

Gráfelméleti feladatok

Az informatika elmélete

A sorozat kötetei:

Rónyai–Ivanyos–Szabó: Algoritmusok

Bach Iván: Formális nyelvek

Katona–Recski–Szabó: A számítástudomány alapjai

Buttyán–Vajda: Kriptográfia és alkalmazásai

Jordán–Recski–Szeszlér: Rendszeroptimalizálás

Szeredi–Lukácsy–Benkő: A szemantikus világháló elmélete és gyakorlata

Györfi–Györi–Vajda: Információ- és kódelmélet

FRIEDL KATALIN — RECSKI ANDRÁS — SIMONYI GÁBOR

GRÁFELMÉLETI FELADATOK



TYPOTEX

Budapest, 2006

Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.



© Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor, Typotex, 2006

ISBN 963 9664 01 4

ISSN 1787-3045

Témakör: *elméleti informatika*

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a *Typoklubba*, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a *www.typotex.hu* címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított

Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Felelős szerkesztő: Domina Katalin

Tördelte: Gerner József

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 20,82 (A/5 ív)

Készítette a Kaloprint Kft. nyomdája, Kalocsa

Tartalomjegyzék

Előszó	9
I. rész FELADATOK	11
1. Gráfelméleti alapfogalmak	13
1.1. Izomorfizmus	13
1.2. Fokszámsorozatok	14
1.3. Fák	15
1.4. Cayley-tétel, Prüfer-kód	16
1.5. Minimális súlyú feszítőfa	16
1.6. Összefüggőség	18
1.7. Irányított gráfok	18
1.8. Vegyes feladatok	19
2. Euler-körök, Euler-utak	21
2.1. Euler-bejárás létezése	21
2.2. Euler-bejárás alkalmazásai	23
2.3. A bejárás változatai	24
3. Hamilton-kör és Hamilton-út	27
3.1. Hamilton-körök és -utak megadása	27
3.2. Szükséges feltételek	28
3.3. Elégséges feltételek	30
3.4. Vegyes feladatok	32
4. Síkbarajzolhatóság	35
4.1. Euler-formula	35
4.2. Kuratowski-tétel, Fáry–Wagner-tétel	37
4.3. Dualitás	39
4.4. Gyenge izomorfia	40
4.5. Vegyes feladatok	41
4.6. A síkbarajzolhatóságnál általánosabb fogalmak	42

4.7.	A síkbarajzolhatóságnál speciálisabb fogalmak	43
5.	Párosítások	45
5.1.	Maximális párosítás	45
5.2.	Párosítás páros gráfban – Hall-feltétel	46
5.3.	Vegyes feladatok	49
5.4.	Lefogás és függetlenség	50
6.	Folyamok, többszörös összefüggőség	55
6.1.	Folyamok	55
6.2.	Többszörös összefüggőség	60
7.	Gráfok színezése	63
7.1.	Csúcsok színezése	63
7.2.	Élek színezése	67
7.3.	Perfekt gráfok	68
7.4.	Mycielski-konstrukció	69
7.5.	Listaszínezés	69
8.	Gráfok mátrixai	71
8.1.	Szomszédossági mátrix	71
8.2.	A szomszédossági mátrix determinánsa, sajátértékei	72
8.3.	Illeszkedési mátrix	73
8.4.	Körmátrix és vágásmátrix	74
9.	Bonyolultságelmélet	77
9.1.	Körök és utak	77
9.2.	Színezések és klikkek	80
9.3.	Eldöntési és keresési problémák	82
9.4.	Vegyes feladatok	83
II. rész	MEGOLDÁSOK	87
10.	Gráfelméleti alapfogalmak	89
10.1.	Izomorfizmus	89
10.2.	Fokszámsorozatok	93
10.3.	Fák	95
10.4.	Cayley-tétel, Prüfer-kód	98
10.5.	Minimális súlyú feszítőfa	100
10.6.	Összefüggőség	102
10.7.	Irányított gráfok	103
10.8.	Vegyes feladatok	105

11. Euler-körök, Euler-utak	111
11.1. Euler-bejárás létezése	111
11.2. Euler-bejárás alkalmazásai	116
11.3. A bejárás változatai	120
12. Hamilton-kör és Hamilton-út	125
12.1. Hamilton-körök és -utak megadása	125
12.2. Szükséges feltételek	128
12.3. Elégséges feltételek	134
12.4. Vegyes feladatok	141
13. Síkbarajzolhatóság	149
13.1. Euler-formula	149
13.2. Kuratowski-tétel, Fáry–Wagner-tétel	155
13.3. Dualitás	161
13.4. Gyenge izomorfia	164
13.5. Vegyes feladatok	167
13.6. A síkbarajzolhatóságnál általánosabb fogalmak	169
13.7. A síkbarajzolhatóságnál speciálisabb fogalmak	171
14. Párosítások	175
14.1. Maximális párosítás	175
14.2. Párosítás páros gráfban – Hall-feltétel	180
14.3. Vegyes feladatok	186
14.4. Lefogás és függetlenség	191
15. Folyamok, többszörös összefüggőség	201
15.1. Folyamok	201
15.2. Többszörös összefüggőség	212
16. Gráfok színezése	219
16.1. Csúcsok színezése	219
16.2. Élek színezése	232
16.3. Perfekt gráfok	238
16.4. Mycielski-konstrukció	241
16.5. Listaszínezés	243
17. Gráfok mátrixai	249
17.1. Szomszédossági mátrix	249
17.2. A szomszédossági mátrix determinánsa, sajátértékei	255
17.3. Illeszkedési mátrix	260
17.4. Körmátrix és vágásmátrix	263

18. Bonyolultságelmélet	267
18.1. Körök és utak	267
18.2. Színezések és klikkek	275
18.3. Eldöntési és keresési problémák	282
18.4. Vegyes feladatok	284
Jelölések	293
Hivatkozott tételek	295
Irodalom	301

Előszó

Ez a példatár körülbelül félezer gráfelméleti feladatot tartalmaz részletes megoldásokkal.

A gráfelmélet egyre fontosabb szerepet játszik mind a matematikában, mind annak műszaki (és közgazdasági, biológiai, egyéb) alkalmazásaiban. A matematikus-képzésen kívül az informatikus és a villamosmérnök hallgatók programjában is egyre több egyetemen szerepel. Számos tankönyv és monográfia áll rendelkezésre mind a gráfelmélet alapvető ismereteinek elsajátításához, mind egy-egy területének mélyebb kutatásához.

A matematika egyes ágainak valódi megismerése elképzelhetetlen sok-sok feladat megoldása nélkül. A műszaki felsőoktatásban rengeteg példatár segíti az analízis és a valószínűségi számítás gyakorlását, kevés olyan feladatgyűjtemény áll azonban rendelkezésre, mely a gráfelméletnek az alkalmazásokban fontos ágaihoz nagyszámú gyakorló példát tartalmazna.

Ebben a kötetben olyan feladatokat válogattunk össze, melyek nagy része nem nehezebb a BSc hallgatók zárthelyi dolgozataiban szereplőknél, és olyan részletességgel írtuk le a megoldásokat, ahogy azokat a zárthelyik javításakor elvárjuk. Természetesen találhatóak nehezebb, gondolkodtatóbb feladatok is. Ilyenekből inkább csak ízelítőként vettünk be néhányat, kiváltképp a színezésekről szóló fejezetben.

Az igazán nehéz feladatok iránt érdeklődőknek külön is felhívjuk a figyelmét Lovász László immár klasszikusnak számító *Kombinatorikai problémák és feladatok* című könyvére. Az ott szereplő egyszerűbb feladatok némelyike a jelen feladatgyűjteményben is megtalálható. Szintén vettünk át néhány feladatot vagy feladatötletet az ELTE és a Szegedi Tudományegyetem matematikus és matematika tanár szakos hallgatói számára korábban készült, Elekes Györgytől, illetve Hajnal Pétertől származó példatárakból. További feladatgyűjteményeket is megemlítünk az irodalomjegyzékben, az érdeklődő olvasó ezeket is haszonnal forgathatja. Kiváltképp ez a helyzet, ha a leszámítási kérdéseket vagy a gráfelmélet olyan területeit (pl. extrémális gráfelmélet, Ramsey-tételkör, végtelen gráfok) kívánja tanulmá-

nyozni, melyek a jelen kötetben nem szerepelnek. Feladatgyűjtemények mellett az irodalomjegyzék néhány olyan gráfelmélettel foglalkozó könyvet sorol fel, melyek segíthetik az olvasó további tájékozódását.

Ez a kötet elsősorban a BME mérnökinformatikus és villamosmérnök BSc programjában oktatott gráfelméleti fejezetekre koncentrálnak, felépítésében nagyrészt Katona Gyula Y., Recski András és Szabó Csaba *A számítástudomány alapjai* című könyvének 2. fejezetét követi. A kötet végén jelölésjegyzék és a hivatkozott tételek felsorolása található. Ezek remélhetőleg megkönnyítik az olvasó munkáját, azonban nem pótolják a tankönyvet, ahol az eredmények a szükséges definíciók után, logikai sorrendben, jórészt bizonyításokkal következnek.

Mindhárman mintegy másfél évtizede oktatunk gráfelméletet a BME-n. Ezalatt természetesen tanszékünk többi (volt és jelenlegi) oktatójától és sok ezer diákunktól is rengeteg hasznos észrevételt kaptunk, amelyekért ezúton mondunk köszönetet. Külön is ki kell emelnünk

- Fogaras Dániel és Tapolcai János volt doktoránsainkat, akik a 2. és 3., illetve az 1. fejezet elkészítésében jelentős szerepet játszottak,
- Andrásfai Béla, Csákány Rita, Fleiner Tamás, Jordán Tibor, Katona Gyula Y., Sali Attila, Serény György, Szeszler Dávid, Vesztergombi Katalin és Wiener Gábor volt, illetve jelenlegi tanszéki kollégáinkat, akik bevezető gráfelméleti kurzusok előadóiként számtalan zárthelyi- és vizsgapéldasort készítettek (melyekből bőségesen szerepeltetünk feladatokat),
- valamint azokat a volt hallgatóinkat (részben jelenlegi kollégáinkat), akik gyakorlatvezetőként rengeteget segítettek a feladatsorok összeállításában, csiszolásában, így különösen a következőket: Bíró Péter, Csima Judit, Faragó Gergely, Felszeghy Bálint, Harcos Gergely, Hoffmann György, Horváth Miklós, Jordán Árpád, Katona Zsolt, Koblinger Egmont, Laczay Bálint, Mann Zoltán, Marx Dániel, Megyeri Csaba, Németh András, Németh Attila, Németh Zoltán, Ónody Sándor, Orbán András, Patakfalvi Zsolt, Pintér Márta, Rácz Balázs, Radics Norbert, Richlik György, Ruzsinkó Miklós, Salamon Gábor, Schlotter Ildikó, Szabó Jácint, Szabó Réka, Szegő László, Szigeti Zoltán, Sziklai Péter, Szkaliczki Tibor, Tóth Géza, Urbán Péter, Visontai Mirkó.

Végül, de nem utolsósorban, ki kell emelnünk T. Sós Vera és Lovász László szerepét, akiktől nemcsak gráfelméletet, hanem a tárgy szeretetét is tanultuk.