

Játék a végtelennel

# MAGYAR TUDÓSOK

Marx György: Gyorsuló idő  
Rényi Alfréd: Ars Mathematica  
Székely Gábor: Paradoxonok  
Tusnády Gábor: Sztochasztika

Péter Rózsa

# Játék a végtelennel

Matematika kívülállóknak

*9., javított kiadás*



**TYPOTEX**

Budapest, 2010

A könyv a Typotex Kiadó által indított, az Igényes Tankönyvkiadásért Program keretében jelent meg.

A könyv 8. kiadásának megjelenését az Oktatási Minisztérium támogatta.

© Andrásfai Béla mint Péter Rózsa jogutódja, Typotex, 2004

ISBN 978 963 279 092 3

ISSN 1787-3053

Témakör: *szórakoztató matematika*

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha a kiadó honlapján, a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu) címen feliratkozik hírlevelünkre, melyből értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról. A honlapon megismerkedhet teljes kínálatunkkal, egyes könyveinknél pedig új fejezeteket, bibliográfiát, hivatkozásokat találhat, illetve az esetlegesen előforduló hibák jegyzékét is letöltheti.

Kiadványaink egy része e-könyvként (is) kapható:

[www.interkonyv.hu](http://www.interkonyv.hu)

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Szedés: Benkő Márta

Tördelés: Bíró Bálint

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 21,8 (A/5 ív)

Nyomás: Séd Nyomda Kft., Szekszárd

Felelős vezető: Katona Szilvia

# Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	5
Előszó a hetedik kiadáshoz	7
Bevezetés	11
<b>I. rész A bűvészinás</b>	<b>15</b>
1. Játék az ujjakkal	17
2. A műveletek lázgörbéi	22
3. A végtelen számsor parcellázása	30
4. A bűvészinás	37
5. Egy alaptéma variációi	46
6. Minden lehetőséget megjátszunk	60
7. A szürke számsor színezése	73
8. „Gondoltam egy számot”	83
<b>II. rész A teremtő forma</b>	<b>95</b>
9. Szétfutó számok	97
10. Határtalan sűrűség	109
11. Ismét megfogjuk a végtelent	120
12. Megtelik a számvonal	134
13. A lázgörbék kisimulnak	148
14. Egy a matematika	162
15. „Írja” elemek	183

6 *Játék a végtelennel*

16. Műhelytitkok 199  
17. Sok kicsi sokra megy 218

**III. rész A tiszta ész önkritikája 235**

18. És mégis sokféle a matematika 237  
19. Az épület meginog 252  
20. Önállósul a forma 260  
21. A felettes matematika ítélőszéke előtt 271  
22. Mit nem tud a matematika? 283

**Függelék 295**

- Formabontás a „két kultúra” ellen 297  
Használat után 307  
Előszó az első kiadáshoz 309  
Előszó az újabb kiadásokhoz 311

## Előszó a hetedik kiadáshoz

Örömmel és fájdalommal teszek eleget a megtisztelő felkérésnek, hogy előszót írjak Péter Rózsa világsikert aratott *Játék a végtelennel* című könyvének a Typotex Kiadónál megjelenő új kiadásához. Örömmel, mert a könyvet (természetesen) én is a matematikai ismeretterjesztő irodalom egyik csúcspontjának tartom, de ugyanakkor fájdalommal is, hiszen olyasmit teszek, amihez igazában csak a könyv szerzőjének volna joga; de hát Őt, sajnos, 1977 óta már elhunyt nagyjaink között tartjuk csak számon.

Miért remekmű ez a könyv? Erre az a felületes válasz, hogy hiszen lefordították számos nyelvre, és e fordítások számottevő része több kiadásban is megjelent. A mélyebbre ásó válasz azonban arra kísérel meg magyarázatot találni, vajon a könyvnek mely tulajdonságai indokolják ezt a tényekkel alátámasztott sikert.

Matematikai ismeretterjesztés csak a matematika formalizmusának teljes vagy csaknem teljes mellőzésével, a logikai szigorúság matematikai művekben joggal megkívánt lazításával, szemléletes képekkel való helyettesítésével végezhető hatékonyan; enélkül nem ismeretterjesztő mű, hanem szakkönyv jön létre, amelyet csak matematikusok, esetleg csak a matematika valamely szűkebb ágának szakértői tudnak megérteni és méltányolni. Aki *valóban* a nem matematikus (sőt a hajlamánál, neveltetésénél fogva magát a matematikától távolállónak érző, esetleg éppen a matematikával szemben elfogult) olvasó számára ír, annak mindezeket a matematikai irodalomban meg nem engedett lazaságokat lépten-nyomon alkalmaznia kell, de eközben *nem szabad a matematikai gondolatokat meghamisítania.*

Ahhoz, hogy ez a tojástánchoz hasonlítható feladat sikeresen megvalósítható legyen, a szerzőnek mindazt, amiről ír, a kutató tudós mélységéig kell ismernie. Előfordul, hogy valaki, esetleg a legteljesebb jóhiszeműséggel, megkísérli az olvasmányából megismert eredményeket közvetíteni anélkül, hogy mindezeket az alkotó tudós azonosulásának szintjéig magáévá tette volna, s ebből óhatatlanul félrevezető pontatlanságok jönnek létre. Péter Rózsa könyvének nagyszerűsége éppen abból ered, hogy ő maga alkotó matematikus volt, aki szerelmének tárgyát (melyik igazi tudós nem szerelmes az általa művelt tudományba?) kívánta (legalábbis a lehetőséghez képest) ismertté és vonzóvá tenni a kívülállók számára. Természetesen az a körülmény, hogy Péter Rózsa a matematikai kutatás aktív művelője volt, csak egyik szükséges feltétele az elért eredménynek (nem minden alkotó matematikus képes ilyen magas szintű ismeretterjesztésre), de mindenesetre alapvetően fontos, nélkülözhetetlen feltétele a sikernek.

Legyen szabad most egy kissé szubjektívnek lennem. A *Játék a végtelennel* első kiadása, tudjuk, 1945 nyarán jelent meg. Én akkor, mint későbbi feleségemnek hadifogságból éppen hazatért friss vőlegénye, megvettem és neki ajánlottam a könyvet, amely azután kettőnk egyik kedvenc olvasmányává vált. Belelapozva az első kiadásba, észrevettem egy apró különbséget a későbbi kiadásokhoz képest. Az első kiadásban a bevezetés egyik mondata így szól: „Én nem azért szeretem a matematikát, mert – így mesélték nekem – alkalmazni lehet a technikában, hanem azért, mert szép.” Ez a mondat a negyedik (1969-es) kiadásban így hangzik: „Én nemcsak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem főleg azért, mert szép.” A szerző egyébként gondosan és matematikushoz illő pontossággal felsorolja az újabb kiadásokban mutatkozó változtatásokat, mert hiszen a könyv a matematika legfrissebb eredményeit is be akarja mutatni az olvasónak, és ezek az újabb és újabb kiadások között is fejlődtek, amit a szöveg (természetesen) figyelembe vett, a bevezetésnek ezt a kis módosítását azonban nem említi. Anélkül, hogy ehhez a húsz évnél régebben elhunyt szerző hozzájárulását elnyerhetném, legyen szabad feltételeznem, hogy Péter Ró-



zsának 1945 és 1969 között belső viszonyulása változott meg a matematika alkalmazásaihoz; amitől 1945-ben még távol állt, azt 1969-ben már magáénak érezte, sőt – mint a halála előtt kevéssel megjelent, a matematikai logikának a számítógéptudományban való alkalmazásairól szóló monográfiájából kitűnik – alkotóan művelte.

Ebből az apró szövegváltoztatásból, talán nem túlozva, szeretnék egy a matematika és a valóság viszonyának (súlyos filozófiai kérdéseket felvető) problémájáig eljutni. A matematikának számos (a régebbi századokban szinte valamennyi) kérdésköre a mindennapi élet vagy más tudományok felvette feladatok megoldásának szándékából eredt. Előfordul azonban, hogy egy-egy matematikai kérdés nem kívülről, hanem a matematika belső problémáiból fakadt, és ilyenkor hosszú ideig úgy tűnt, hogy az élettől távol álló, alkalmazásokhoz sohasem vezető, és ezért sokak részéről elutasított gondolkorról, esetleg egész elméletről van szó. Aki azonban elég türelmes és képes kellő ideig várni, mindig rájön, hogy az élettől elrugaskodottnak tűnő matematikai elméletek előbb-utóbb megtalálják alkalmazásukat. Így volt ez a Péter Rózsától elsősorban művelt kérdéskörrel, a rekurzív függvények elméletével is, amely indulásakor pusztán a matematikai logika szempontjából látszott érdekesnek, de alig néhány évtized elteltével a számítógéptudomány egyik fontos és hasznos fegyverévé vált. A fejlődésnek ezt az állomását még éppen megérte Péter Rózsa, s (talán éppen ezért) törölte az „így mesélték nekem” félmondatot.

Sok élvezetes percet kívánok az új kiadás olvasóinak.

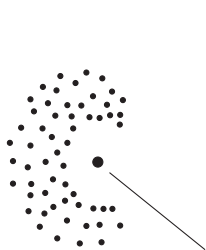
Budapest, 1999 áprilisában

*Császár Ákos*

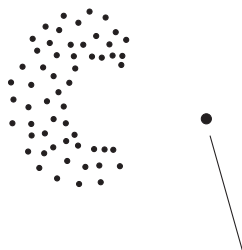
## Bevezetés

Eszembe jut egy régi beszélgetés. Egy írónk, aki igen kedves emberem, panaszkolt nekem, hogy hiányosnak érzi műveltségét, mert nem tud matematikát. A saját területén érzi ennek a hiányát, írás közben. Mert például a koordináta-rendszere még emlékszik az iskolás matematikából és ezt már képből, hasonlatban is felhasználta. Úgy érzi, hogy még sok ilyen felhasználható anyag van a matematikában, és a kifejezőképessége szegényebb attól, hogy nem meríthet ebből a gazdag forrásból. De mindez reménytelen panasz, mert abban bizonyos, hogy a matematikába nem tudna behatolni.

Ez a beszélgetés azóta sokszor feléledt bennem, gondolatokat, terveket ébresztően. Hogy itt tennivaló van, azt az első pillanatra beláttam, hiszen abban, amit a matematika az én számomra jelent, mindig a hangulati elem volt a döntő és ez bizonyára közös forrás, amiből az író, a művész is meríthet. Eszembe jut egy példa diákkoromból: Több egyetemi társammal együtt Shaw egyik színművét olvastuk. Ott tartottunk, ahol a hős megkérdezi a hősnőt: mi a titka, hogy tudja olyan jól vezetni és megnyerni a legnehezebben kezelhető embereket is? A hősnő elgondolkozik: Talán az a magyarázata ennek, hogy ő valójában egy kicsit távol van mindenkitől. Erre a felolvasó társnóm (Benkó Ica) felkiált: „Ez ugyanaz, mint a ma tanult matematikai tétel!” A matematikai kérdés ugyanis ez volt: lehet-e egy ponthalmazhoz egy kívül fekvő pontból úgy közeledni, hogy egyszerre valamennyi pontjához közeledjünk? A felelet: Ennek az a feltétele, hogy a kívül fekvő pont elég messze essék az egész halmaztól:



innen nem lehet, míg egyes pontokhoz  
közeledünk, a többitől távolodunk;



innen már lehet.

Az író másik állítását: hogy nem tudna behatolni a matematikába, például sohasem tudná megérteni a sokat emlegetett differenciálszámítás fogalmát, nem akartam elhinni. Megpróbáltam széttagolni e fogalom bevezetését a lehető legegyszerűbb, világos lépésekre. A válasz nagyon meglepő volt: A matematikus el sem tudja képzelni, hogy a laikusnak a legegyszerűbb képlet is milyen nehézségeket okozhat. Ahogyan a pedagógus sem érti, hogy lehet az, hogy a nebuló már húszadszor silabizálja, hogy  $b...a...b$  és még mindig nem látja, hogy babról van szó; itt pedig nem is babról van szó.

Ez ismét nagyon elgondolkoztató tapasztalat volt számomra. Mindeddig azt hittem, hogy a közönség matematikai tájékozatlanságának az az oka, hogy senki sem írt jó népszerű könyvet, például a differenciálszámításról, a nagyközönség számára. Hiszen az érdeklődés szemmel láthatóan megvan, a közönség valósággal szétkapkodja, amit e nemben juttatnak neki, de hivatásos matematikus mindeddig nem írt ilyen könyvet. Igazi szakemberre gondolok, aki pontosan tudja, hogy milyen mértékben lehet leegyszerűsíteni valamit anélkül, hogy ez hamisítás volna, aki ért ahhoz, hogy ne a régi keserű orvosságot adja be valami tetszetős tálalásban (hiszen az iskolás matematika a nagy többségnek keserű emléke), hanem magát a lényegét tudja annyira megvilágítani, hogy egészen szembeszökővé válik, és aki maga is ismeri a matematikai alkotás örömét, ez ad az írásának olyan lendületet, hogy az olvasót is magával ragadja. Most már kezdem azt hinni, hogy sokak számára még az igazi népszerű könyv sem lesz hozzáférhető.

Talán éppen ez a döntő matematikustulajdonság: az út keserves voltának vállalása. „A matematikához nem vezet királyi út” – mondta Euklidész az érdeklődő uralkodónak – ezt királyok számára sem lehet kényelmessé tenni. Felületesen nem lehet matematikát olvasni, a kényszerű absztrakció mindig bizonyos önkínzással jár, és matematikus az, akinek ez az önkínzás örömet okoz. Még a legjobb népszerű könyvet is csak azok fogják követni tudni, akik egy bizonyos fokig vállalják ezt. Akik vállalják a keserves silabizálást mindaddig, míg a képlet értelme meg nem világosodik előttük.

Én nem ezek számára írok most. Képlet nélküli matematikát írok, valamit abból a bizonyos közös hangulati forrásból. Nem tudom, sikerülhet-e ez a vállalkozás. A képlettel a matematika egyik lényeges jegyéről mondom le; hogy a forma a lényeghez tartozik, azt író és matematikus egyaránt tudja. Képzelnék el, hogyan lehetne egy szonett hangulatát kifejezni a szonettforma nélkül. Mégis meg akarom kísérelni: hátha átmenthető így is valami az igazi matematika szelleméből.

Egy könnyítést nem ígérhetek: egy-egy fejezetet olvasatlanul átlapozni, későbbre halasztani, vagy csak felületesen futni át: nem szabad. Matematikát csak téglánként lehet felépíteni: itt egyetlen szó sem felesleges, minden következő részlet az előzőre épít, ha ez itt nem is annyira szembeszökő, mint egy unalmasan szisztematizáló könyvben. A kevés utasítást is követni kell: igazán ránézni az ábrára, valóban próbálgatni egy egyszerű rajzot vagy számolást, ha itt-ott erre kérem az olvasót. Viszont engesztelésül megígérem, hogy nem lesz unalmas.

Az iskolás matematikából semmit sem fogok felhasználni; a számlálással kezdem és el fogok jutni a matematika legmaibb ágáig: a matematikai logikáig.