

Róka Sándor

2000 feladat
az elemi matematika köréből

Hetedik kiadás

© Róka Sándor, Typotex, Budapest, 2000, 2021
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta Hódi Endre

ISBN 978 963 493 147 8

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Fried Katalin
Borítóterv: Biró Petra
Nyomta és kötötte: Generál Nyomda Kft., Szeged
Felelős vezető: Hunya Ágnes

Tartalom

Bevezető	7
Feladatok	9
1. Fejtörők	9
2. Páros vagy páratlan?	19
3. Párbaállítás	20
4. Miért nem négyzetszám?	24
5. Négyzetszámok	25
6. Két szomszédos egész szám szorzata	29
7. Diofantoszi egyenletek	30
8. Prímszámok	33
9. Oszthatósági feladatok	36
10. Különféle számelméleti feladatok	43
11. Számok reciprokainak összege	49
12. Számok és számjegyek	51
13. Racionális és irracionális számok	54
14. Egész együtthatós polinomok	56
15. Kombinatorika a számelméletben	58
16. Számkonstrukciók	59
17. Melyik szám a nagyobb?	65
18. Egyenletek és egyenletrendszerek	67
19. Egyenlőtlenségek	70
20. Különféle algebrai feladatok	79
21. Függvényegyenletek	90
22. Vektorok a geometriában	95
23. Területátalakítások	100
24. Geometriai konstrukciók	110
25. Invariáns tulajdonságok	114
26. Feladatok a sakktáblán	122
27. Skatulyaelv	128
28. Matematikai játékok	136
29. Különféle kombinatorikai feladatok	144

30.	Konstrukciók	151
31.	Teljes indukció	154
32.	Kombinatorika a geometriában	160
33.	Gráfok	164
34.	Halmazrendszerek	166
Megoldások, útmutatások		171
1.	Fejtörők	171
2.	Páros vagy páratlan?	179
3.	Párbaállítás	180
4.	Miért nem négyzetszám?	183
5.	Négyzetszámok	185
6.	Két szomszédos egész szám szorzata	189
7.	Diofantoszi egyenletek	190
8.	Prímszámok	195
9.	Oszthatósági feladatok	200
10.	Különféle számelméleti feladatok	207
11.	Számok reciprokainak összege	215
12.	Számok és számjegyek	217
13.	Racionális és irracionális számok	219
14.	Egész együtthatós polinomok	223
15.	Kombinatorika a számelméletben	225
16.	Számkonstrukciók	229
17.	Melyik szám a nagyobb?	233
18.	Egyenletek és egyenletrendszerek	235
19.	Egyenlőtlenségek	241
20.	Különféle algebrai feladatok	251
21.	Függvényegyenletek	261
22.	Vektorok a geometriában	270
23.	Területátalakítások	275
24.	Geometriai konstrukciók	277
25.	Invariáns tulajdonságok	285
26.	Feladatok a sakktáblán	291
27.	Skatulyaelv	303
28.	Matematikai játékok	314
29.	Különféle kombinatorikai feladatok	322
30.	Konstrukciók	334
31.	Teljes indukció	336
32.	Kombinatorika a geometriában	341
33.	Gráfok	350
34.	Halmazrendszerek	355

Bevezető

Ez a feladatgyűjtemény sokéves munka eredménye. 1992-ben jelent meg az *1000 feladat az elemi matematika köréből* című könyvem, amelynek bővített, átdolgozott kiadását, az *1500 feladat. . .*-ot 1996-ban adta ki a TypoT_EX. Az azóta eltelt évek alatt a feladatgyűjteményen elvégeztem a szükségesnek gondolt javításokat, kiegészítéseket, és új fejezeteket állítottam össze. Remélem, hogy előnyére vált a könyvnek ez az éveken át tartó bővítés és a korábbi feladatsorok csiszolgotása. Most vége az átdolgozásoknak; már évekkel ezelőtt is úgy terveztem, hogy a *2000 feladat az elemi matematika köréből* lesz ennek a feladatgyűjteménynek az utolsó változata. Újabb átdolgozás, bővítés nem várható.

A feladatokat zömmel a hazai és az orosz versenyfeladatok közül gyűjtöttem, felhasználtam a *KöMaL* (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) és a *Kvant* feladatait, és további sokféle más forrásra is támaszkodtam. A feladatgyűjtemény összeállításánál arra törekedtem, hogy szép és érdekes feladatok kerüljenek bemutatásra, egy-egy témakört minél gazdagabban tárjunk az olvasó elé; továbbá szándékom volt, hogy a feladatgyűjtemény segítse a versenyekre való felkészülést.

Ezt a gyűjteményt használhatják 14–18 éves diákok a tanulmányi versenyekre és a *KöMaL* pontversenyére való felkészülésben. Megjegyezve azért, hogy noha vannak geometriai feladatok, de a hagyományos geometriai témák hiányoznak a feladatgyűjteményből. A középiskolás korosztályt tanító tanárok számára szakköri feladatgyűjteményként szolgálhat a könyv: egy-egy témakör feldolgozásához bőséges példaanyagot találunk benne. A *2000 feladat. . .* használható segédkönyvként is a tanárjelöltek képzésében, az *Elemi matematika* szemináriumokon.

A feladatokat témakörök szerint csoportosítottam, és legtöbbjükhez megoldást adtam (esetleg csak a megoldás vázlatát vagy ötletet, útmutatást). A feladat sorszáma mellett zárójelben feltüntetett szám (1-től 7-ig) a feladat nehézségét mutatja: kisebb szám könnyebb feladatot jelez. A nehézségi fokot egyértelműen megállapítani nyilván nem lehet, de a megadott skálázás némi segítséget adhat a feladat megoldójának. Érdemes egy-egy fejezet feldolgozásánál a feladatok sorrendjét követni, mert a korábban szereplő feladatok többnyire ötletet adnak és segítséget nyújtanak a megoldáshoz. Csábító lehet a feladat

megismerése után rögtön elolvasni a megoldáshoz adott útmutatást, de ez némi akarat erővel halogatható. A feladattal barátkozni kell, néha napokig gondolkodni rajta. Közelebb juthatunk a feladat megoldásához, ha megpróbáljuk az állítást élesíteni, vagy a feltételek változtatásával megfigyeljük, hogyan változik az állítás.

A problémamegoldásban jártas embereket az különbözteti meg a náluk kevésbé sikeres kezdőktől, hogy az előbbieknél nagyobb a tudásuk. Az orvosnak ismernie kell az anatómiát, a futballistának a saját sportágát, a szakácsnak az ételeket. Becslések szerint még a legtehetségesebb sakkozóból sem válhat nagymester addig, amíg legalább tíz évet el nem tölt sakktárgyak megoldásával. Minden problémamegoldásnak van megtanulható része. Pólya György szerint: „A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet. . . Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia.” Ahhoz, hogy valaki matematikaversenyeken jó eredményeket érjen el, bizony sok munka szükséges. Nem elég a tehetség, érzék; a feladatmegoldást, matematikai gondolkodást tanulni is kell. A versenyekre lehet készülni, a versenyekre fel lehet készülni. Ez a készülés, ez az edzés feladatmegoldást jelent.

A *2000 feladat* . . . lehetőséget biztosít a problémák megoldásának gyakorlására. Aki egyszer megérezte az eredményes problémamegoldás örömét, egy életre megőrzi azt; és amit ez kifejleszt, a hajlékony gondolkodás, az az embert egész életén végigkísérő értékes képesség.

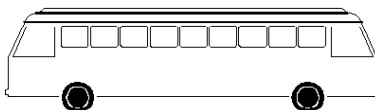
A feladatok megismerésekor a figyelmes olvasó megtapasztalhatja a matematika örömét a meglepő tételekben, szép okoskodásokban, logikus gondolatmenetekben. Egy bizonyítás nem ritkán izgalmas, érdekesítő olvasmány.

Hálás köszönettel tartozom a könyv lektorának, *Hódi Endrének*, aki alapos, körültekintő munkájával nagyon sok segítséget nyújtott. Az ő ösztönzésére jelentősen csökkent a megoldás nélküli feladatok száma; segített a hibák felderítésében; útmutatásai alapján igyekeztem a megoldásokat minél érthetőbben, világosabban leírni; a feladatok megfogalmazásában pedig, ahol kellett, figyelmeztetett a pontosságra. A lektor lelkiismeretes és gondos munkát végzett; nagyon sokat tett azért, hogy ez a könyv minél jobb legyen.

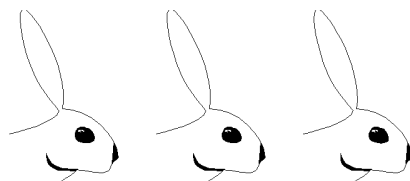
Feladatok

1. Fejtörők

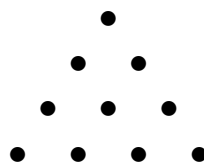
- 1.^[3] Az ábrán látható autóbusznak melyik az eleje?



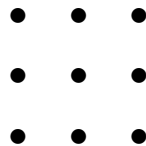
- 2.^[3] Az ábrán látható három egyfülű nyulat vágjuk ki papírból, majd helyezzük el a nyulakat úgy, hogy mindegyik nyúlnak két füle legyen.



- 3.^[3] Az asztalra letettünk 10 db egyforma pénzérmét az ábrán látható módon. Ezekből 3 érmét helyezzünk máshová úgy, hogy egy más helyzetű, az eredetivel egybevágó szabályos háromszöget kapjunk.



- 4.^[3] Rajzoljunk az ábrába a ceruza felemelése nélkül olyan töröttvonalat úgy, amely négy, végpontjaival sorban egymáshoz csatlakozó egyenesszakaszból áll, és mind a kilenc ponton áthalad.



- 5.^[2] Egy vadász medvenyomokat követve 1 km-t haladt déli irányban, majd 1 km-t ment keletre, végül 1 km-t északra, és ekkor visszaért oda, ahonnan elindult. Milyen színű a medve?
- 6.^[2] A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik?