

Az egyetlen kérdés tehát, hogy szeparábilis Hilbert-tér tetszőleges korlátos lineáris operátorának létezik-e (minden további feltétel nélkül) valódi zárt invariáns altere. E kérdés jelenleg is nyitott probléma.

9.5. Haar-mérték kompakt Abel-csoporton

Elsőként fölidézzük azokat a mértékelméleti és funkcionálanalízisbeli fogalmakat és tételeket, amelyek szükségesek a bemutatni kívánt eredmény megfogalmazásához és igazolásához.

Legyen H kompakt Hausdorff-tér, és tekintsük ennek Borel-halmazait, vagyis a nyílt halmazok által generált σ-algebrát. A Borel-halmazokon adott véges μ mértéket *Radon-mérték*nek nevezünk, ha bármely A Borel-halmaz esetén

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) \mid A \subseteq V,\, V \text{ nyílt}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.$$

Emlékeztetünk a Riesz–Markov–Kakutani-féle reprezentációs tételre, mely szerint ha H egy kompakt Hausdorff-tér, φ pedig a $\mathscr{C}(H, \mathbb{R})$ téren értelmezett nemnegatív lineáris funkcionál, akkor létezik a H halmazon olyan μ Radon-mérték, hogy minden $x \in \mathscr{C}(H, \mathbb{R})$ esetén

$$\varphi(x) = \int_H x(t)d\mu(t).$$

Tekintsük most valamely X normált tér második duálisába való J természetes leképezését. Ekkor a $J(X)$ funkcionáljai által származtatott gyenge topológiát a duális téren *gyenge***-topológiának* nevezzük. A Banach–Alaoglu-tétel szerint a duális tér zárt egységgömbje kompakt e topológiára nézve. Következésképpen, mivel kompakt tér zárt altere maga is kompakt, a gyenge*-topológiában érvényes a Heine–Borel-tétel megfelelője: a kompaktság ekvivalens a korlátosság és zártság egyidejű teljesülésével.

A $(G, +)$ csoportot *Hausdorff-topologikus csoport*nak nevezzük, ha adott rajta egy olyan Hausdorff-topológia, amelyre nézve a csoportművelet és az inverzképzés folytonosak. Egy G kompakt Hausdorff-topologikus csoporton adott Radon-mértéket *bal Haar-mérték*nek mondunk, ha *baleltolás-invariáns*, azaz ha minden $g \in G$ és minden $A \subseteq G$ Borel halmaz esetén $\mu(g + A) = \mu(A)$. Haar Alfréd nevezetes tételét csak kompakt Abel-csoportokra mondjuk ki és bizonyítjuk be.

9.10. tétel. *(Haar) Bármely kompakt Hausdorff-topologikus Abel-csoporton létezik Haar-mérték.*

Bizonyítás. Jelölje $(G,+)$ a szóban forgó Abel-csoportot, és legyen $X = \mathscr{C}(G,\mathbb{R})$ a csoporton értelmezett valós értékű folytonos függvények tere. Legyen K az X^* duális tér alábbi részhalmaza:

$$K = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\| \le 1,\ \forall x \ge 0 : \varphi(x) \ge 0,\ \varphi(1) = 1\}.$$

Nyilván K nem üres, konvex halmaz. Az is világos, hogy K korlátos és zárt a norma-topológiában; így a Banach–Alaoglu-tétel szerint kompakt a gyenge*-topológiára nézve.

Adott $\varphi \in K$ és $g \in G$ esetén legyen $\varphi_g(x) := \varphi(x_g)$, ahol x_g jelöli az x függvény g elemmel való eltoltját, azaz $x_g(t) := x(g+t)$. Azonnal látható, hogy $\|x_g\| = \|x\|$. Értelmezzük rögzített $g \in G$ esetén a $\tau_g \colon X^* \to X^*$ leképezést a

$$\tau_g(\varphi) = \varphi_g$$

előírással. Megmutatjuk, hogy τ_g az X^* normált tér lineáris izometriája. Legyenek $\varphi, \psi \in K$ tetszőlegesek, valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ rögzítettek. Ha $x \in X$, akkor

$$\big(\lambda\varphi + \mu\psi\big)_g(x) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(x_g) = \lambda\varphi(x_g) + \mu\psi(x_g) = \lambda\varphi_g(x) + \mu\psi_g(x).$$

Azaz

$$\tau_g(\lambda\varphi + \mu\psi) = \big(\lambda\varphi + \mu\psi\big)_g = \lambda\varphi_g + \mu\psi_g = \lambda\tau_g(\varphi) + \mu\tau_g(\psi),$$

ami a τ_g linearitását mutatja. Az izometria-tulajdonság igazolásához legyen $g \in G$ és $\varphi \in X^*$ rögzített. Mivel minden $x \in X$ $\|x_g\| = \|x\| = \|x_{-g}\|$, ezért

$$|(\tau_g\varphi)(x)| = |\varphi_g(x)| = |\varphi(x_g)| \le \|\varphi\|\|x_g\| = \|\varphi\|\|x\|.$$

Vagyis $\|\tau_g\varphi\| \le \|\varphi\|$. A fordított irányú egyenlőtlenséghez induljunk ki az alábbi becslésből:

$$|\varphi(x)| = |\varphi_g(x_{-g})| = |(\tau_g\varphi)(x_{-g})| \le \|(\tau_g\varphi)\|\|x_{-g}\| = \|(\tau_g\varphi)\|\|x\|.$$

Tehát $\|\varphi\| \le \|\tau_g\varphi\|$, s ezért minden $\varphi \in X^*$ esetén $\|\tau_g\varphi\| = \|\varphi\|$.

Most azt igazoljuk, hogy $\{\tau_g \mid g \in G\}$ egy fölcserélhető leképezéscsalád. Legyenek $g, h \in G$ tetszőlegesek, valamint $\varphi \in X^*$ rögzített. Megmutatjuk, hogy ekkor $(\varphi_h)_g = \varphi_{g+h}$. Valóban, ha $x \in X$, akkor a nyilvánvaló $(x_g)_h = x_{g+h}$ azonosság miatt

$$(\varphi_h)_g(x) = \varphi_h(x_g) = \varphi\big((x_g)_h\big) = \varphi(x_{g+h}) = \varphi_{g+h}(x).$$

Azonban innen

$$\tau_g \circ \tau_h(\varphi) = \tau_g(\tau_h(\varphi)) = \tau_g(\varphi_h) = (\varphi_h)_g = \varphi_{g+h} = \tau_{g+h}(\varphi)$$

következik minden $\varphi \in X^*$ esetén. Tehát $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{g+h}$, így a csoport kommutativitása miatt a család tagjai szintén fölcserélhetők.

Ezek után megmutatjuk, hogy minden g csoportelem esetén a τ_g leképezés gyenge*-folytonos. A linearitás miatt elegendő a folytonosságot a $0 \in X^*$ pontban igazolni. Ha V gyenge*-környezete a $\tau_g(0) = 0$ pontnak, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ és vannak olyan $x_1, \dots, x_n \in X$ elemek, hogy

$$\{\psi \in X^* \colon |x_k(\psi)| < \varepsilon,\, k = 1, \dots, n\} \subseteq V.$$

Legyen

$$U := \{\xi \in X^* \colon |(x_k)_g(\xi)| < \varepsilon,\, k = 1, \dots, n\}.$$

Ezzel a választással elértük, hogy $\xi \in U$ esetén $\xi_g = \tau_g(\xi)$ eleme a V gyenge*-környezetnek. Azaz $\tau_g(U) \subseteq V$ teljesül, és éppen ezt akartuk igazolni.

Végezetül vegyük észre, hogy a τ_g izometria-tulajdonságát is felhasználva elemi számolással adódik, hogy $\tau_g(K) \subseteq K$ is érvényes. Így teljesülnek a Markov–Kakutani–Tyihonov-fixponttétel feltételei, ezért van olyan $\varphi \in K$ elem, hogy $\tau_g(\varphi) = \varphi$, azaz $\varphi_g = \varphi$ minden $g \in G$ esetén fönnáll. A Riesz–Markov–Kakutani-féle reprezentációs tétel szerint létezik pontosan egy μ egyre normált Radon-mérték, hogy minden $x \in \mathscr{C}(G, \mathbb{R})$ esetén

$$\varphi(x) = \int_G x d\mu.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor μ épp a keresett Haar-mérték, amihez csupán az eltolás invarianciáját kell ellenőrizni. Elsőként jegyezzük meg, hogy a $\varphi_g = \varphi$ fixponttulajdonságból következően

$$\int_G x_g d\mu = \int_G x d\mu$$

teljesül minden $x \in \mathscr{C}(G, \mathbb{R})$ függvényre. A μ mérték Radon-tulajdonságát, valamint a Tietze-féle kiterjesztési tételt felhasználva adódik, hogy ez az összefüggés minden korlátos Borel-mérhető $x \colon G \to \mathbb{R}$ függvényre is fennáll. Legyen tehát H tetszőleges Borel-halmaz és legyen $x = \chi_H$ ennek indikátorfüggvénye. Ekkor minden $g \in G$ esetén

$$(\chi_H)_g(t) = \chi_H(g + t) = \chi_{H-g}(t);$$

és így

$$\mu(H) = \int_G \chi_H d\mu = \int_G (\chi_H)_g d\mu = \int_G \chi_{H-g} d\mu = \mu(H-g).$$

Vagyis μ az eltolásra nézve valóban invariáns mérték. $\square$

10. fejezet

Fixponttételek halmazértékű leképezésekre

A KKM-lemma általánosított formája vagy a Darbo–Szadovszkij-féle fixponttétel bizonyítása meggyőzően mutatja, hogy a halmazértékű leképezések fontos szerepet játszanak a topologikus fixponttételek elméletében. Ebben a fejezetben megszűnik segédszerepük: a rájuk vonatkozó fixponteredmények önálló elméletté terebélyesednek.

10.1. Folytonossági fogalmak halmazértékű leképezésekre

Legyenek X és Y nem üres halmazok. Ekkor az $F : X \to 2^Y$ leképezést *halmazértékű leképezés*nek nevezzük, és a továbbiakban rá az $F\colon X \rightrightarrows Y$ jelölést használjuk. Azt mondjuk, hogy $x_0 \in X$ *fixpont*ja az $F\colon X \rightrightarrows X$ leképezésnek, ha $x_0 \in F(x_0)$ teljesül.

Legyenek X és Y topologikus terek, $F\colon X \rightrightarrows Y$ és $x_0 \in X$. Azt mondjuk, hogy F *kívülről folytonos* x_0-ban, ha minden olyan $U \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(x_0) \subseteq U$, létezik olyan $V \subseteq X$ nyílt környezete x_0-nak, hogy $F(x) \subseteq U$ ha $x \in V$.

Hasonlóan, az F halmazértékű leképezést *belülről folytonos*nak mondjuk x_0-ban, ha minden olyan $U \subseteq Y$ nyílt halmaz esetén, amelyre $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, létezik olyan $V \subseteq X$ nyílt környezete x_0-nak, hogy $F(x) \cap U \neq \emptyset$ ha $x \in V$.

Érdemes megemlíteni, hogy $f\colon X \to Y$ esetén az $F(x) = \{f(x)\}$ módon adott leképezés külső, illetve belső folytonossága ekvivalens az

f folytonosságával. Ennél árnyaltabb az intervallumértékű leképezések esete:

10.1. tétel. *Ha X topologikus tér, $p, q\colon X \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy $p \leq q$, valamint $F\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}$ az $F(x) := [p(x), q(x)]$ definícióval adott, úgy az F leképezés*

(i) kívülről folytonos az $x_0 \in X$ pontban akkor és csak akkor, ha p alulról félig folytonos, q pedig felülről félig folytonos x_0-ban;

(ii) belülről folytonos az $x_0 \in X$ pontban akkor és csak akkor, ha p felülről félig folytonos, q pedig alulról félig folytonos x_0-ban.

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy F kívülről folytonos az $x_0 \in X$ pontban. Legyen $\varepsilon > 0$, és tekintsük az $U =]p(x_0) - \varepsilon, q(x_0) + \varepsilon[$ intervallumot. Mivel $F(x_0) \subseteq U$, ezért a külső folytonosság miatt van olyan $V \subseteq X$ nyílt környezete x_0-nak, hogy $F(x) \subseteq U$, ha $x \in V$. Vagyis minden $x \in V$ esetén

$$[p(x), q(x)] = F(x) \subseteq U =]p(x_0) - \varepsilon, q(x_0) + \varepsilon[;$$

azaz $p(x) > p(x_0) - \varepsilon$ és $q(x) < q(x_0) + \varepsilon$. Az első egyenlőtlenség a p függvény x_0-beli alulról félig folytonosságát, a második pedig a q függvény x_0-beli felülről félig folytonosságát mutatja.

Megfordítva, tegyük fel, hogy p alulról, q felülről félig folytonos az x_0 pontban. Legyen $U \subseteq \mathbb{R}$ olyan nyílt halmaz, hogy $F(x_0) \subseteq U$, és legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $]p(x_0) - \varepsilon, q(x_0) + \varepsilon[\subseteq U$. Válasszuk a V_1 környezetét x_0-nak úgy, hogy minden $x \in V_1$ esetén $p(x) > p(x_0) - \varepsilon$ teljesüljön. Hasonlóan, legyen V_2 olyan környezete x_0-nak, hogy minden $x \in V_2$ esetén $q(x) < q(x_0) + \varepsilon$ álljon. Ilyen feltételeknek eleget tevő V_1 és V_2 halmazok léteznek a p és q függvényekre kiszabott feltételek miatt. Ha $V = V_1 \cap V_2$, akkor ez olyan környezete x_0-nak, hogy minden $x \in V$ esetén az előbbi egyenlőtlenségek mindegyike fönnáll. Vagyis $F(x) \subseteq U$ minden $x \in V$ esetén.

(ii) Tegyük fel, hogy F belülről folytonos az $x_0 \in X$ pontban. Legyen $\varepsilon > 0$, és tekintsük az $U =]-\infty, p(x_0) + \varepsilon[$ nyílt halmazt. Mivel $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, ezért létezik x_0-nak olyan V környezete, hogy $F(x) \cap U \neq \emptyset$, ha $x \in V$. Azaz F és U definíciója miatt $p(x) < p(x_0) + \varepsilon$ adódik minden $x \in V$ esetén. A q leképezésre vonatkozó állítás igazolása ugyanígy történik, az $U =]q(x_0) - \varepsilon, +\infty[$ választással. E tulajdonságok pedig épp a p és q megfelelő félig folytonossági tulajdonságai.

Megfordítva, legyen $U \subseteq \mathbb{R}$ olyan nyílt halmaz, hogy $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$; ekkor van olyan $y \in U$, amivel $y \in F(x_0)$ teljesül. Válasszuk az $\varepsilon > 0$

számot úgy, hogy $]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\subseteq U$ fönnálljon. A p függvény felülről félig folytonossága miatt létezik olyan V_1 környezete x_0-nak, hogy $p(x) < p(x_0)+\varepsilon$, ha $x \in V_1$. Hasonlóan, létezik olyan V_2 környezete x_0-nak, hogy $q(x) > q(x_0)-\varepsilon$ teljesül minden $x \in V_2$ esetén. Ha most $x \in V_1 \cap V_2$, akkor $F(x)\cap]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\neq \emptyset$. Ellenkező esetben ugyanis vagy $y-\varepsilon > q(x)$, vagy $y+\varepsilon < p(x)$. Ez utóbbi esetből $y < p(x_0)$ adódna, ami ellentmond az $y \in F(x_0)$ feltételnek. A másik eset ugyanígy kizárható. Tehát V olyan környezete x_0-nak, hogy minden $x \in V$ esetén $F(x) \cap U \neq \emptyset$ teljesül, s épp ezt akartuk megmutatni. □

E tétel azonnali következményeként kapjuk, hogy az alábbi leképezések közül F kívülről, G belülről, míg H sem kívülről, sem belülről nem folytonos az $x_0 = 0$ helyen.

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{ha } x \neq 0; \\ [-1,1], & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} [-1,1], & \text{ha } x \neq 0; \\ \{0\}, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{ha } x \neq 0; \\ [1/2,1], & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Az alábbi „kalkulusszabályok” a folytonosság és összeadás kapcsolatára vonatkozó klasszikus tétel kiterjesztései.

10.2. tétel. *Legyen X topologikus tér, Y topologikus vektortér és $x_0 \in X$. Ha $F, G\colon X \rightrightarrows Y$ az x_0-ban belülről folytonos leképezések, akkor $F+G$ is belülről folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Legyen $H := F+G$, és legyen U egy olyan nyílt halmaz, hogy $U \cap H(x_0) \neq \emptyset$. Ekkor van olyan $p \in F(x_0)$ és $q \in G(x_0)$, hogy $p+q \in U$. Az összeadás folytonossága miatt van olyan V környezete az Y tér zéruselemének, hogy $(p+V)+(q+V) \subseteq U$. De ekkor $p+V$, illetve $q+V$ olyan nyílt halmazok, amelyek belemetszenek $F(x_0)$, illetve $G(x_0)$ halmazokba. A leképezések belülről való folytonossága miatt van x_0-nak olyan $W \subseteq X$ nyílt környezete, hogy

$$F(x) \cap (p+V) \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad G(x) \cap (q+V) \neq \emptyset,$$

ha $x \in W$. Ezért $H(x)\cap(p+V+q+V) \subseteq H(x)\cap U$ sem üres, ha $x \in W$. Tehát H valóban belülről folytonos x_0-ban. □

10.3. tétel. *Legyen X topologikus tér, Y Hausdorff-topologikus vektortér és $x_0 \in X$. Ha $F, G\colon X \rightrightarrows Y$ az x_0-ban kívülről folytonos leképezések, valamint $F(x_0)$ és $G(x_0)$ nem üres kompakt halmazok, akkor $F + G$ is kívülről folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Legyen $H := F + G$, és legyen $U \supseteq H(x_0)$ egy tetszőleges nyílt halmaz. A feltevésünk miatt $H(x_0)$ kompakt és diszjunkt az $Y \setminus U$ zárt halmaztól. Ezért az Y tér zéruselemének van olyan V szimmetrikus nyílt környezete, hogy $(Y \setminus U) + V$ és $H(x_0) + V$ szintén diszjunkt. Ekkor V szimmetriája miatt $Y \setminus U$ és $H(x_0) + V + V$ is diszjunkt, tehát

$$(F(x_0) + V) + (G(x_0) + V) = H(x_0) + V + V \subseteq U.$$

Mivel F, illetve G kívülről folytonos x_0-ban, $F(x_0) + V$ és $G(x_0) + V$ az $F(x_0)$, illetve $G(x_0)$ halmazokat tartalmazó nyílt halmazok, ezért van x_0-nak olyan $W \subseteq X$ nyílt környezete, hogy

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V \qquad \text{és} \qquad G(x) \subseteq G(x_0) + V,$$

ha $x \in W$. Így minden $x \in W$ esetén

$$H(x) = F(x) + G(x) \subseteq F(x_0) + V + G(x_0) + V = H(x_0) + V + V \subseteq U.$$

Tehát H valóban kívülről folytonos x_0-ban. $\square$

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel kompaktsági feltételei nem gyengíthetők. Legyen ugyanis $X := [-1, 1]^2$, és legyen minden $x \in X$ esetén $F(x)$ az exponenciális függvény epigráfja. Ekkor $F(x)$ zárt halmaz, és F kívülről folytonos. A $H(x) := F(x) - x$ képlettel megadott $H\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ leképezés kívülről nem folytonos. Ha $U := \mathbb{R} \times]0, \infty[$ a felső félsík, akkor $G(0, 0) \subseteq U$, és tetszőleges $y > 0$ esetén $G(0, y)$ belemetsz az alsó félsíkba is, tehát $G(0, y) \not\subseteq U$.

10.2. Az equilibrium-tétel és néhány következménye

Célunk az equilibrium-tétel igazolása, melynek a halmazértékű leképezésekre vonatkozó fixponttételek azonnali következményei. A Ky Fan-egyenlőtlenség mellett szükségünk lesz a Hahn–Banach-féle elválasztási tétel szigorú alakjára, amely szerint normált tér nem üres, konvex, kompakt, illetve nem üres, konvex, zárt részhalmazai korlátos lineáris funkcionállal egymástól szigorúan elválaszthatók. Ugyancsak szükséges az alábbi eredmény:

10.4. tétel. *Ha $U_1, \dots, U_n$ tetszőleges nyílt lefedése az X kompakt topologikus térnek, akkor létezik a lefedéshez rendelt egységbontás, vagyis léteznek olyan $\varphi_1, \dots, \varphi_n \colon X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy*

(i) $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1$,

(ii) $\{x \in X \mid \varphi_k(x) > 0\} \subseteq U_k$.

Bizonyítás. Csak arra a speciális esetre szorítkozunk, amikor X kompakt metrikus tér. Legyen $F_k := X \setminus U_k$, továbbá $x \in X$ esetén $\psi_k(x) := d(x, F_k)$. Értelmezzük a $\varphi_k \colon X \to \mathbb{R}$ függvényeket az alábbi módon:

$$\varphi_k(x) := \frac{\psi_k(x)}{\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x)}.$$

Vegyük észre, hogy ha $x \in X$, akkor van olyan j index, hogy $x \in U_j$; ám ekkor $\psi_j(x) > 0$, hiszen $x \notin F_k$ és F_k zárt. Vagyis φ_k nevezője mindig pozitív. A metrika folytonossága miatt a φ_k függvények folytonosak, továbbá eleget tesznek az (i) tulajdonságnak. Végezetül $\varphi_k(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $d(x, F_k) = 0$, vagyis $x \in F_k$ esetén. Ez pedig épp az (ii) tulajdonságot jelenti. □

Legyen X topologikus vektortér és $x \in X$. A $K \subseteq X$ nem üres halmaz x pontbeli *érintőkúp*ján az alábbi halmazt értjük:

$$T_x(K) := \overline{\{\lambda(y - x) \mid \lambda > 0,\, y \in K\}}.$$

Azt mondjuk, hogy $x_0 \in X$ *egyensúlypont*ja az $F \colon X \rightrightarrows X$ halmazértékű leképezésnek, ha $0 \in F(x_0)$ teljesül.

10.5. tétel. *(Equilibrium-tétel) Ha X lokálisan konvex Hausdorff-topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $F \colon K \rightrightarrows X$ olyan kívülről folytonos, nem üres, konvex, zárt halmazértékű leképezés, hogy minden $x \in \partial K$ esetén $F(x) \cap T_x(K) \neq \emptyset$, akkor létezik F-nek egyensúlypontja.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy minden $x \in K$ esetén $0 \notin F(x)$. Mivel a $\{0\}$ halmaz konvex és kompakt, $F(x)$ pedig konvex és zárt, ezért a Hahn–Banach-féle szeparációs tétel szigorú változata miatt van olyan $\varphi_x \in X^*$, hogy

$$\sup_{F(x)} \varphi_x < 0.$$

Legyen $\varphi \in X^*$ esetén $U_\varphi := \{x \in K \mid \sup_{F(x)} \varphi < 0\}$. Megmutatjuk, hogy U_φ nyílt halmaz. Ha ugyanis $x_0 \in U_\varphi$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$

valós szám, hogy $\sup_{F(x_0)} \varphi = -\varepsilon$. Ekkor $F(x_0) \subseteq \{y \in X \mid \varphi(y) < -\varepsilon/2\}$, és ez utóbbi halmaz φ folytonossága miatt nyílt. Mivel F kívülről folytonos, ezért létezik x_0-nak olyan V környezete, hogy minden $x \in V$ esetén $F(x) \subseteq \{y \in X \mid \varphi(y) < -\varepsilon/2\}$. Ám ekkor $\sup_{F(x)} \varphi \leq -\varepsilon/2 < 0$ ha $x \in V$. Tehát $F(x) \subseteq U_\varphi$, ami épp U_φ nyíltságát mutatja.

Speciálisan U_{φ_x} nyílt halmaz, és a $\sup_{F(x)} \varphi_x < 0$ egyenlőtlenség miatt nem üres. Vagyis az $\{U_{\varphi_x} \mid x \in K\}$ család nem üres, nyílt halmazokból álló lefedése K-nak. Mivel e halmaz kompakt, ezért léteznek olyan K-beli $x_1, \dots, x_n$ elemek, hogy

$$K \subseteq U_{\varphi_{x_1}} \cup \dots \cup U_{\varphi_{x_n}}.$$

Legyen $h_1, \dots, h_n$ a $U_{\varphi_{x_1}}, \dots, U_{\varphi_{x_n}}$ nyílt lefedéshez rendelt egységbontás, és tekintsük az alábbi módon értelmezett $f\colon K \times K \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x,y) := \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \varphi_{x_k}(x - y).$$

Ekkor f az első változójában folytonos, hiszen a benne szereplő függvények folytonosak. Másrészt a második változójában affin, speciálisan kvázikonkáv. Így a Ky Fan-egyenlőtlenség szerint van olyan $x_0 \in K$, hogy

$$\sup_{y \in K} f(x_0, y) \leq \sup_{x \in K} f(x,x) = 0.$$

Azaz minden $y \in K$ esetén $f(x_0, y) \leq 0$. Ezt az egyenlőtlenséget rendezve és az érintőkúp fogalmát szem előtt tartva kapjuk, hogy minden $u \in T_{x_0}(K)$ esetén

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0) \varphi_{x_k}(u).$$

Legyen $u_0 \in F(x_0) \cap T_{x_0}(K)$. Ilyen u_0 valóban létezik: $x_0 \in \partial K$ esetén a tétel feltétele biztosítja, $x_0 \in K^\circ$ esetén pedig a $T_{x_0}(K) = X$ tulajdonság. Jelölje $I(x_0)$ azon $k \in \{1, \dots, n\}$ indexeket, amelyekre $h_k(x_0) > 0$. Az egységbontás miatt ekkor $x_0 \in U_{\varphi_{x_k}}$ teljesül. Azonban $u_0 \in F(x_0)$, így $\varphi_{x_k}(u_0) < 0$ szintén fennáll. Vagyis $k \in I(x_0)$ választás mellett $h_k(x_0)\varphi_{x_k}(u_0) < 0$. Mindezekből

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} h_k(x_0)\varphi_{x_k}(u_0) = \sum_{k \in I(x_0)} h_k(x_0)\varphi_{x_k}(u_0) < 0$$

adódik, ami ellentmondás. Így az indirekt feltétel hamis, tehát létezik F-nek egyensúlypontja. $\square$

10.6. tétel. *(Kakutani–Fan–Gliksberg) Ha X lokálisan konvex Hausdorff-topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, $F\colon K \rightrightarrows K$ kívülről folytonos, nem üres, konvex, zárt halmazértékű leképezés, akkor létezik F-nek fixpontja.*

Bizonyítás. Legyen $G(x) := F(x) - x$. Ekkor $G\colon K \rightrightarrows X$ nem üres konvex, zárt halmazértékű leképezés, amely a 10.3. tétel szerint kívülről folytonos. Megmutatjuk, hogy minden $x \in \partial K$ esetén $G(x) \subseteq T_x(K)$, s így az equilibrium-tétel $G(x) \cap T_x(K) \neq \emptyset$ feltétele is teljesül.

Ha $y \in K$, akkor az $y = x + 1(y - x)$ előállítás mutatja, hogy $y \in x + T_x(K)$. Másrészt $F(x) \subseteq K$ a tétel feltételei miatt. Vagyis $F(x) \subseteq K \subseteq x + T_x(K)$, azaz $G(x) = F(x) - x \subseteq T_x(K)$ valóban fennáll. Az equilibrium-tétel szerint van olyan $x_0 \in K$, hogy $0 \in G(x_0)$. Azaz x_0 az F fixpontja. $\square$

10.7. tétel. *(Kifelé és befelé irányuló leképezések) Ha X lokálisan konvex Hausdorff-topologikus vektortér, $K \subseteq X$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, valamint $F\colon K \rightrightarrows X$ kívülről folytonos, nem üres, konvex, zárt halmazértékű, amely*

(i) befelé irányuló, azaz $F(x) \cap \big(x + T_x(K)\big) \neq \emptyset$, ha $x \in \partial K$, vagy

(ii) kifelé irányuló, azaz $F(x) \cap \big(x - T_x(K)\big) \neq \emptyset$, ha $x \in \partial K$,

akkor létezik F-nek fixpontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F befelé irányuló, s legyen $G(x) = F(x) - x$. Ekkor a 10.3. tétel miatt $G\colon K \rightrightarrows X$ kívülről folytonos, nem üres, konvex, zárt halmazértékű leképezés. Tetszőleges $x \in \partial K$ esetén $G(x) \cap T_x(K) \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha $F(x) \cap (x + T_x(K)) \neq \emptyset$; ez utóbbi azonban fönnáll, hiszen F befelé irányuló. Tehát az equilibrium-tétel miatt van olyan $x_0 \in K$, hogy $0 \in G(x_0)$. Vagyis x_0 az F fixpontja.

A másik állítás hasonlóan igazolható, a $G(x) = x - F(x)$ módon adott leképezés segítségével. $\square$

10.3. Középértéktételek halmazértékű leképezésekre

Az előző alfejezet tételeit a Bolzano-féle középértéktétel különféle kiterjesztéseire alkalmazzuk. Elsőként intervallumértékű leképezéseket tárgyalunk. Megjegyezzük, hogy amikor ezek az intervallumok egyeleműek, akkor a Bolzano-féle középértéktételt, illetve a Brouwer-féle fixponttétel egydimenziós esetét kapjuk.

10.8. tétel. *Ha $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy p alulról félig folytonos, q felülről félig folytonos, $p \le q$, továbbá $p(a) \ge 0$ és $q(b) \le 0$, akkor van olyan $x_0 \in [a,b]$, hogy $p(x_0) \le 0 \le q(x_0)$.*

Bizonyítás. Legyen $K := [a,b]$ és $F(x) := [p(x), q(x)]$. Ekkor $K \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, továbbá $F\colon K \rightrightarrows \mathbb{R}$ nem üres, korlátos, zárt halmazértékű leképezés, amely a feltételek és a 10.1. tétel miatt kívülről folytonos. Világos, hogy $\partial K = \{a, b\}$, továbbá hogy

$$T_a(K) = [0, +\infty[\qquad \text{és} \qquad T_b(K) =]-\infty, 0].$$

Mivel $p(a) \ge 0$, ezért $[p(a), q(a)] \cap [0, +\infty[= F(a) \cap T_a(K)$ nem üres; hasonlóan igazolható, hogy $F(b) \cap T_b(K)$ ugyancsak nem üres. Így az equilibrium-tétel szerint van olyan $x_0 \in K$, hogy $0 \in F(x_0)$, ami épp a bizonyítandó állítást adja. □

10.9. tétel. *Ha $p, q\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy p alulról félig folytonos, q felülről félig folytonos, $p \le q$, továbbá*

(i) $q(a) \ge a$ és $p(b) \le b$, vagy

(ii) $p(a) \le a$ és $q(b) \ge b$,

akkor van olyan $x_0 \in [a,b]$ hogy $p(x_0) \le x_0 \le q(x_0)$.

Bizonyítás. Legyen $K := [a,b]$ és $F(x) := [p(x), q(x)]$. Ekkor $K \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, továbbá $F\colon K \rightrightarrows \mathbb{R}$ nem üres, korlátos, zárt halmazértékű leképezés, amely a feltételek és a 10.1. tétel miatt kívülről folytonos. Tegyük fel elsőként, hogy (i) teljesül. Nyilvánvaló, hogy $\partial K = \{a, b\}$, továbbá hogy

$$a + T_a(K) = [a, +\infty[, \qquad \text{és} \qquad b + T_b(K) =]-\infty, b].$$

Az előző bizonyítás mintájára igazolható, hogy $F(x) \cap \big(x + T_x(K)\big)$ nem üres halmaz, ha $x \in \partial K$. Vagyis teljesülnek a befelé irányuló leképezésekre vonatkozó fixponttétel feltételei. Így van olyan $x_0 \in K$, hogy $x_0 \in F(x_0)$, ami épp a bizonyítandó állítást jelenti.

A másik eset ugyanígy bizonyítható; ekkor az (ii) feltétel azt eredményezi, hogy F kifelé irányuló. A fixpont létezését most a kifelé irányuló leképezések fixponttulajdonsága biztosítja. □

Végezetül két zérushelytételt ismertetünk. Mindkettő hátterében ezúttal is a Bolzano-tétel áll: az elsőben a zárt egységgömb, a másodikban pedig a zárt tégla veszi át az intervallum szerepét.

10.10. tétel. *Ha $f\colon \overline{U}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonos leképezés, hogy minden $\|x\| = 1$ esetén $\langle f(x), x\rangle \le 0$, akkor létezik f-nek zérushelye.*

Bizonyítás. Legyen $F(x) = \{f(x)\}$, ahol $x \in \overline{U}(0,1)$. Ekkor F nem üres, konvex, zárt halmazértékű leképezés, amely f folytonossága miatt kívülről folytonos. Nyilvánvaló az is, hogy F értelmezési tartománya nem üres, konvex, kompakt halmaz. Először igazoljuk, hogy az értelmezési tartomány minden x határpontja esetén

$$T_x(K) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \le 0\}.$$

Jelölje a jobb oldali halmazt $H(x)$ és legyen $y \in T_x(K)$ tetszőleges. Ekkor van olyan (λ_m) pozitív tagú sorozat, és van olyan (u_m) sorozat a zárt egységgömbből, hogy

$$y = \lim_{m\to\infty} \lambda_m(u_m - x) =: \lim_{m\to\infty} y_m.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség szerint, fölhasználva az $\|x\| = 1$ és $\|u_m\| \le 1$ tulajdonságokat,

$$\langle y_m, x\rangle = \lambda_m\big(\langle u_m, x\rangle - \|x\|^2\big) \le \lambda_m\big(\|u_m\|\|x\| - \|x\|^2\big) \le 0.$$

Innen határátmenettel $\langle y, x\rangle \le 0$ következik, ami mutatja, hogy $y \in H(x)$. Tehát $T_x(K) \subseteq H(x)$.

A fordított tartalmazás igazolásához legyen $y \in H(x)$ tetszőleges, és rögzített $m \in \mathbb{N}$ esetén legyen $y_m := y - x/m$. Megmutatjuk, hogy ekkor $y_m = \lambda(u_m - x)$, ahol $\lambda > 0$ és $\|u_m\| \le 1$. Ehhez elegendő azt belátni, hogy alkalmas $\lambda > 0$ választással

$$\Big\|\frac{1}{\lambda}y - \frac{1}{\lambda m}x + x\Big\|^2 \le 1.$$

Ebből az egyenlőtlenségből rendezéssel (fölhasználva, hogy az $\langle y, x\rangle$ belső szorzat nemnegatív), az alábbit kapjuk:

$$\lambda \ge \frac{\|y\|^2 + \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\langle y, x\rangle}{2\big(\frac{1}{m^2} - \langle y, x\rangle\big)} =: c.$$

Vagyis a $\lambda = \max\{1, c\}$ választás megfelelő; innen pedig $H(x) \subseteq T_x(K)$ következik. Összességében tehát a határpontokban az érintőkúp a fönti módon állítható elő.

Figyelembe véve F értelmezését, továbbá a határon érvényes $\langle f(x), x\rangle \leq 0$ egyenlőtlenséget, $F(x) \subseteq H(x) = T_x(K)$, ha $\|x\| = 1$. Így az equilibrium-tétel valamennyi feltétele teljesül. Vagyis létezik olyan $x_0 \in \overline{U}(0,1)$, hogy $0 \in F(x_0)$, ami pontosan a bizonyítandó állítás. □

10.11. tétel. *(Bolzano–Miranda) Ha $K := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ nem üres belsejű tégla és $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonos függvény, hogy minden $k \in \{1, \ldots, n\}$, minden $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$, és minden $x_i \in [a_i, b_i]$ esetén*

$$f_k(\ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots) \geq 0 \geq f_k(\ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots)$$

teljesül, akkor létezik f-nek zérushelye K-ban.

Bizonyítás. Legyen $x \in K$ esetén $F(x) := \{f(x)\}$. Ekkor F nem üres, zárt, konvex halmazértékű leképezés, amely egy korábbi megjegyzés szerint kívülről folytonos; K pedig nem üres, kompakt, konvex halmaz. Nyilvánvaló, hogy $x \in \partial K$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan k index, hogy $x_k = a_k$, vagy $x_k = b_k$. Tehát az

$$I(x) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i = a_i\},$$
$$J(x) = \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid x_j = b_j\}$$

jelölések bevezetése mellett, $x \in \partial K$ pontosan akkor, ha $I(x) \cup J(x)$ nem üres. Megmutatjuk, hogy minden $x \in \partial K$ esetén

$$T_x(K) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid h_i \geq 0, i \in I(x);\ h_j \leq 0, j \in J(x)\}.$$

Jelölje a jobb oldali halmazt $H(x)$ és legyen $h \in T_x(K)$ tetszőleges. Ekkor van olyan (λ_m) pozitív tagú sorozat és olyan K-beli (u_m) sorozat, hogy

$$h = \lim_{m\to\infty} \lambda_m(u_m - x).$$

Ha $i \in I(x)$, akkor $x_i = a_i$ és $u_m \in K$ miatt az $(u_m - x)$ vektor i-edik komponense nemnegatív. Ekkor $h_i \geq 0$. Hasonlóan kapjuk, hogy $i \in J(x)$ esetén $h_i \leq 0$. Vagyis $h \in H(x)$, azaz $T_x(K) \subseteq H(x)$.

Legyen most $h \in H(x)$. Megmutatjuk, hogy létezik $\lambda > 0$ és $u \in K$ úgy, hogy $h = \lambda(u - x)$; ekkor ugyanis $h \in T_x(K)$ adódik, ami épp a fordított irányú tartalmazást jelenti. Ehhez elegendő azt igazolni, hogy van olyan $\lambda > 0$, amivel $u = (1/\lambda)h + x \in K$, azaz minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ mellett

$$a_k \leq \frac{h_k}{\lambda} + x_k \leq b_k.$$

Ha $h_k \geq 0$, akkor a bal oldali egyenlőtlenség minden $\lambda > 0$ esetén teljesül. Ha $h_k < 0$, akkor szükségképpen $k \notin I(x)$; így a bal oldali egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $\lambda \geq -h_k/(x_k - a_k)$. Hasonlóképpen, ha $h_k \leq 0$, akkor a jobb oldali egyenlőtlenség teljesül; ha pedig $h_k > 0$, akkor szükségképpen $k \notin J(x)$; így ekkor a jobb oldali egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $\lambda \geq h_k/(b_k - x_k)$. Tehát az alábbi módon adott λ egy megfelelő választás:

$$\lambda := \max\left\{1, \max_{h_k<0} \frac{h_k}{a_k - x_k}, \max_{h_k>0} \frac{h_k}{b_k - x_k}\right\}.$$

Legyen $x \in \partial K$. Ekkor van olyan k index, hogy $k \in I(x) \cup J(x)$. Ha $k \in I(x)$, akkor $x_k = a_k$, és így a tétel feltételei miatt $f_k(x) \geq 0$. Hasonlóan $k \in J(x)$ esetén $f_k(x) \leq 0$. Vagyis $f(x) \in H(x) = T_x(K)$, amiből $F(x) \cap T_x(K) \neq \emptyset$ adódik. Az equilibrium-tétel szerint van olyan $x_0 \in K$, hogy $0 \in F(x_0)$, azaz $f(x_0) = 0$ teljesül. $\square$

Figyeljük meg, hogy a Bolzano-tétel bemutatott általánosításainak egyike sem halmazértékű leképezésekre vonatkozik. Ez jól mutatja, hogy a halmazértékű leképezések módszerei hatékony és elegáns utat jelenthetnek a szokásos leképezésekre vonatkozó eredményekhez.

11. fejezet

A fokszámelmélet alapjai

Az utolsó fejezet kettős céllal került a bemutatni kívánt anyagba. Elsőként amiatt a rendkívül egyedi és szokatlan szemléletmód miatt, amit képvisel. Másodszor amiatt a perspektíva miatt, amit a fixpontindex-elmélet felé nyit, egyben „kivezetést” adva a topologikus fixponttételek elméletéből. Bár a fő eredmény Leray és Schauder nevét viseli, jelentős Birkhoff, Kronecker és Poincaré e területen végzett úttörő munkássága. Talán az sem meglepő, hogy számos alapvető gondolat már Gaussnál megjelenik az algebra alaptételére adott bizonyításában.

11.1. A Leray–Schauder-féle egzisztencia- és unicitási tétel

A továbbiakban legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres, korlátos, nyílt halmaz, $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonos leképezés, hogy $f(x) \neq 0$, ha $x \in \partial D$. Jelölje továbbá $\mathfrak{M}$ az ilyen tulajdonsággal bíró halmazok és függvények (D, f) párjainak családját. Legyen $\mathfrak{M}^*$ a *megengedett párok* $\mathfrak{M}$ halmazának az a részhalmaza, amelyre $f \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$, az f zérushelyeinek $Z(f)$ halmaza véges, és $x \in Z(f)$ esetén $\det f'(x) \neq 0$. Az $\mathfrak{M}^*$ halmaz elemeit *reguláris megengedett pároknak* fogjuk nevezni.

Azt mondjuk, hogy a (D, f) és (D, g) megengedett párok esetén f és g *megengedett homotópiaekvivalensek*, ha létezik olyan $H\colon \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ folytonos leképezés, hogy

(i) $H(x,0) = f(x)$;

(ii) $H(x,1) = g(x)$;

(iii) *minden* $(x,t) \in \partial D \times [0,1]$ *esetén* $H(x,t) \neq 0$.

Legyen például $D :=]-1,1[$, valamint $H(x,t) := (1-t)f(x) + tg(x)$. Ha $f(x) := x$ és $g(x) := x^3$, akkor H megengedett homotópia, míg a $g(x) := x^2$ választással már nem megengedett homotópia f és g között. Sőt, az is megmutatható, hogy ez utóbbi választás mellett nincs f és g között megengedett homotópia. Ezek után – a korábbi jelölések és feltételek megtartása mellett – megfogalmazhatjuk a fokszámelmélet alaptételét:

11.1. tétel. *(Leray–Schauder) Létezik pontosan egy olyan* $\deg\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{Z}$ *leképezés (az úgynevezett* leképezés fokszám*), amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(i) $\deg\big(U(0,1), \mathrm{id}\big) = 1$*;*

(ii) *ha* $\deg(D,f) \neq 0$, *akkor* $f(x) = 0$ *valamely* $x \in D$ *esetén;*

(iii) *ha* $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ *és* $(D_1 \cup D_2, f)$, (D_1, f) *és* (D_2, f) *megengedett párok, akkor*

$$\deg\big((D_1 \cup D_2, f)\big) = \deg\big((D_1, f)\big) + \deg\big((D_2, f)\big);$$

(iv) *ha* (D,f), (D,g) *megengedett párok, továbbá* f *és* g *megengedett homotópiaekvivalens függvények, akkor*

$$\deg(D,f) = \deg(D,g).$$

Továbbá ha $(D,f) \in \mathfrak{M}^*$, *akkor érvényes az alábbi formula:*

$$\deg(D,f) = \sum_{x \in Z(f)} \operatorname{sign} \det f'(x).$$

E tétel bizonyítása messze meghaladná könyvünk kereteit; a modern analízis számos fontos eredménye és módszere kulcsszerephez jut benne. Ízelítőként csupán röviden vázoljuk a gondolatmenetet. Elsőként azt kell megmutatni, hogy a reguláris párok halmazán a fönti formula eleget tesz az (*i*)–(*iv*) kívánalmaknak. Ezek közül a (*iv*) bizonyítása jelenti a legnagyobb nehézséget: részlépésként igazolni kell ugyanis, hogy a formula invariáns integráltranszformációval szemben, amihez a Stokes-tétel szükséges.

A reguláris megengedett párokról a formulát konvolúciós simítással lehet kiterjeszteni a megengedett párok halmazára. Eközben ügyelni kell arra, hogy a már igazolt tulajdonságok továbbra is érvényben maradjanak.

A Leray–Schauder-tétel egyes tulajdonságait külön névvel illetjük: (*i*) normáltság; (*ii*) Kronecker-elv; (*iii*) additivitás; (*iv*) megengedett homotópiainvariancia. A továbbiakban ezekre így fogunk hivatkozni.

11.2. Alkalmazások

A Leray–Schauder-féle egzisztencia- és unicitási tétel alkalmazásaként az algebra alaptételét, a Brouwer-féle fixponttételt és a Poincaré-féle sündisznótételt fogjuk bizonyítani.

11.2. tétel. *(Az algebra alaptétele) Bármely komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak létezik komplex gyöke.*

Bizonyítás. Legyen $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ legalább elsőfokú komplex polinom, továbbá legyen $r > 0$ olyan, hogy

$$r^n > |a_1| r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| r + |a_n| + 1$$

teljesüljön. Ilyen r szám valóban létezik, hiszen a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalát r^{n-1}-nel osztva, majd véve az $r \to +\infty$ határátmenetet a jobb oldal korlátos marad, míg a bal végtelenhez tart. Legyen $D = U(0, r)$, továbbá $q(z) := z^n - 1$ és $H(z, t) := tq(z) + (1 - t)p(z)$. Megmutatjuk, hogy H megengedett homotópia p és q között. Tegyük fel indirekt módon, hogy $H(z, t) = 0$ valamely $z \in \partial D$ és $t \in [0, 1]$ esetén. Ekkor H definícióját alapul véve kapjuk, hogy

$$z^n = (t - 1)(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n) + t.$$

A $z \in \partial D$ választás miatt $|z| = r$. Ezért fölhasználva r választását, a fönti összefüggést, valamint a háromszög-egyenlőtlenséget, az alábbi becslés adódik:

$$\begin{aligned} r^n = |z|^n &\le (1 - t)\big(|a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}||z| + |a_n|\big) + t \\ &\le |a_1| r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| r + |a_n| + 1 < r^n. \end{aligned}$$

Az ellentmondás miatt p és q valóban megengedett homotópiaekvivalens leképezések a D halmazon. Így a homotópiainvariancia miatt fokszámuk megegyezik; elegendő tehát $\deg(D, q)$ meghatározása. A q polinom zérushelyei épp az n-edik egységgyökök. Megmutatjuk, hogy a $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

leképezés deriváltjának determinánsa mindezen pontokban pozitív, amihez áttérünk polárkoordinátákra. Tekintsük tehát az $f\colon\ ]0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$,

$$f(\rho,\varphi) := (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

leképezést. Ekkor

$$\det f'(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Másrészt a Moivre–Laplace-képlet szerint

$$(q\circ f)(\rho,\varphi) = (\rho^n\cos n\varphi - 1, \rho^n\sin n\varphi),$$

tehát

$$\det(q\circ f)'(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} n\rho^{n-1}\cos n\varphi & -n\rho^n\sin n\varphi \\ n\rho^{n-1}\sin n\varphi & n\rho^n\cos n\varphi \end{vmatrix} = n\rho^{2n-1} > 0.$$

A láncszabály alapján

$$\det(q\circ f)'(\rho,\varphi) = \det(q'(f(\rho,\varphi))\circ f'(\rho,\varphi)) = \det q'(f(\rho,\varphi))\det f'(\rho,\varphi),$$

amiből következik, hogy $\det q'$ pozitív az f képhalmazán, vagyis az egész $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ halmazon, tehát az n-edik egységgyökökben is. Így

$$\deg(D,p) = \deg(D,q) = \sum_{\varepsilon\in Z(q)} \operatorname{sign}\det q'(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in Z(q)} 1 = n.$$

A Kronecker-elv szerint p-nek van zérushelye a D halmazon, ami épp a kívánt állítás. □

11.3. tétel. *(Brouwer) Ha $K\subseteq\mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt, konvex halmaz, akkor minden $f\colon K\to K$ folytonos leképezésnek létezik fixpontja.*

Bizonyítás. Az általánosság csorbítása nélkül föltehető, hogy $0\in K^\circ$. Legyen $x\in K$ esetén $g(x) := x - f(x)$; nyilván elegendő megmutatni, hogy g rendelkezik K-beli zérushellyel. Ha valamely $x\in\partial K$ esetén $g(x)=0$, akkor készen vagyunk; föltehető tehát, hogy g nem tűnik el a K halmaz határán, azaz (D,g) megengedett pár, ahol $D=K^\circ$. Legyen $H(x,t) := tx + (1-t)g(x)$. Megmutatjuk, hogy H megengedett homotópia id és g között. Ha ugyanis $H(x,t)=0$ valamely $x\in\partial K$ esetén, akkor $(t-1)g(x) = tx$ adódik; mivel $0\in K^\circ$, ezért $t\neq 1$. Vagyis az előbbi összefüggésből $g(x)$ kifejezhető, amiből pedig, mint azt egyszerű számolás mutatja,

$$f(x) = \frac{1}{1-t}x.$$

Azonban $1/(1-t) > 1$ és x a K halmaz határának eleme, tehát a jobb oldal nem lehet K-beli a K konvexitása miatt. Ezzel ellentmondásra jutottunk az $f(x) \in K$ feltétellel. A homotópiainvarianciát és a Leray–Schauder-tétel utolsó formuláját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\deg(D, g) = \deg(D, \mathrm{id}) = \sum_{x \in Z(\mathrm{id})} \operatorname{sign} \det \mathrm{id}'(x) = \operatorname{sign} \det \mathrm{id}'(0) = 1.$$

Innen a Kronecker-elvből adódik a tétel állítása. □

11.4. tétel. *(Poincaré) Ha $n \in \mathbb{N}$ páratlan, akkor nem létezik az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ egységgömbhéjon sehol sem zérus, folytonos érintővektormező.*

Bizonyítás. Elsőként meghatározzuk $\deg(U(0,1), -\mathrm{id})$ értékét. Közvetlen számolással kapjuk, hogy $\det(-\mathrm{id})'(x) = (-1)^n$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ezt fölhasználva,

$$\deg(U(0,1), -\mathrm{id}) = \sum_{x \in Z(-\mathrm{id})} \operatorname{sign} \det(-\mathrm{id}'(x)) = \operatorname{sign} \det(-\mathrm{id}'(0)) = (-1)^n.$$

Vagyis ha n páratlan, akkor $\deg(U(0,1), -\mathrm{id}) = -1$. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik olyan folytonos $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ függvény, amely sehol nem tűnik el, és amelyre $\langle x, f(x) \rangle = 0$ teljesül. Terjesszük ki f-et folytonosan a teljes zárt egységgömbre az

$$f(x) := \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad x \neq 0, \qquad f(0) := 0$$

előírással. Ekkor a $H_1(x,t) := (1-t)x + tf(x)$ képlettel megadott leképezés homotópia id és f között. Ha $x \in S$, akkor $\langle x, f(x) \rangle = 0$ miatt x és $f(x)$ lineárisan független vektorok, tehát ráadásul H_1 megengedett homotópia. Hasonlóképpen $H_2(x,t) := (1-t)(-x) + tf(x)$ megengedett homotópia $(-\mathrm{id})$ és f között. Tehát id és $(-\mathrm{id})$ is megengedett homotópiaekvivalensek, holott a fokszámuk különbözik, amivel ellentmondást kaptunk. □

Érdemes megjegyezni, hogy páros dimenziók esetén megadható az egységgömb héján sehol sem zéró érintő vektormező. Valóban, legyen

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}),$$
$$f(x) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1}).$$

Ekkor $f\colon S \to S$ folytonos, sehol sem nulla, és $\langle x, f(x)\rangle = 0$. Vagyis a Poincaré-féle sündisznótétel teljesülése jellemzi az alaptér dimenziójának paritását. Bizonyítás nélkül említsünk meg még egy topologikus eredményt, a Borsuk–Ulam antipodális tételt:

11.5. tétel. *(Borsuk–Ulam) Ha S jelöli $\mathbb{R}^{n+1}$ egységgömbjének héját, akkor minden folytonos $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ leképezés esetén van olyan $x \in S$, hogy $f(x) = f(-x)$.*

Poincaré tétele és a Borsuk–Ulam-tétel meglepő és érdekes meteorológiai jelentéssel bír. Némi túlzással lehetne rájuk az időjóslás első és második alaptételeként hivatkozni. Előbbi azt fejezi ki, hogy légkörrel rendelkező bolygón van olyan hely, ahol szélcsend van. Ennek fényében a Jupiter Vörös Foltja matematikai szükségszerűség: e ciklon középpontja például ilyen hely. Az utóbbi eredmény pedig azt jelenti, hogy légkörrel rendelkező bolygón létezik olyan ellenlakó pontpár, melyekben a hőmérsékleti adatok és a légnyomásértékek páronként megegyeznek.

Irodalom

[1] Bajmóczy, E. G. and Bárány, I., On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **34** 3–4 (1979), 347–350.

[2] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.* **3** (1922), 133–181.

[3] Barnsley, M., *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[4] Berinde, V., *Iterative approximation of fixed points*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1912, Springer, Berlin, 2007.

[5] Bessaga, C., On the converse of the Banach fixed-point principle, *Colloq. Math.* **7** (1959), 41–43.

[6] Bielecki, A., Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires, *Bull. Acad. Polon. Sci.* Cl. III. **4** (1956), 261–264.

[7] Bishop, E. and Phelps, R. R., The support functionals of a convex set, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, 27–35.

[8] Blaschke, W., *Kreis und Kugel (1916)*, Chelsea Publishing Co., New York, 1949.

[9] Borsuk, K., Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fundam. Math.* **20** (1933), 177–190.

[10] Boyd, D. W. and Wong, J. S. W., On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 458–464.

[11] Brouwer, L. E. J., Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, *Math. Ann.* **70** 2 (1911), 161–165.

[12] Browder, F. E., On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, *Indag. Math.* **30** (1968), 27–35.

[13] Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **215** (1976), 241–251.

[14] Cauchy, A., *Oeuvres completes X*, Gauthier–Villars, Paris, 1835/1958.

[15] Clarke, F. H., Pointwise contraction criteria for the existence of fixed points, *Canad. Math. Bull.* **21** (1978), 7–11.

[16] Ćirić, Lj. B., A generalization of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974), 267–273.

[17] Darbo, G., Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **24** (1955), 84–92.

[18] Dini, U., *Analisi infinitesimale I-IV*, Calcolo differenziale, Autographia Bertini, Pisa, 1878.

[19] Ekeland, I., On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 324–353.

[20] Fan, K., Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **38** (1952), 121–126.

[21] Fan, K., A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.* **142** (1960/1961), 305–310.

[22] Fredholm, I., *Oeuvres completes de Ivar Fredholm*, Litos Reprotryck, Malmo, 1955.

[23] Frobenius, G., Über Matrizen aus positiven Elementen 1, *Berl. Ber.* (1908), 471–476.

[24] Frobenius, G., Über Matrizen aus positiven Elementen 2, *Berl. Ber.* (1909), 514–518.

[25] Glicksberg, I. L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 170–174.

[26] Granas, A. and Dugundji, J., *Fixed point theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.

[27] Graves, L. M., Some mapping theorems, *Duke Math. Journal* **17** (1950), 111–114.

[28] Haar, A., Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, *Ann. Math.* **34** (1933), 147–169.

[29] Hausdorff, F., *Grundzuege der Mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.

[30] Hegedűs, M. and Szilágyi, T., Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings, *Math. Japon.* **25** (1980), 147–157.

[31] Hutchinson, J. E., Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** 5 (1981), 713–747.

[32] Járai, A., *Mérték és integrál*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[33] Joó I., A simple proof for von Neumann's minimax theorem, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **42** 1–2 (1980), 91–94.

[34] Kakutani, S., A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.* **8** (1941), 457–459.

[35] Kantorovitch, L., The method of successive approximations for functional equations, *Acta Math.* **71** (1939), 63–97.

[36] Knaster, B. and Tarski, A., Un théoreme sur les fonctions d'ensembles, *Ann. Soc. Polon. Math.* **6** (1927), 133–134.

[37] Knaster, B. Kuratowski, C. and Mazurkiewicz, S., Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fundam. Math.* **14** (1929), 132–137.

[38] Komornik, V., Minimax theorems for upper semicontinuous functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **40** 1–2 (1982), 159–163.

[39] Leach, E. B., A note on inverse function theorems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12** (1961), 694–697.

[40] Leray, J. and Schauder, J., Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **51** (1934), 45–78.

[41] Liouville, J., Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries, etc., *Second Mémoire J. Math.* **2** (1837), 16–35.

[42] Lomonosov, V. I., Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **7** 3 (1973), 55–56.

[43] Losonczi L., *Funkcionálanalízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.

[44] Ludvík, J., A converse of Banach's contraction theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967), 287–289.

[45] Lyusternik, L. A., On the conditional extrema of functionals, *Mat. Sbornik* **41** (1934), 390–401.

[46] Massey, W. S., *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 127, Springer-Verlag, New York, 1991.

[47] Matkowski, J., Integrable solutions of functional equations, *Dissertationes Math.* **127** (1975), 1–68.

[48] Meyers, P. R., A converse to Banach's contraction theorem, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **71B** (1967), 73–76.

[49] Milnor, J., Analytic proofs of the „hairy ball theorem" and the Brouwer fixed-point theorem, *Amer. Math. Monthly* **85** 7 (1978), 521–524.

[50] Miranda, C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer,*Boll. Un. Mat. Ital.* (2) **3** (1940), 5–7.

[51] Nash, J. F. Jr., Equilibrium points in n-person games, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **36** (1950), 48–49.

[52] Neumann, J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergeb. Math. Kolloq.* **8** (1937), 73–83.

[53] Palais, R. S., A simple proof of the Banach contraction principle, *J. Fixed Point Theory Appl.* **2** 2 (2007), 221–223.

[54] Peano, G., *Opere scelte. Vol. I.–III.*, Edizioni Cremonese, Roma, 1957, 1958, 1959.

[55] Perron, O., Zur Theorie der Matrices, *Math. Ann.* **64** 2 (1907), 248–263.

[56] Picard, E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivée partielles et la méthode des approximations successives, *J. Math. Pures. et Appl.* **6** (1890), 145–210.

[57] Pompeiu, D., Sur la continuité des fonction de variables complexes (ph.d. thesis), *Ann. Fac. Sci. de Toulouse* **7** (1905), 264–315.

[58] Presić, S., Sur l'équation fonctionnelle $f(x) = H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x))$, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Math. Fiz.* 118 (1963), 17–20.

[59] Riesz, F., Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **7** (1934), 34–38.

[60] Rogers, C. A., A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem, *Amer. Math. Monthly* **87** 7 (1980), 525–527.

[61] Rus, I. A. Petruşel, A. and Petruşel, G., *Fixed point theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[62] Sadovskiĭ, B. N., On a fixed point principle, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** 2 (1967), 74–76.

[63] Schauder, J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Stud. Math.* **2** (1930), 171–180.

[64] Shapiro, J. H., *A fixed-point farrago*, Universitext, Springer, [Cham], 2016.

[65] Smart, D. R., *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66, Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[66] Sperner, E., Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.* **6** (1928), 265–272.

[67] Tarski, A., A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications, *Pacific J. Math.* **5** (1955), 285–309.

[68] Tychonoff, A., *Ein Fixpunktsatz*, *Math. Ann.* **111** (1935), 767–776.

[69] Volterra, V., *Opere matematiche: Memorie e note. Vol. I-V*, Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1954–1962.

[70] Walter, W., Remarks on a paper by F. Browder about contraction, *Nonlinear Anal.* **5** (1981), 21–25.

[71] Zeidler, E., *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer-Verlag, New York, 1986, Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wadsack