

Számokról és alakzatokról

A kiadó ajánlata:

Bergengóc példatár 1–2.

Bóc István: A kriminális hetedik bé

Pogáts Ferenc (szerk.): Varga Tamás matematikai versenyek 1–3.

Róka Sándor: 137 számrejtvény

Róka Sándor: Hány éves a kapitány?

Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? A matematika tanításáról

Hans Rademacher – Otto Toeplitz

Számokról és alakzatokról



TYPOTEX

Budapest, 2010

A kötet megjelenését az MTA Matematikai Tudományok Osztályának ajánlásával az MTA Könyv- és Folyóirat-kiadó Bizottsága támogatta.

A mű eredeti címe:

Von Zahlen und Figuren.

Zweite Auflage, Julius Springer, Berlin, 1933.

Hungarian translation © Szívás János, Typotex, 2010

Az előszót fordította: Ádám András

Harmadik, javított, jegyzetekkel bővített kiadás

ISBN 978 963 279 029 9

Témakör: *matematika*

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a *TypoKlubba*, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megismerkedhet kínálatunkkal is, egyes könyveinknél pedig új fejezeteket, bibliográfiát, hivatkozásokat találhat, illetve az esetlegesen előforduló hibák jegyzékét is letöltheti.

Kiadványaink egy része e-könyvként (is) kapható:

www.interkonyv.hu

Észrevételeiket a velemeney@typotex.hu e-mail címen várjuk.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Szerkesztette, tördelte és a jegyzeteket írta: Köves Gabriella

A fordítást az eredetivel összevetette: Gerner József

A szöveget gondozta: Szegfű Mária

Borítóterv: Horváth Kornél

Terjedelem: 20,25 (A/5) ív

Nyomás: Séd Nyomda Kft., Szekszárd

Felelős vezető: Katona Szilvia

Tartalom

Előszó	7
Előszó a 2009-es kiadáshoz	11
A törzsszámok sorozatáról	15
Görbehálózatok bejárása	23
Néhány maximumfeladat	31
Összemérhetetlen szakaszok és irracionális számok	41
A talpponti háromszög szélsőérték-tulajdonsága Schwarz szerint	51
A talpponti háromszög szélsőérték-tulajdonsága Fejér Lipót szerint	59
Bevezetés a halmazelméletbe	69
Kombinatorikai problémák	85
A Waring-féle probléma	99
Önmagukat átmetsző zárt görbékről	109
A számokat csak egyféleképpen lehet törzstényezőkre bontani?	121
A négyszínprobléma	133
A szabályos poliéderek	149
Pitagoraszi számok és pillantás a Fermat-féle problémára	161
Egy pontegyüttes burkolóköre	175
Irracionális számok közelítése racionális számokkal	187
Egyenesbevezetés csuklós szerkezettel	197

Tökéletes számok	213
A törzsszámok sorozata végtelen Euler bizonyítása	223
Alapvető dolgok maximumfeladatokról	229
Adott kerülettel rendelkező legnagyobb területű alakzatok (Steiner-féle négycsuklós eljárás)	235
Szakaszos tizedestörtek	243
A kör egy jellemző tulajdonsága	263
Állandó szélességű görbék	269
Az elemi geometriai szerkesztések nélkülözhetetlen eszköze a körző	291
A 30 szám egyik tulajdonsága	309
Név- és tárgymutató	317

Előszó

A matematikát képleteinek sajátos nyelve, integrál- és szumma-jelei magas falként választják el a világ más területeitől. Ami e fal mögött történik, az a kívülálló előtt rendszerint titok marad, ő „puszta számokra” gondol, egy vértelen mechanizmusra, amely megkerülhetetlen szükségszerűség törvényei szerint működik. Annak, aki a fal belső oldalán áll, a fal többszörösen korlátozza a külvilág felé irányuló tekintetét; csakhogy ő túlzottan hajlamos arra, hogy a matematika jelenségeit külön mértékkel mérje, és büszke rá, ha birodalmába avatatlanok nem tolakodnak be. Lehetséges-e ezt a válaszfalat áttörni, a matematikát mások előtt megnyitni – úgy megnyitni mások előtt, hogy azok ebben élvezetet találjanak? A matematika ilyen átélése nem azoknak a szűk körére korlátozódik-e, akik specifikus „matematikai adottsággal” bírnak? Bizonyos, hogy matematikai adottsággal, azaz új matematikai igazságok önálló felfedezésének képességével csak kevesen rendelkeznek. Azonban a muzikalitásnak is csak kevesen vannak olyan értelemben a birtokában, hogy maguk tudnának komponálni valamelyes értékkel bíró darabot; mégis sok muzikális ember van, akik a zenét felfogják, esetleg reprodukálni is képesek, és az bennük mindenképpen örömet ébreszt. Mi úgy hisszük, hogy azoknak az embereknek a hányada, akik egyszerű matematikai dolgokat felfogni képesek, nem csekélyebb azoknak a hányadánál, akiket közönségesen muzikálisnak szokás nevezni – hacsak sikerül leküzdeniük azt az irtózást, amely bizonyos ifjúkori élményeik alapján sokakat mindentől, ami a matematiká-

hoz tartozik, távol tart. E lapok szándéka ezt megkísérelni: ha valaki vállalkozik rá, hogy a matematika valódi jellegét leplezetlenül megmutassa a matematikával szembeni idegenkedés eltűnik. Mintát kívánnak adni mindazon szerteágazó jelenségekből, amelyeket a matematika neve foglal össze – az önmaga kedvéért való matematikából, a belső értékekből, amelyekkel az önmagában bír.

Többen több ízben megkísérelték már, hogy nem matematikusoknak matematikáról beszéljenek. Többszörre azért törekedtek a matematikát érthetővé tenni, hogy a hasznosságát helyezték előtérbe; vázolták és kézzelfogható példákon ecsetelték azt az előnyt, amelyet műszaki vagy egyéb alkalmazásokban szolgáltat. Vagy pedig matematikai játékokról és multságokról írtak könyveket, amelyek sok szórakoztatót tartalmaztak, arról viszont, hogy mi a matematika, csupán torzképet adtak. Avagy végül a matematika alapjait általános filozófiai jelentőségükben fejtegették; ezzel az ilyen lapok olvasójának az érdeklődése – ami pedig a tiszta, az abszolút matematikára irányulna – különleges erővel nyomban a matematikának az ismeretelméleti, világnézeti kihatásai felé terelődik. Ám ebben az esetben is alapjában véve a matematikának a külső értékeire pillantunk rá, az értékét illetően rajta kívül keressük a mércét. Mi még az előadandó gondolatok matematikán belüli hatásainak sem fogunk helyet adni, azaz olyanoknak, amelyek a matematika más területein – úgyszólván belső – alkalmazásokkal bírnak. A matematika épületének természetéhez tartozó igen lényeges jelenséget kell ezzel mellőznünk: a nagy és meglepő kapcsolatokat, amelyek minden irányban átszövik ezt az épületet. A mi kereteink között kénytelenség erről lemondanunk, holott a legnagyobb matematikai felfedezések éppen azok, amelyek ilyen oldalági összeköttetések, ilyen távoli kapcsolatok feltárásában nyilvánulnak meg. Ahhoz, hogy ezeket bemutassuk, átfogó, hosszadalmas előkészületekre volna szükség és még inkább a felfogóképesség alapos csiszolására, ami nem állhat szándékunkban.

Egyszóval: eltérően attól, ahogyan más tudományterületek a kívülállóknak megmutatkoznak, tárgyalásunk súlypontját nem a tények képzik, hanem a jelenségek típusai, a kérdések felvetésének és a problémák megoldásának módszerei. A nagy matematikai eredmények, a teljes elméletek megértése persze megfelelő iskolázottságot, tartós elmélyedést igényel. Ez is egészen hasonló a zenéhez. Aki első alkalommal látogat el egy hangversenyre, semmiképpen sem ítélné meg Bach művét, „A fúga művészetét”-t, nem tekintheti át azonnal egy szimfónia felépítését. De ezek mellett a nagy zeneművek mellett léteznek kis dalok, amelyekben olykor él valami az igazi fenségből, és amelyekben a géniusz mindenki számára megnyilatkozik. Ilyen „kis dalokat” szeretnénk itt a matematika nagy birodalmából kiragadni: témák egy sorozatát, amelyek mindegyike külön-külön, önmagában is teljesen érthető és értékelhető; egyik sem kíván egy óránál hosszabb előadást; a következő alkalomra tartalmilag elfelejthetjük, ami előzőleg elhangzott. Arról is megfeledkezhetünk, amit fiatal éveinkben a matematikából meg kellett tanulnunk: logaritmusokról, trigonometriáról sehol sem lesz szó, hallgatni fogunk a differenciálszámításról vagy éppen az integrálokról is. Az egybevágósági tételekre, a zárójeles kifejezések összeszorzására fogunk igen fokozatosan visszaemlékeztetni – ez lesz minden.

Lehet, hogy nem a kezdő melódia íve az egyetlen egy dalban, ami azt széppé teszi; az egésznek a jellegzetes ötletét adhatja az alaptéma kis módosítása, a hangnem meglepő változtatása is; ezt csak az tudja igazán érzékeltetni és felfogni, aki előbb az alaptémát pontosan megfigyelte. Hasonló értelemben kell olvasónknak pontosan és érdeklődéssel „odafülnie” a kérdésfeltevés alapmódtívumára, amellyel egy téma kezdődik, a kérdésfeltevés felépítésére, az első egyszerű példákra, amelyek egy-egy téma begyakorlását adják, mielőtt a fő gondolat következne; egy fokkal aktívabban kell követnie a gondolatmenetet, mint ahogyan azt az olvasmányok igénylik. Ha ezt teszi, úgy egyik témánál sem fog nehézséggel járni, hogy annak legfőbb mondanivalóját felfogja; akkor képes lesz egyet-mást meglátni abból, amit nagy gondolko-

dók némelyike tárt fel, amikor az elmélet birodalmát átmenetileg maga mögött hagyva valamely egyszerű kérdést egy apró, önmagában is zárt műalkotással, a valódi matematikai gondolkodás egy kis darabjával világított meg.

Értékes tanácsaikért és javaslataikért, valamint a korrigáláskor tanúsított baráti segítségükért mindenekelőtt *H. Cloos* úrnak (Bonn), *S. Heller* úrnak (Schleswig), *A. Johnsen* úrnak (Berlin), *H. Lessheim* úrnak (Breslau), *G. Neugebauer* asszonynak (Göttingen), *E. Staiger* asszonynak (Schleswig) mondunk köszönetet. Különös hálánk illeti a kiadvállalatot érdeklődéséért, amelyben könyvünket részesítette.

Breslau és Bonn, 1930. április

H. RADEMACHER
O. TOEPLITZ

Előszó a 2009-es kiadáshoz

A művet először 1930-ban „Von Zahlen und Figuren” címen jelentette meg Berlinben a Springer kiadó, majd 1933-ban a nagy sikerre való tekintettel újra kinyomtatták. Azóta számos nyelvre lefordították. Angol nyelven először 1957-ben, majd 1964-ben és 1970-ben is kiadták.

Magyarul eddig két kiadásban jelent meg, mindkettőt a Tankönyvkiadó adta ki 1954-ben. Az egyik 1000 példányban a nagyközönség számára, a másik a Középiskolai szakköri füzetek sorozatban. Ez utóbbi külső borítóján nem tüntették fel a szerzők nevét.

Otto Toeplitz (1881–1940) Németországban született zsidó származású matematikus. 1928-tól 1935-ig a bonni egyetem professzora. A nácik hatalomra jutása után állásától megfosztották. 1939-ben Palesztinába menekült, nem sokkal később Jeruzsálemben halt meg. Meghatározó vezető egyénisége volt kora matematikus társadalmának. Nevéhez fűződik a Calderón–Toeplitz-operátor, a Silverman–Toeplitz-tétel, a Hellinger–Toeplitz-tétel, a Toeplitz-matrix.

Hans Rademacher (1892–1969) szintén Németországban született, evangélikus családban. A nyelvek és a természettudomány területén már nagyon fiatalon komoly eredményeket ért el. 1917-ben doktori fokozatot szerzett, 1919-től a berlini, 1922-től a hamburgi, majd 1925-től a breslauer egyetemen dolgozott. Pacifista nézeteiért a náci kormány 1934-ben kiutasította az országból. Rockefeller-ösztöndíjjal sikerült bejutnia a pennsylvaniai egye-

temre az Egyesült Államokba. Nyugdíjba vonulásáig itt dolgozott, de utána is aktív marad a New York University oktatójaként.

A valós függvénytan, a számelmélet és a mértékelmélet területén ért el kimagasló eredményeket. Nevéhez kapcsolódik többek között a Dedekind-összegekre vonatkozó törvény általánosítása, a Rademacher-függvény, a Rademacher-eloszlás, a Rademacher-tétel, a Rademacher–Kolmogorov-tétel, a Rademacher-összeg, a Rademacher-sorozat.

A két kiváló matematikus érdeklődő nem matematikus laikusoknak, középiskolás diákoknak írta ezt a könyvet, amely magyar tudósgenerációkra is nagy hatással volt. Példaként csak néhányat említünk közülük:

Péter Rózsa (1905–1977) matematikus, 1955-től haláláig az ELTE Természettudományi Karának professzora. A rekurzív függvények elméletének egyik világszerte elismert megalapozója. Nemcsak kutatóként, de pedagógusként és könyvíróként is kiemelkedőt alkotott. A magyar matematikaoktatás és a tanárképzés megújításában jelentős szerepet vállalt. Tudományos munkája mellett fontosnak tartotta a matematika népszerűsítését is. Nem matematikus érdeklődésű embereknek szánta a *Játék a végtelennel* című könyvét, amely tizenkét nyelven jelent meg. Az izgalmas, olvasmányos mű generációkkal szerettette meg a matematikát. E könyv első kiadásának a fülszövegét olvashatjuk:

„Sokat tanultam másoktól, de ezt ma már nem tudom elemeire bontani. Írás közben nem volt előttem könyv. Itt-ott kényszerítő erővel ötlött fel bennem valami hasonlat, aminek az eredetére is emlékeztem, pl. a remek *Rademacher–Toeplitz* könyvre, vagy *Beke* kitűnő bevezetőjére az analízisbe; ha egyszer kialakult valaminek „a módja, nem írhattam mást, csak azért, hogy eredetibb legyek.”

Herczeg János 1956-tól matematika-fizika szakos tanárként dolgozott. Közben *Bizám Györggyel* közösen szerkesztették a „Logar Miska feladatai”-t, és a „Gondolkodás iskolája”-t az Élet és Tudományban. Majd 1995–2004 között a folyóirat főszerkesztője. 1979-től a Magyar Rádió Iskolarádió című műsorának szer-

kesztője. Számos tudományos-ismeretterjesztő műsora, írása jelent meg, mint a Sokszínű logika, amelyet öt nyelvre fordítottak le, vagy a *Bizám Györggyel* közösen írt Logar Miska feladatai, vagy a Játék és logika 85 feladatban.

Az Élet és Tudomány 2003. november 28-i számában a Miért lettem matematikus? című visszaemlékezésében írja:

„Sokan említenek egy kis könyvet: *Rademacher–Toeplitz: Számokról és alakzatokról*. Ez a rácsodálkozás élményét adta meg azoknak, akiket a számolások száraz kenyerével tömték a matekórákon. Vajon miért nem lehet ezt a kis füzetet megkapni ma is? Kellene egy ajánlott olvasmányok listája, és az ilyen alapkönyveket állandóan a piacon kellene tartani.”

Győry Kálmán (1940–) matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. 1993–1998-ig a Debreceni Egyetem Természettudományi Karának dékánja, 2000-től 2001-ig rektorhelyettese, 2001-től 2002-ig rektora. A Magyar Tudomány 2002/8. számának 1079. oldalán interjút közöl *Győry Kálmánnal*, Az ember és a számok törvényei címmel. Itt nyilatkozik kedvenc könyveiről is.

„Később, amikor már elkapott a gépszíj, bizony más órákon is a matematika járt a fejemben, a pad alatt feladatokat oldottam. Eredményeimet látva a többi tanár beletörődött ebbe, hiszen amit kellett, azt a többi tárgyból is megtanultam. Végig kitűnő voltam, csak hát a matematika érdekelt a legjobban. Ha nem boldogultam egy-egy nehezebb feladattal, akkor hozzáolvastam a szakköri füzetekből, korábbi KöMaL számokból, a Matematikai Versenytetelek köteteiből. Nagyon szerettem például *Rademacher–Toeplitz Számokról és alakzatokról* című könyvét. Keresztapám Pesten élt, ő küldte meg nekem *Császár Ákosné* műegyetemi Analízis jegyzetét. De ez már kicsit később történt.”

Simonovits Miklós (1943–) matematikus, az MTA tagja, a Rényi Matematikai Intézet kutatóprofesszora írja a középiskolás korában megismert könyvekről.

„... talán első helyre tettem *Rademacher és Toeplitz Számokról és alakzatokról* c. könyvét ... A könyv (szerintem) nagyon

vonzó módon közelíti meg 22 fejezetben a matematika bizonyos kikristályosodott, gyönyörű fejezeteit, mondhatnánk, gyöngyszemeit. Gondolhatnánk, hogy ez a régebben írt könyv már elavult, de ez messze nincs így. A könyv kitűnő voltát tükrözi angol címe is: *The Enjoyment of Math*, azaz a Matematika élvezete.”

A XX. század második felének nagy magyar matematikusainak, de a többi érdeklődőnek is valódi csemege, eddig nem hallott különlegesség lehetett ez a könyv. Akkoriban a középiskolai tananyagban nem szerepelt például a halmazelmélet, a matematika logika, a kombinatorika és a topológia sem.

Az 1960-as évektől kezdve, az egész világra kiterjedően, az addigi módszertant gyökeresen megváltoztató matematikatanítás kezdett kialakulni. A magyarországon elindult tanítási kísérletek közül a *Varga Tamás* vezette Komplex matematikatanítási kísérletnek sikerült tért hódítania, mégpedig úgy, hogy a kísérlet elvei külföldön is meghatározták a matematikaoktatást. A kísérlet tapasztalatai alapján 1978-tól fokozatosan bevezették az „új” matematika-tantervet. Az új témakörök, módszerek megjelenése a tanító- és tanárképzést, tanártovábbképzést is gyökeresen megváltoztatta.

A napjaink középiskolásai már az óvodában találkoztak a (maguk szintjén a) halmazelmélet alapelemeivel. Szinte az első iskolai napjukon oldottak meg kombinatorikai feladatokat. 2., 3. osztályos koruktól ismerkednek a prímszámokkal, oszthatósági szabályokkal. 6. osztályos korukban belátják, hogy a számokat csak egyféleképpen lehet törzstényezőkre bontani. Számukra sok minden ismerős lehet, amit e könyvben olvashatnak, de mégis izgalmas, érdekfeszítő, mert egyszerűséggel, magávalragadóan, olvasmányosan írnak a szerzők a matematikai problémákról, a matematikai fogalomalkotásról, a problémamegoldásról.

Budapest, 2009. szeptember

Köves Gabriella