

KESZTHELYI GABRIELLA

milyen színű
a valószínű?

KESZTHELYI GABRIELLA

m i l y e n s z í n ű
a v a l ó s z í n ű ?

A VÉLETLEN MATEMATIKÁJA



TYPOTEX

A könyv megjelenését a kiadói program keretében a Nemzeti Kulturális Alap, valamint a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet támogatta.

A szerző a könyv megírása során a HUN-REN-BME Sztochasztika Kutatócsoport támogatásában részesült.



© Keszthelyi Gabriella, Typotex, Budapest, 2025
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!
keszthelyigabriella.com

Lektorálta: Ráth Balázs

Az 1., 23., 24., 30., 31., 33., 41., 43. és 55. ábrát Miklós Kelemen készítette.

ISBN 978 963 493 307 6

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu

és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Felelős szerkesztő: Juhász Emese

Szerkesztette: Mandl Orsolya

Tördelés: Szalay Éva

Borítóterv: Tillai Tamás

Nyomás, kötés: Central Dabasi Nyomda Zrt.

Felelős vezető: Szentinek Zsolt vezérigazgató

www.dabasprint.hu

TARTALOM

ELŐSZÓ	7
BEVEZETÉS	9
1. CSOMÓSODÁSOK ÉS ILLÚZIÓK	27
2. OKSÁG ÉS INDUKCIÓ	53
3. FÉLREÉRTÉSEK A FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG KÖRÜL	73
4. OKSÁG ÉS FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG	99
5. DEMOGRÁFIA ÉS ÉLETBIZTOSÍTÁSOK	131
6. FAIR JÁTÉKOK, AVAGY MIBŐL ÉL A SZERENCSEJÁTÉK ZRT.?	149
7. A NORMÁLIS MÍTOSZA	173
8. STATISZTIKA	197
9. MODERN VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS	223
FÜGGELÉK	239
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS	251
JEGYZETEK	253

ELŐSZÓ

Ezt a könyvet részben a BME-n a villamosmérnök hallgatóknak tartott valószínűségszámítás-kurzus motiválta, részben pedig a saját élményeim az egyetemről: diákként és tanárként is az volt a tapasztalatom, hogy a valószínűségek világa ingoványos terep sok matematikus számára is, a laikusoknak pedig egyértelműen az. Sokat gondolkodtam, hogy mi lehet ennek a magyarázata, számos ismerőssel, kollégával és baráttal – matekossal és nem matekossal egyaránt – beszélgettem erről az évek folyamán. Arra jutottam, hogy az egyik ok a valószínűségszámítás eredete, ami a babonákhoz és a szerencsejátékokhoz kötődik. A másik ok, hogy az agyunk nem valószínűségek (matematikailag korrekt) felmérésére van huzalozva, hanem sokkal inkább a kockázatkezelésre: nagyobb valószínűségűnek ítélünk olyan eseményeket, illetve stratégiákat, amelyek jobban biztosítják a túlélésünket. De nagyban befolyásolja valószínűségi becsléseinket az is, hogy mennyi időnk van dönteni, illetve mennyire költséges (mennyi agymunkát igényel) az eseménnyel kapcsolatos adatok feldolgozása. Sokszor egyszerűen nincs elég időnk, vagy túl sok az információ, és heurisztikákhoz folyamodunk.

Így a könyvet főleg ez a két szempont strukturálja: egyrészt végig haladok a valószínűségszámítás történetén az ősidőktől napjainkig, mikor milyen szükségletek, alkalmazások segítették elő a fejlődését, másrészt pedig megpróbálom kideríteni, hogy milyen nehézségek gátolnak minket abban, hogy helyesen ítéljük meg bizonyos események bekövetkezésének valószínűségét. Ennek érdekében a könyvet sűrűn átszövik a paradoxonok (illetve olyan problémák, amelyek technikailag nem paradoxonok, de minden esetben józan ésszel nehezen megragadható,

látszólagos ellentmondások) és kognitív torzítások (gondolkodási hibák, amelyekre különösen hajlamosak vagyunk, miközben a körülöttünk lévő tengernyi információt próbáljuk feldolgozni). Ezeket külön is listázom a könyv végén található *Früggelék*ben. Nagyon ügyeltem arra, hogy az olvasót ne terheljem túl felsőbb matematikai fogalmakkal, és a könyv tudományos ismeretterjesztő voltához híven érthető maradjon laikusok számára is. Ugyanakkor vannak benne könnyebb és nehezebb részek, bizonyos paradoxonok egész mély nyúlüregekbe vezetnek. Amennyiben valaki nem merészkedik ezek mélyére, a könyv még akkor is konzisztens marad, de én arra biztatok mindenkit, hogy kövesse és gondolja végig a magyarázatokat.

A *Bevezetés*ben végigveszem a valószínűségek történetét az ősidőktől a reneszánszig terjedően, illetve az ebben az időben uralkodó „minden egyenlően lehetséges” hozzáállást és az ebből fakadó problémákat. A *Csomósodások és illúziók* című fejezetben azt járom körül, hogy események együttjárása, „csomósodása” lehet-e a véletlen műve. Az *Okság és indukció* című fejezetben azt vizsgálom, hogy milyen koncepciókban gondolkodhatunk valószínűségek helyett (kauzalitásban), és mi köze van ennek mégis a valószínűségekhez. Bevezetem a feltételes valószínűség fogalmát, amit tovább boncolok a *Félreértések a feltételes valószínűség körül*ben és az *Okság és feltételes valószínűség*ben. Utóbbiban külön kitérek az időre, hogy milyen szerepet játszik abban, hogy inkább ok-okozatban, mintsem valószínűségekben gondolkodunk. A *Demográfia és életbiztosítások* című fejezet főként arról szól, hogy hogyan motiválták a pestisjárványok az első népszámlálásokat, amiből az első statisztikák és az első élettartambecslések is származnak. A *Fair játékok, avagy miből él a Szerencsejáték Zrt.?* című fejezet a fogadások és különböző játékok birodalmába kalauzol el: a várható élettartam után a várható nyereség fogalmára is fény derül, illetve hogy mit hívunk racionális döntésnek a játékokban. A *normális mítosza* a leghíresebb valószínűségi eloszlás születését és mai napig tartó hatását vizsgálja. A *Statisztika* című fejezetben kifejtem annak történetét és határait, tudományban betöltött szerepét. Végül pedig a *Modern valószínűségszámítás* a terület mai állására, a matematikában és a világban elfoglalt helyére reflektál.

BEVEZETÉS

Az embereket mindig is mélyen foglalkoztatta, hogy milyen erők dolgoznak a világban, mi mozgatja a dolgokat, és milyen jövő vár rájuk. Jelen ismereteink szerint mi vagyunk az egyetlen élőlények, akik tudják magukról, hogy meg fognak halni, ezért agyi aktivitásunk nagy részét is arra fordítjuk, hogy ezt az eseményt a lehetőségekhez mérten elodázzuk. Ugyanakkor nemcsak azt szeretnénk tudni, hogy mi és hogyan lesz (mi a sorsunk, végzetünk), hanem hogy mi és hogyan volt (mi a magyarázat a már megtörtént jelenségekre), és ezt a kettőt egy narratívában akarjuk egyesíteni. Időnk végeessége rákényszerít minket arra, hogy strukturáljuk azt, jelentést adjunk neki. A narratíva egy másik fontos szükségletünket is kielégíti: a bizonytalanság és a kockázat csökkentését. Tudatosan és tudattalanul is rengeteg időt és energiát fordítunk arra, hogy mérlegeljünk, döntéseket hozzunk, aztán pedig a döntések lehetséges következményeit mérlegeljük, és újabb döntéseket hozunk. Kapcsolatunk a világgal és a benne rejlő lehetőségekkel alapvetően formálta a valószínűség fogalmát, később pedig az ellentétes folyamat is beindult: a valószínűség formálta a következtetéseinket, döntéseinket.

Pár ezer éves feljegyzett kultúránkban számtalanszor próbálkoztak ezzel az emberek a tudomány és a vallás keretein belül, de maga a folyamat nem mindig alapos átgondolás mellett zajlik. Sokszor teljesen öntudatlanul mérlegelünk lehetőségeket, vonunk le következtetéseket, vagy hozunk döntéseket. Ebben a könyvben főleg a tudomány által adott

válaszokat vesszük görcső alá. Az oksági és valószínűségi magyarázatok és ezek minden arányú keveréke átszövik mindennapjainkat: tudatosan és mindenféle átgondolás nélkül is használjuk őket.

Véletlen, bizonytalan, kockázatos, valószínű, sanszos, random, várható, esélyes, szerencsés... ezek mind hasonló, mégis egy kicsit más jelentésű szavak: vannak közöttük pozitív kicsengésűek, és arra utalók, hogy egy esemény inkább bekövetkezik, mint nem (például *valószínű, sanszos, esélyes*), illetve negatívabbak, mint a *bizonytalan, random, kockázatos*. Sokszor azonban nem világos, hogy pontosan mit értünk alattuk, nem egyértelmű a használatuk. Ez persze nem csak a magyar nyelvben van így, az 1960-as években a CIA-nál dolgozó Sherman Kent egy egész protokollt fejlesztett ki az ilyen jellegű kifejezések korrekt alkalmazására:

certain (biztos) = 100%

almost certain (majdnem biztos) = 93%

probable (valószínű) = 75%

chances about even (esélyek kb. egyenlőek) = 50%

probably not (valószínűleg nem) = 30%

almost certainly not (majdnem biztosan nem) = 7%

impossible (lehetetlen) = 0%

Konvenciója végül nem épült be a mindennapokba (még a CIA-ba se), pedig használatával ma is sok félreértést el lehetne kerülni.

De nem egyszerűen a szavak megfelelő használatáról van szó: ebben a fejezetben áttekintjük a fogalom legkorábbi megjelenéseit és kialakulásának körülményeit, amelyeket többnyire a végzettség, a bizonytalansággal és a szerencsével asszociáltak. A valószínűség jelentésének alakulása a mai napig hat arra, hogy mi hogyan érzékeljük azt.

Ahogy azt Pierre Redmont megfogalmazta:

„Az emberek [...] hajlamosak egy végzetes és vakon működő erőt társítani a jóhoz, a rosszhoz és általában minden történéshez ebben a világban. Azt hiszik, hogy Fortunát le kell kenye-rezniük, hogy kedvezzen nekik; ezért én úgy gondolom, hogy mindenkinek (nem csak a szerencsejátékosoknak) hasznos lenne tudnia, hogy a valószínűségeknek vannak szabályaik, és ezek a szabályok megismerhetők. Ismeretük hiánya hibákhoz vezet, amelyek miatt nem a sors, hanem saját maguk okolható.”¹

Már a görögök sem vágták

A valószínűség fogalma kivételesen nem az ókori görögöktől származik. A *probabilitas* (valószínűség) szó etimológiája a latin *probabilis* → *probabilitatem* (hihető, plauzibilis, jóváhagyható, megbízható), aminek a töve *probo*, ebből származik a *próba* szavunk is. Egy vélemény hihetőségét, igazolhatóságát jelentette, hogy kiállja-e a próbát. Bár a görögöknek is létezett rá szavuk: *eikos* (ΕΙΚΟΣ), ami azt jelentette, hogy „várható, bizonyos fokú bizonyossággal”, ők sokkal jobban szerették az abszolút igazságot, ami az ő definíciójuk szerint logikával, dedukcióval bizonyítható axiómákból. A platonisták szerint a matematikai fogalmak önálló létezéssel bírnak, és e fogalmak analízisével ismerhetők meg. A valószínűségi érvelést lenézték a korai filozófiában: Arisztotelész a *Phaidón*-ban panaszkodik azokra a filozófusokra, akik „[...] bár hihetően beszélnek, [...] nem azt mondják, ami igaz”.² Szókratész szerint pedig egy matematikus, aki valószínűségekkel érvel, geometriában nem ér semmit.

A „véletlen” ősidők óta a szerencsejátékokkal és a jövőmondással, illetve az istenek szeszélyeivel fonódott össze, nem éppen elősegítve

a valószínűség tudományos előmenetelét. A görögöknek volt szerencse-istennőjük is: *Tükhé* (Τύχη). Ő volt a szerencsejátékosok patrónája (római verziója: Fortuna), akivel a többi istenség sem mert vitába szállni. De Tükhé színre lépését megelőzte egy még ősbibb mítosz: a három testvér, Zeus, Poszeidón és Hadész sorsot vetett, hogy eldöntsék, ki mit fog uralni a világban – így kapta Zeus az eget, Poszeidón a vizeket és Hadész az alvilágot.

Létezik még egy görög szó, amit a véletlen szinonimájaként használunk, ez pedig a *sztochasztikus*. A *στόχος* jelentése „célzás, találgatás”, de a *stochastic* szó először 1662-ben bukkant fel az Oxford University Press szótárában „találgatással, feltételezéssel kapcsolatos” jelentésben.³ Valójában a valószínűség-elmélethez nagyjából semmi nem állt készen az ókori görögök idejében, legalábbis Európában. Vannak, akik szerint a hinduk már rendelkeztek a megfelelő tudással: Arisztotelész idejében (Kr. e. a 4. században) íródott a *Mahábhárata* című eposz, amely többek között taglalja Nala király kalandjait.⁴

A leírás szerint Nala megszállott szerencsejátékos volt, aki a királyságát is elveszítette kockán. Ezután elszegődött szekérhajtónak Rituparna királyhoz, aki „birtokolta a kocka tudományát”, és egy fa egyetlen ága alapján meg tudta becsülni, hány levél és hány gyümölcs terem rajta. Nalát is megtanította erre, aki az újdonsült tudással felvértezve hazatért, és visszanyerte kockán a birodalmát.

A mítosz arra enged következtetni, hogy a hinduknak már megvolt az elégséges aritmetikai és kombinatorikai háttérük ahhoz, hogy matematikai fogalmi keretek között gondolkodhassanak valószínűségekről. Tőlük vették át az arabok, Európába pedig olasz matematikusokon keresztül érkezett meg.