

Simonovits András

Válogatott fejezetek a matematika történetéből

Elméleti matematika

SIMONOVITS ANDRÁS

VÁLOGATOTT
FEJEZETEK
A MATEMATIKA
TÖRTÉNETÉBŐL

Második, javított kiadás

© Simonovits András, Typotex, Budapest, 2009, 2024

ISBN 978 963 493 302 1

ISSN 1788-1811

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kínálatunkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*

és a *facebook/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

A kötetet gondozta: Gerner József

A borítót Szalay Éva készítette

Tartalom

1. Bevezetés	9
2. Az ókori matematikáról	13
2.1. Bevezetés	13
2.2. Az ókori számírás	14
2.3. Egyiptomi és mezopotámiai előzmények	14
2.4. A görög geometria	16
2.5. A görög számelmélet	19
2.6. A görög analízis	21
2.7. A hanyatlás	28
3. Középkori matematika	31
3.1. Bevezetés	31
3.2. Kína és India	31
3.3. Az iszlám hegemonia	33
3.4. Európa megélénkül	35
4. Az újkori matematika kezdete	39
4.1. Bevezetés	39
4.2. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete	40
4.3. A logaritmus felfedezése	44
4.4. A binomiális tétel	47
4.5. A számelmélet újjászületése	49
4.6. Koordináta-geometria	50
4.7. Elemi analízis	52
5. A kalkulus születése	55
5.1. Bevezetés	55
5.2. Előzmények	55

5.3.	Az első áttörés: differenciálszámítás	56
5.4.	A második áttörés: integrálszámítás	60
5.5.	Alkalmazások	63
5.6.	A prioritási vita	66
6.	Mátrixok és determinánsok	69
6.1.	Bevezetés	69
6.2.	Lineáris algebrai egyenletek	69
6.3.	Lineáris differenciálegyenletek	71
6.4.	Lineáris algebra	76
7.	A variációszámítás kialakulása	79
7.1.	Bevezetés	79
7.2.	Speciális variációszámítási feladatok	79
7.3.	Általános variációszámítási feladatok	82
7.4.	Civakodás és elismerés	85
8.	A kalkulusról az analízisig	89
8.1.	Bevezetés	89
8.2.	Az euleri heurisztika	90
8.3.	Függvények és függvénysorok	92
8.4.	Határérték és valós számok	99
9.	Komplex számok és komplex függvénytan	105
9.1.	Bevezetés	105
9.2.	Komplex számok	105
9.3.	A komplex függvénytan kialakulása	107
10.	Euler és a modern számelmélet	113
10.1.	Bevezetés	113
10.2.	Euler számelméleti eredményei	113
10.3.	További fejlemények	118
11.	Paradoxonok a valószínűség-számításban	123
11.1.	Bevezetés	123
11.2.	Paradoxonok a szerencsejátékokban	123
11.3.	A nagy számok törvényei	128

12. Lehetetlenségi tételek	133
12.1. Bevezetés	133
12.2. Megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek?	133
12.3. A szabályos sokszögek szerkeszthetősége	137
12.4. A párhuzamosok posztulátuma	139
12.5. Kontinuumhipotézis	141
13. Mérték és funkcionál	145
13.1. Bevezetés	145
13.2. A mértékelmélet kialakulása	145
13.3. A funkcionálanalízis születése	148
14. A társasjátékoktól a gazdasági viselkedésig	157
14.1. Bevezetés	157
14.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok	158
14.3. A többszemélyes változó összegű játékok	160
14.4. Az extenzív alakú játékokról	162
14.5. További fejlődés	164
15. Csillagászat és matematika	167
15.1. Bevezetés	167
15.2. A görög hagyomány	167
15.3. Kopernikusz rendszere	170
15.4. A kopernikuszi fordulat után	175
Függelék	179
Történelmi névtár	187
Történelmi naptár	209
Feladatmegoldások	213
Irodalomjegyzék	225
Tárgymutató	231

1. fejezet

Bevezetés

1965-ben, amikor beiratkoztam az ELTE TTK matematikus szakára, az V. éveseknek még kötelező volt matematikatörténetet hallgatniuk. Amikor azonban 1969-ben V. éves lettem, az előadó egyéb elfoglaltsága miatt elmaradt a matematikatörténeti kurzus. Tudomásom szerint manapság már egyáltalán nem tanítanak matematikatörténetet matematikushallgatóknak. Kérdések vetődnek fel: miért lenne érdemes egyáltalán matematikatörténetet tanítani és tanulni? Miért nem elég a legújabb felfogás szerint megismerkedni a matematikával?

Több válasz is adható e kérdésekre. Íme néhány lehetséges válasz (vö. Kline, 1972): 1) Önmagában is érdekes, hogy miképp húzták föl elődeink a matematika „végleges épületét”. 2) Jobban megértjük a végleges eredményt, ha megismerjük a hozzávezető rögzös utat. 3) A matematika története fényt derít a matematika különféle eredményeinek egymáshoz való viszonyára. 4) A matematikatörténet rávilágít, hogy a fejlődés tényleges időrendi útja gyakran ellentétes irányú az oktatási sorrenddel: az előbbi induktív (a konkrétól az elvontig halad), az utóbbi deduktív (az elvonttól a konkrétig halad). 5) A matematikai szabatoság fogalma történetileg változott: a régi görögök szabatoságát az újkorban felváltotta egy lazább megközelítés, hogy jóval később – magasabb szinten – vissza térjenek a logikai pontosságához.

Pólya György munkásságát követve (például Pólya, 1968) külön hangsúlyt fektetek a heurisztikus módszerekre, amelyek segítettek az úttörésben. Ilyen heurisztikára példa Arkhimédész „mechanikai bizonyítása”, Leibniz dy/dx „törtje”, Johann Bernoulli optikai megoldása a leggyorsabb lesiklás pályájára, Euler nyaktörő mutatója $\zeta(2) = \pi^2/6$ megtalálásánál, hogy csak a legnevezetesebbeket említsem. Lehet, hogy sok ma-

tematikus viszolyog ezektől a „megalapozatlan” módszerektől, de gyakran csak így lehetett elsőként célba érni. Aztán ha már megvan a helyes definíció és a helyes eredmény, akkor ki lehet építeni a szabatos bizonyítást is. De csak akkor!

Több mint húsz év óta tanítok közgazdászokat matematikára és matematikusokat közgazdaságtanra, és mindig meglepődöm, hogy milyen keveset tudnak a hallgatók a matematika történeti fejlődéséről. Például: mikor jött létre a valószínűség-számítás? Hogyan született a lineáris algebra? Előadásaimban mindig igyekeztem felvillantani a matematika-történeti hátteret, de soha nem volt elég időm belemenni a részletekbe (vö. Simonovits, 1998). Úgy gondolom, hogy érdemes megpróbálni egy féléves előadássorozatban felvázolni a matematikatörténet néhány érdekes és fontos eseményét és folyamatát: válogatott fejezeteket a matematika történetéből.

A rövidség kedvéért nem időrendben, hanem témák szerint haladunk. Persze, igyekszem minél inkább követni a történeti fejlődést, s úgy összeállítani a tematikát, hogy az egyszerűbb dolgok megelőzzék a bonyolultabbakat.

Mivel a magasabb matematikát ismerőknek szánom a könyvet, igyekszem az egyébként kitűnő népszerűsítő könyvekben (lásd Irodalomjegyzék) megszokottnál részletesebben kidolgozni a matematikai kérdéseket, sőt feladatokat is tűzök ki, amelyek megoldását a könyv végén mutatom be. Ugyanakkor nem lévén matematikatörténész, nem tudok (de nem is akarok) túlzottan belemerülni a történeti részletekbe. A jobb áttekinthetőség kedvéért a szöveget igyekszem minél inkább modulárisra tenni; tételek, feladatok, példák tagolják a szöveget, akár csak a matematika-könyvekben.

Megismétlem, hogy ebben a könyvben – néhány kivételtől eltekintve – alig foglalkozom az általános történeti háttérrel, illetve az egyes matematikusok életével, csak a könyv végéhez csatolok majdnem minden szereplő matematikusról rövid, néhány mondatos életrajzot. A születési és halálozási évet a név első előfordulásakor közlöm. Néhány fejezetben bővebb történeti elemzést is adok. Történelmi tanulmányainkból is tudhatjuk, mennyire összefonódott a társadalom, a technika, a fizika és a matematika fejlődése. Ugyancsak figyelemre méltó a legnagyobb matematikusok sokoldalúsága: Arkhimédész az ókor legnagyobb hadmérnöke, Pascal a francia esszé nagymestere, Newton a valaha élt egyik legnagyobb elméleti és kísérleti fizikus, Leibniz az egyik legnevesebb filozófus, és Gauss is kiemelkedő fizikus és térképész volt. Még a 20. századi matematikusóriások

közt is találunk polihisztorokat: Poincaré a matematika és a fizika számos területén alkotott maradandót, és Neumann János a logikán, a funkcionálanalízisen kívül a számítógép és a játékelmélet egyik megteremtője.

Szándékosan használok majdnem mindenütt modern jelöléseket és fogalmakat, mert a hangsúlyt nem annyira a történeti hűsége, hanem a matematika jobb megértésére helyezem. Ezt a módszert követi a könyvben gyakran hivatkozott Smith (1929) és Fauvel–Gray (1987) forrásgyűjtemény is, amely számos eredeti mű angol fordítását adja meg.

Könyvem olvasásakor néha érdemes bekapcsolni a számítógépet, hogy beprogramozzunk néhány feladatot és kiszámítsuk a keresett értéket. S ha alkalmanként a függvénytáblát is kézbe vesszük, vagy a zsebszámológépet is használjuk, akkor talán jobban megértjük, milyen fáradságos volt számolni az elektronikus számítógép megjelenése és elterjedése előtt.

Külön gondot okozott a bőséges anyagból való válogatás. El akartam kerülni a népszerűsítő művek gyakori hibáját, hogy a közérthetőség kedvéért túl sokat foglalkoznak viszonylag egyszerű kérdésekkel, és lényegében nem jutnak túl a 18. századon. Egy-egy példával élve: az egyébként kiváló Boyer (1968/1991) könyvben a Newton és Leibniz előtti rész 400 oldal, míg a Newtonnal és Leibniz-cel kezdődő rész alig több, mint 200 oldal. (Még aránytalanabb Sain (1986) magyar nyelvű műve, de arányosabb a magyarul is megjelent nagyon tömör Struik (1948).) Értékes ismeretterjesztő írások találhatók a következő folyóiratokban: A Természet Világa, Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Mathematical Intelligencer. A világhálón is sok értékes forrás van, kiemelem a [http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history.mathematicians](http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history/mathematicians) honlapot és a Wikipédiát. A részletek kifejtése helyett az Olvasó figyelmébe ajánlom az Irodalomjegyzékben is szereplő műveket, amelyek a könyv eme hiányosságait pótolják. Saját korlátaim miatt ki kell hagynom olyan fontos eseményeket, mint a modern algebra és geometria kialakulása (az utóbbiról jó áttekintést nyújt Coxeter, 1969 vagy Filep, 1997, 11. fejezet). Saját érdeklődésemet követve viszont bevettem olyan részleteket, mint a játékelmélet kialakulása.

Ugyanakkor nem akarom lexikonszerűen egyszerűen felsorolni a bonyolultabb eredményeket, ha nem tudok legalább utalni a matematikai részletekre. Ez nem mindig könnyű. Míg például a nagy számok Bernoulli-féle (gyenge) törvényének a matematikai hátterét még vázolom, a többi „törvény” (centrális határeloszlás vagy az erős törvény) bizonyítására már csak távirati stílusban utalok.

A legnagyobb matematikusok életéről szórakoztató, bár néha pontatlan beszámolót ad Bell (1937). Sokkal mélyebb, de szelektív Gingyikin

(2001) könyve, amely hosszú oldalakon keresztül mutatja meg néhány kiemelkedő matematikus és fizikus életét és munkásságát. Szellemében könyvemhez talán legközelebb Stillwell (1989) és Filep (1997) áll. Tömör-sége miatt említem Stewart (1987) remekművét. Külön kiemelek két ma-tematikatörténetet, amelyek matematikusok számára íródtak: az egyik Hodgkin (2005) – viszonylag rövid (280 o.) és koncentrált, de nagyon alapos és filozofikus; a másik Kline (1972) – nagyon részletes (1200 o.) és célratoró. Bár a magyar vonatkozások ismertetésekor szándékosan vissza-fogom magam, felhívom a figyelmet egy tartalmas kötetre, amely a 20. századi magyar matematikáról szól (Horváth, szerk. 2006).

Remélem, előadásaimmal sikerül fokoznom a hallgatóság érdeklődését e méltatlanul elhanyagolt terület iránt, és a könyvben említett, a témáról írt további könyvek és cikkek olvasásával olvasóim és hallgatóim elmélyítik majd ismereteiket.

Köszönetemet fejezem ki Benedek Gábornak, John Francis-nak, Föl-desi Imrének, Freud Róbertnek, Kőrösi Gábornak, Major Péternek, Márki Lászlónak, Pataki Jánosnak, Simonovits Miklósnak, Solt Györgynek, Székely J. Gábornak, Tasnádi Attilának és Tóth Jánosnak a korábbi változa-tokhoz fűzött megjegyzéseikért. Külön köszönettel tartozom Rác Andrásnak, aki áldozatos munkával mondatról mondatra átvizsgálta a könyv egy korábbi változatát, és Gerner Józsefnek, a Typotex gondos szerkesz-tőjének a könyv véglegesítéséért. Hála illeti a Rajk László Szakkollégium egykori (1999-es) hallgatóit, valamint a BME Matematikai Intézetének hallgatóit (például Béla Szilviát, Farkas Dórát, Gyurcsek Andrást, Kőrö-si Attilát, Rác Lászlót és Szabó Balázst), akik alaposan kommentálták a különféle változatokat. Természetesen az esetleges hibákért kizárólag én vagyok felelős. Emellett köszönettel tartozom főmunkahelyemnek, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének, és két oktatási munkahelyem-nek, a BME Matematikai Intézetének és a Középeurópai Egyetem Köz-gazdaságtani Tanszékének a nyugodt munkakörülményekért.

Az elektronikus kiadás készítésekor a javításoknál különösen nagy mértékben támaszkodtam Freud Róbert megjegyzéseire, amelyeket az 1. kiadáshoz fűzött.

Budapest, 2024. április

Simonovits András
e-mail: simonovits46.andras@gmail.com

2. fejezet

Az ókori matematikáról

2.1. Bevezetés

„Már a régi görögök (sőt a sumérok és a babiloniak) is tudták...”. Remek könyvek születtek az ókor matematikájáról, amelyek közül magyarul is olvasható van der Waerden (1954) – szerzője mellesleg a modern algebra egyik atyja volt – és Neugebauer (1970).

Történeti háttérként a következőket említjük meg: az egyiptomi és a mezopotámiai civilizációk hatalmas folyamok (Nílus, Tigris és Eufrátesz) partjain alakultak ki, és a mezőgazdasághoz szükséges öntözéshez naptárkészítésre, tehát csillagászatra és matematikára volt szükségük. E tudományok művelői a papok voltak. A görög civilizáció fejlődése viszont más jellegű volt. I.e. 600 és i.e. 336 között a görögség városállamokban élt, amelyekből kulturálisan is kiemelkedett az athéni városállam. Nagy Sándor makedón uralkodó i.e. 336 és i.e. 323 között meghódította a görög városállamokat, majd a Közel-Keletet (Perzsiát, Egyiptomot stb.), s birodalmából halála után kialakultak az óriási *hellenisztikus* államok. Szempontunkból a legfontosabb Egyiptom központja, Alexandria. Háttérolvasmányként ajánljuk az ókori természettudományokat áttekintő Szabó–Kádár (1984) könyvet.

A görög korszak alapos tárgyalása önmaga külön kurzust igényelne. Itt csak önkényesen kiválasztott témákat vázolhatunk, 2.2. szakasz: számírások, 2.3. szakasz: Egyiptom és Mezopotámia, 2.4–2.6. szakasz: a görög geometria, számelmélet, analízis és 2.7. szakasz: a görög hanyatlás.

2.2. Az ókori számírás

Külön kitérek az ókori számírásokra, mert tanulságosnak vélem, hogy a mai rendszerhez képest milyen ügyetlen számírást alkalmaztak (vö. van der Waerden, 1954, 64–85. o.)

Érdekes módon a helyértéket már a sumérok (i.e. 2400 körül) is ismerték, és oszthatósági okokból 60-as számrendszerben számoltak. (Mi is ezt tesszük, amikor órában – vagy fokban –, percben és másodpercben megadott adatokat össze akarunk hasonlítani.) Sőt, ismerték a mi tizedes törtjeink elődeit is. Csupán két dolgot nem ismertek: a számjegyeket és a nullát. A számjegyek helyett a rómaiakhoz hasonlóan „számjeleket” használtak, és a 60-as számrendszer miatt 59 számjelre volt szükségük. Ékirásos nyers agyagtábláikat a gyakori tűzvészek cseréptáblává égetve hagyták az utókorra.

A görögök számírása először a római rendszerhez volt hasonló, később egy ügyesebb rendszert, az alfabetikust vezették be: az ógörög ábécé első 9 betűjével jelölték az 1 és a 9 közti számokat: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ stb.; a 10–18. betűvel jelölték a tízeseket, például $\iota = 10$, $\kappa = 20$ stb. és a 19–27. betűvel a százásokat: $\rho = 100$, $\sigma = 200$, majd az ezreseknel újra kezdték a betűzést, csak egy vesszőt tettek a betű elé: $\alpha = 1000$. Ez a rendszer azonban lehetetlenné tette a változókon alapuló algebrai írásmódot: Eukleidész már nem ismerte a korábban alkalmazott $\Gamma\Delta$ jelölést a Γ és Δ összegére, és még a számolás is nehéz volt ezzel a rendszerrel. A törteteket viszont a maihoz hasonlóan írták.

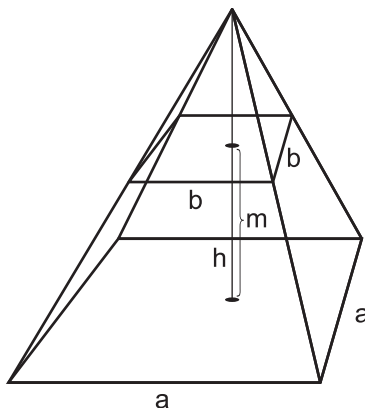
2.1. feladat. Szorozza össze az LI és az IL római számokat!

2.3. Egyiptomi és mezopotámiai előzmények

Az egyiptomiak már i.e. 2700 körül olyan magas piramist építettek, mint a Gellért-hegy (146 m). Ehhez fejlett sík- és térmértani ismeretekre volt szükségük. Például ismerték a Pitagorasz-tételt. Ízelítőül egyetlenegy „egyiptomi” tételt mutatunk be (2.1. ábra). Múzeumi lelőhelyéről moszkvai papirusznak nevezik a tételt tartalmazó dokumentumot.

2.1. tétel. *(Moszkvai papirusz, i.e. 1890.) Legyen a négyzet alapú gúla és a csonka gúla magassága: h illetve m , a gúla alsó és felső négyzetének az oldalhossza: a , illetve b . Ekkor a két térfogat*

$$V = \frac{1}{3}a^2h, \text{ illetve } V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)m.$$



2.1. ábra. A csonka gúla térfogata

Bizonyítás. Egy háromszög alapú hasáb három olyan azonos alapterületű tetraéderre bontható, amelyeknek azonos a magasságuk, tehát a háromszög alapú hasáb térfogata a tetraéder térfogatának a háromszorososa. A négyzet alapú hasáb két egybevágó, háromszög alapú hasábra bontható, tehát a négyzet alapú gúla térfogata a négyzet alapú hasáb térfogatának az egyharmada. A csonka gúla térfogata viszont egy nagy és egy kis gúla térfogatának a különbsége. $\square$

Megemlítjük, hogy az egyiptomiak (Rhind-papirusztekercs, i.e. 1700 körül) már a $(16/9)^2 \approx 3,16$ jó közelítő értéket használták az egységsugarú kör fél területére, a mai π -re. (Rhindnek hívták azt a személyt, aki a papiruszt Luxorban megvásárolta és a British Museumnak ajándékozta.)

Érdekes, hogy a mezopotámiaiak a csonka gúla térfogatára általában egy rossz képletet, nevezetesen az $(a^2 + b^2)m/2$ -t használták, pedig ismerhették a helyes megoldáshoz szükséges $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$ képletet (vö. van der Waerden, 1954, 130–131. o.). A π értékével sem bajlódtak túl sokat, durván 3-nak vették, pedig az csak az egységkörbe írt hatszög fél kerülete. Itt jegyezzük meg, hogy bár az egyiptomi és a babiloni írást 1822-ben, illetve 1850 körül megfejtették, a matematikai szövegek értelmezése gyakran többértelmű.

Ugyanakkor a mezopotámiaiak a másodfokú egyenletet is meg tudták oldani 4000 évvel ezelőtt, de nem ismervén a negatív számokat esetszétválasztásra kényszerültek aszerint, hogy 0, 1 vagy 2 pozitív gyök létezik. Ez a hiányosság egyébként 1500-ig szinte az egész világon fennmaradt.

Meglepő, hogy a babiloniak ismertek egy hatékony eljárást (a mi

Newton-algoritmusunkat, vö. 5.4. feladattal) a négyzetgyök kiszámítására, és mivel (60-as alapú) helyértékes rendszert használtak, hihetetlen pontosan tudtak számolni vele (Boyer, 1968/1991, 27. o.).

2.2. feladat. Négyzetgyökkvonás. Egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatjuk ki:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\beta}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám. a) Bizonyítsuk be, hogy a második lépéstől kezdve a sorozat monoton csökkenően konvergál $\sqrt{\beta}$ -hoz! b) Mutassuk meg, hogyha sikerül β -ból egy jó nagy négyzetszámot leválasztani, azaz $\beta = b^2 + c$, ahol $b, c > 0$, és c/b kicsi, akkor az $x_0 = b + c/(2b)$ „jó” felső közelítést ad!

2.1. példa. A 2.2. feladat eljárásával a babiloniak a $\sqrt{2} = 1,414222$ közelítést kapták, amely csak az utolsó jegyben hibás.

2.4. A görög geometria

Az előző szakaszban láttuk, hogy már a görögök előtt is volt matematika. A görög matematikusok voltak azonban az elsők, akik az i.e. 6. századtól kezdve felismerték, hogy (tovább nem definiálható) alapfogalmakat kell bevezetni, bizonyításra nem szoruló axiómákat kell megfogalmazni, majd a fogalmak definíciójával tételek mondhatók ki, amelyeket bizonyítani kell. Ez a legkönnyebben a geometriában végezhető el.

Talán a kis-ázsiai Thalész (kb. i.e. 585) volt az első matematikus, aki nemcsak kimondott (korábban már ismert, és vélhetőleg Keletről importált) tételeket, hanem megpróbált logikus bizonyításokat adni rájuk. Elemi tétele a nevét viseli: A félkör átmérője a félkörív bármely pontjáról derékszögben látszik.

A dél-itáliai Püthagorasz (kb. i.e. 550) nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. A róla elnevezett tételt – a derékszögű háromszög átmérőjére emelt négyzet területe egyenlő a befogókra emelt négyzetek területének összegével – már korábban is ismerték. Úgy tűnik, hogy a húr hosszak aránya és a zenei harmónia közti összefüggést azonban ő fedezte föl. Legegyszerűbb megfigyelése: ha egy húr hosszát megfelezzük, akkor kétszer nagyobb rezgésszámú hangot, oktávot ad, amely egybehangzik az eredeti hanggal.

Bonyolultabb osztásnál, amikor a húrt 12 egyenlő részre osztjuk, és ebből 8 vagy 9 egységet veszünk, akkor a hang rezgésszáma harmonikusan változik: kvinttel („szó”) vagy kvarttal („fá”) magasabb hangot kapunk.

Bár az athéni Platón (i.e. 427–i.e. 347) elsősorban filozófus volt, de iskolájában (az Akadémiában) nagy súlyt fektetett a matematikai képzésre – mint a logikus észjárás segítőjére. Nem csoda, hogy iskolájában találjuk meg a kor nagy matematikusait: Arkhütaszt (kb. i.e. 428–kb. i.e. 365) és különösen Theaitetoszt (kb. i.e. 414–i.e. 369) – aki felfedezte a 4. és az 5. szabályos poliédert, az oktaédert és az ikozaédert (van der Waerden, 1954, 167. o.). A kor legnagyobb tudósa azonban Eudoxosz (kb. i.e. 410–i.e. 355), aki geometriai tudását csillagászként is gyümölcsöztette, amikor megalkotta az első kozmikus modellt (15.2. szakasz).

Érdemes egy mondatot idézni Plutarkhosz ókori szerző sikerkönyvéből, a *Párhuzamos életrajzokból* (II. kötet, 61. o.), amelyben pengeélesen leírja, miért utasította el Platón a geometria mechanikai szemléltetését. „De Platón felháborodott ezen, és szemrehányásokat tett nekik [Eudoxosznak és Arkhütasznak], hogy megsemmisítik és elrontják, ami jó van a geometriában azáltal, hogy az emberek figyelmét a testetlen és elvont tárgyakról az érzékelhető világra fordítják, és ismét testi dolgokkal foglalkoznak...”

Eukleidész (kb. i.e. 300) már a városállamok bukása utáni, hellenisztikus korban élt, és a Nagy Sándor által alapított egyiptomi fővárosban, Alexandriában alkotott. Fő műve a több magyar fordításban is elérhető *Elemek*, amelynek jelentős része az elemi geometriát a ma is használt axiomatikus felépítésben tárgyalta. (A legújabb fordításhoz világhírű matematikatörténészünk, Szabó Árpád írt előszót.) Tudjuk, hogy már előtte is írtak ilyen monográfiákat, de csak az övé maradt fent, mert jobb volt, mint a korábbiak. Azt is tudjuk, hogy nem volt igazán jelentős matematikus, de elsőrendű tankönyvet írt, amely az elődök munkáit ragyogóan összegezte. Időtállóságára jellemző, hogy mai középiskolás geometriai könyveink is az *Elemeket* követik.

Itt csak az I. könyv felépítését vázoljuk röviden. Ismert tételeket sorolunk fel. I.1. Az egyenlő szárú háromszög megszerkeszthető. ... I.15. Csúcsszögek egyenlők. ... I.16. A háromszög bármelyik külső szöge nagyobb, mint a másik két csúcsánál fekvő szög. ... I.20. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldalé (háromszög-egyenlőtlenség). ...Egybevágósági tételek...

Sokan támadták a szerzőt, hogy miért kell olyan nyilvánvaló dolgokat bizonyítani, mint amilyen az I.16 vagy az I.20. A válasz nyilvánvaló:

az axiomatikus tárgyalásban nem szabad a szemléletre támaszkodni, a logikai szabatosság megköveteli, hogy „mindent” bizonyítsunk.

A továbbhaladáshoz szüksége volt az V. posztulátumra. *Ha egy egyenes két másik egyenest úgy metsz, hogy azonos oldalán keletkező két szög összege kisebb, mint két derékszög, akkor a két egyenes ezen az oldalon metszi egymást.* Szemléletesebben átfogalmazható az axióma, ha bevezetjük a D.23. definíciót: *párhuzamosnak* nevezünk egy síkban fekvő két egyenest, ha nem metszik egymást. Lássuk tehát az ún. párhuzamossági axiómát: *Bármely egyeneshez és egy külső ponthoz az általuk meghatározott síkban pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.*

És ekkor igazolható az I.32: a háromszög belső szögeinek összege két derékszög. Hasonlóan igazolható az I.16. élesítése: A háromszög két belső szögének összege egyezik a harmadik külső szöggel.

S végül az I. könyv csúcspontja: I.47. (a Pitagorasz-tétel): Egy derékszögű háromszög két befogójára emelt négyzetek területének összege egyezik az átfogóra emelt négyzet területével. A bizonyítás területátalakításon alapul, de nem a középiskolában tanult, hanem annak egyik korábbi változatán, az ún. szélmalmon. Ne feledkezzünk meg I.48.-ról sem, amely a tétel megfordítását mondja ki.

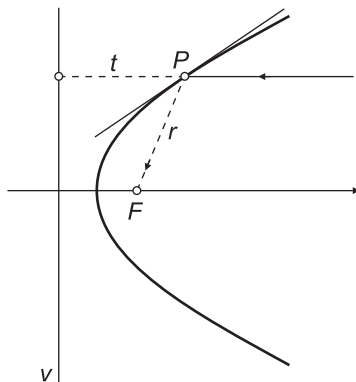
A görög matematikusok gondolkodásának kifinomultságára jellemző, hogy hamar felvetették: a párhuzamosokról szóló, híres V. posztulátum (más néven: axióma) más mint a többi. Ezért is halasztotta Eukleidész az axióma kimondását egészen az I.27. tételig. Mások megpróbálták az V. posztulátumot a többi axiómából tételként levezetni (Szabó, 1978). Csak 1830 körül derült ki (12.4. szakasz), hogy a kísérletezők lehetetlenre vállalkoztak: ez az axióma nem vezethető le a többiből, független tőlük. Ugyanakkor a görögök nem teljesen értették meg, hogy az alapfogalmakat (pont, egyenes, sík) nem lehet a végtelenségig visszavezetni, ezek az axiómákkal együtt határozzák meg a rendszert.

A kritikus és elvont görög matematikai gondolkodásra különösen jellemző, hogy már az i.e. 5. század végén olyan feladatokkal is foglalkoztak, amelyeknek nem volt gyakorlati jelentőségük, elméletileg azonban csak a 19. századi késői utódok tudták azokat megoldani. Ilyen a szögharmadolás, a kockakettőzés (az ún. déloszi probléma) és a kör négyszögesítése (lásd 12.2. szakasz).

Az ókor legnagyobb geometere Apollóniosz volt (i.e. 262 után–i.e. 190 előtt), aki különösen a kúpszeletek terén ért el csodálatra méltó eredményeket (vö. van der Waerden, 1954, 386–424. o. és Sain, 1986, 215–236. o.). Egyetlenegy tételt emelünk ki gazdag munkásságából:

2.2. tétel. (Apollóniosz, i.e. 210 körül.) Az $y^2 = 2px$ (fekvő) parabola felső ágának az x_0 pontbeli érintője az y -tengelyt $y_0/2$ magasságban metszi, ahol $y_0^2 = 2px_0$.

2.3. feladat. Vezessük le a 2.2. tételből, hogy a parabolatükörbe vízszintesen beeső fénysugarak a visszaverődés után átmennek a $(p/2, 0)$ koordinátájú gyújtóponton! (Lásd 2.2. ábra)



2.2. ábra. A parabolatükör, Hajós (1964, 376. ábra, 384. o.)

2.5. A görög számelmélet

A görög számelméletből három tételt emelünk ki, mindhárom megtalálható Eukleidész *Elemen*ben. Részletes elemzést ad Weil (1983, Chapter I).

2.3. tétel. (kb. i.e. 400, leírva Eukleidész, X.27.) Az $x^2 = 2$ megoldása nem írható föl két egész szám hányadosaként, mai szóval $\sqrt{2}$ irracionális.

Bizonyítás. Módszere *indirekt*: feltesszük, hogy létezik két olyan egész szám, p és q , amelyeknek nincs 1-től különböző közös osztójuk, hányadosuk pedig $x = p/q$. Ebből négyzetre emelés után paritási megfontolásokkal ellentmondást kapunk. $\square$

Megjegyzés. Utalunk arra a két közismert tényre, hogy a $\sqrt{2}$ az egységoldalú négyzet átlója, míg $\sqrt{5}$ a szabályos ötszög szerkesztésénél lép föl. Több matematikatörténész azt gondolja, hogy a görögök az egymásba

skatulyázott (már a babiloniak által is ismert) csillagötszögek (egyébként a püthagoreusok jele) végtelen sorozatából jöttek rá először az irracionális számok létezésére, nevezetesen $x^2 = 5$ gyökének irracionalitására.

2.4. tétel. (Eukleidész, IX.20.) *A prímszámok sorozata nem véges (vagyis végtelen).*

Bizonyítás. Szintén indirekt. Tegyük föl, hogy véges sok prímszám van, $p_1, \dots, p_n$, vegyük a szorzatukat, adjunk hozzá 1-et: $p_1 \cdots p_n + 1$. Ekkor vagy egy új prímszámot kapunk, vagy egy új prímszám többszörösét, hiszen e szám az előző prímszámok egyikével sem osztható. Ellentmondást kaptunk. $\square$

2.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $4k - 1$ alakú prímszámokból is végtelen sok van!

Mindkét tétel a valaha megalkotott legszebb matematikai tételek közé tartozik, és egyszerűsége ellenére nagyon mély matematikai gondolkodásmódról tanúskodik.

A harmadik tétel a pitagoraszai számhármасokról szól. Ismert, hogy az x, y befogójú és z átfogójú derékszögű háromszögre teljesül az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlőség. Az egyiptomiak ismerték az egyenlet néhány egész értékű megoldását: például $3^2 + 4^2 = 5^2$. Állítólag egy kötélre egyenlő távolságra 3, 4, illetve 5 csomót tettek, és ezeket háromszögben kifeszítve „szerkesztettek” derékszöveget. Nyilvánvaló, hogy egy egész értékű megoldás többszöröse is megoldások, ezért célszerű a relatív prím megoldásokra szorítkozni: $(x, y, z) = 1$. Ezeket nevezik primitív pitagoraszai számhármасoknak. A keleti hatás itt is jelen van: az óbabiloniak számos ilyen számhármást ismertek (van der Waerden, 1954, 123–129. o; 2.3. ábra).

2.5. tétel. *A pitagoraszai számhármасok a következő alakúak:*

$$x = 2mn, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

ahol m, n természetes számok, amelyekre $m > n$, különböző paritásúak és $(m, n) = 1$.

A bizonyítás elemi, azonban hosszúsága miatt (Freud–Gyarmati, 2000, 286–287. o.) nem ismertetjük. Könnyebb belátni, hogy a tételben megadott számok pitagoraszaiak, de hogy más pitagoraszai számhármас nincs, az már nehezebben igazolható állítás.

Történeti jelentősége miatt a tökéletes számokról szóló tételt is ismertetjük. Egy számot *tökéletesnek* nevezünk, ha nála kisebb osztóinak összege egyenlő magával a számmal. Például a 6 és a 28 tökéletes szám.

2.6. tétel. (Eukleidész, IX. 36.) „Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg az összeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.”

Modern jelöléssel: legyen n természetes szám.

Ha $p = 2^{n+1} - 1$ prím, akkor $(2^{n+1} - 1)2^n$ tökéletes.

A mértani sor összegére hamarosan visszatérünk.

Több évszázaddal később, talán az i.sz. 3. században, Diophantos megújította a számelméletet és az algebrát. Egyrészt olyan feladatokat vizsgált, amelyeknek csak egész értékű megoldásai érdekesek. Másrészt elszakadt a korábbi geometriai korlátoktól, és algebrai feladataiban 3-nál magasabb és negatív hatványokat is vizsgált. Külön érdeme, hogy jelöléseket vagy rövidítéseket vezetett be a hatványokra, a műveletekre és az ismeretlenekre, de a mai jelöléseket csak 1500-tól kezdve vezették be az európaiak.