1

Halmazok; a matematikai logika elemei

1.1. A halmaz fogalma; jelölések

A matematikában *alapfogalmaknak* tekintjük azokat a fogalmakat, amelyeket nem határozunk meg, nem definiálunk más fogalmak segítségével rendszerint azért, mert meghatározásukhoz a szóban forgó fogalomnál bonyolultabb fogalmakat kellene felhasználnunk. Az egyik leggyakrabban használt alapfogalom a *halmaz* fogalma.

A halmaz bizonyos dolgok, fogalmak, tárgyak, személyek stb. együttese, összessége; ezek a dolgok, fogalmak stb. a halmaz elemei. Néhány példa halmazokra:

A: a 9-nél kisebb pozitív egész számok halmaza;

B: egy adott sík háromszögeinek a halmaza;

C: az 1997-nél nagyobb egész számok halmaza;

D: azoknak a pozitív egész számoknak a halmaza, amelyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul;

E: az egy osztályban tanuló diákok halmaza.

Ezek közül az **A**-val és **E**-vel jelölt halmaznak véges sok eleme van; ezek számát egy természetes számmal lehet megadni, az ilyen halmazt *végesnek* mondjuk. Ezzel szemben a **B**, **C**, **D** halmazoknál ez nem lehetséges, ezek *végtelen* halmazok. A halmazokat rendszerint nagybetűvel szoktuk jelölni, az elemeit pedig kisbetűkkel. A hozzátartozás jele: $\in$, pl. $7 \in \mathbf{A}$ (olv.: 7 eleme az **A**-nak), a „nem eleme” jelölése ennek a jelnek áthúzott változata: $\notin$, pl. $9 \notin \mathbf{A}$.

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatározzák. Két halmaz akkor és csakis akkor egyenlő, ha elemeik azonosak. Egy halmazban egy

„valami” csak egyszer szerepelhet elemként, még akkor is, ha az elemek felsorolásakor ezt esetleg többször is említenénk.

A halmazokat sokféle módon adhatjuk meg; a véges halmazoknak pl. felsorolhatjuk az elemeit, az elemeket ilyenkor kapcsos zárójelbe tesszük:

$$\mathbf{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}.$$

Megadhatjuk a halmazokat olyan utasítással is, amelynek alapján bármely elemről eldönthető, hogy hozzátartozik-e a halmazhoz vagy sem. Ilyen esetben tetszőleges számhalmaz esetében is használjuk a kapcsos zárójelet, méghozzá rendszerint a következő formában: először leírjuk a halmaz egy általános (azaz tetszőleges) elemének a jelét, pl. x-et, majd egy függőleges elválasztó vonal következik, ezután megadjuk azt az ismertnek feltételezett nagyobb halmazt, amelynek x eleme, majd azt a speciális tulajdonságot, amelynek alapján az x elemeket ebből a nagyobb halmazból kiválasztjuk. Pl. az egész számok halmazát **Z**-vel jelölve, az előbbi **C** halmazt a következő módon adhatjuk meg:

$$\mathbf{C} = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, \quad x > 1997\}.$$

Ugyanezzel a módszerrel a **D** halmaz megadása:

$$\mathbf{D} = \{x \mid x = 3k+2, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

A függőleges vonal helyett gyakran kettőspontot vagy pontosvesszőt használnak.

Már itt felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy bizonyos halmazt többféle módon is megadhatunk.

Célszerűségből bevezetjük az elem nélküli halmaz fogalmát, ennek neve: *üres halmaz*, jele: $\emptyset$.

Példák üres halmazokra:

– azon számok halmaza, amelyek kisebbek 10-nél, de nagyobbak 12-nél, vagy

– az $x^2 = -1$ egyenletet kielégítő valós számok halmaza.

1.2. Részhalmazok; komplementer halmaz

Az **A** halmazt a **B** halmaz *részhalmazának* nevezzük, ha **A** minden eleme **B**-nek is eleme; jelöléssel:

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}.$$

Eszerint minden halmaz részhalmaza saját magának.

Az üres halmazt minden halmaz valódi részhalmazának tekintjük; ez a tény számos tétel megfogalmazását lényegesen egyszerűsíti. Ha viszont **A** részhalmaza **B**-nek, de nem egyenlő **B**-vel, akkor **A**-t a **B** *valódi részhalmazának* nevezzük, ennek a kapcsolatnak a jele $\mathbf{A} \subsetneqq \mathbf{B}$. (Azt, hogy **A** részhalmaza **B**-nek, régebben az $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ szimbólummal jelölték, ebben az esetben a valódi részhalmaz jele $\subset$.)

Példák a részhalmazokra:

– az egész számok halmazának részhalmaza a páros számok halmaza,

– a páros számok halmazának részhalmaza a 10-zel osztható számok halmaza,

– a háromszögek halmazának részhalmaza a szabályos háromszögek halmaza,

– az $\mathbf{E} = \{1,\ 2,\ 3\}$ halmaz részhalmazai: $\mathbf{E}_1 = \emptyset$, $\mathbf{E}_2 = \{1\}$, $\mathbf{E}_3 = \{2\}$, $\mathbf{E}_4 = \{3\}$, $\mathbf{E}_5 = \{1,\ 2\}$, $\mathbf{E}_6 = \{1,\ 3\}$, $\mathbf{E}_7 = \{2,\ 3\}$, $\mathbf{E}_8 = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Ezek közül tehát $\mathbf{E}_8$ nem valódi részhalmaz, a többi valódi részhalmaz.

Ha $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, akkor szükségképpen $\mathbf{A} = \mathbf{B}$,

hiszen ez azt jelenti, hogy **A** minden elemét **B** is tartalmazza, és **B** minden eleme **A**-nak is eleme, tehát **A** és **B** elemei azonosak. Éppen ezért

két halmaz azonosságát (egyenlőségét) úgy bizonyíthatjuk, hogy megmutatjuk: bármelyikük minden eleme hozzátartozik a másik halmazhoz is.

Legyen pl. az **A** halmaz egy síkon a *P* és *Q* pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmaza, a **B** halmazt pedig a *PQ* szakasz felező merőlegesének a pontjai alkotják. E két halmaz egyenlő voltának az igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, vagyis hogy a *P*-től és *Q*-tól egyenlő távolságra levő pontok rajta vannak a felező merőlegesen; majd pedig azt, hogy $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, vagyis, hogy *PQ* felező merőlegesének a pontjai egyenlő távol vannak *P*-től és *Q*-tól.

Ha **A** részhalmaza **B**-nek, akkor a **B** halmaz **A**-hoz nem tartozó elemei az **A** *komplementer halmazát (kiegészítő halmazát, komplementerét)* alkotják **B**-ben. **A** komplementerének jele $\overline{\mathbf{A}}$.

Jelölje **Z** az egész számok halmazát, **A** pedig a páros egészek halmazát. **A** komplementere **Z**-ben a páratlan számok halmaza.

A komplementer képzése tehát mindig bizonyos alaphalmazra vonatkoztatva történik; egy halmaz komplementer halmazáról csak akkor van értelme beszélni, ha az alaphalmazt is megadjuk. Fogalomalkotásunkból egyébként közvetlenül következik, hogy rögzített alaphalmaz esetén az **A** halmaz komplementerének komplementere **A**-val egyenlő: $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$.

1.3. Halmazműveletek

A számok körében bizonyos számokból a műveletek során meghatározott szabályok szerint újabb számokat állítunk elő. Ennek a mintájára azokat az eljárásokat, amelyek során bizonyos halmazokból újabbakat állítunk elő, *halmazműveleteknek* nevezzük. Ezek közül most néhány gyakrabban előfordulóval foglalkozunk.

Az **A** és **B** halmazok *uniója* azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az **A** és **B** halmazok közül legalább az egyiknek elemei. **A** és **B** uniójának jele $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ (olv.: **A** unió **B**). $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ más elnevezései: **A** és **B** egyesítése vagy **A** és **B** összege.

Példák két halmaz uniójára:

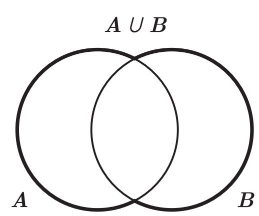
– a páros számok halmazának és a páratlan számok halmazának uniója az egész számok halmaza,
– a 15-nél nagyobb számok halmazának és a 0-nál nagyobb számok halmazának uniója a pozitív számok halmaza,
– a 15-nél nagyobb valós számok halmazának és a 15-nél kisebb valós számok halmazának uniója a valós számok halmaza a 15 kivételével.

Az **A** és **B** halmazok *metszetét* **A** és **B** közös elemei alkotják. **A** és **B** metszetének jele $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ (olv.: **A** metszet **B**), a metszetet gyakran közös résznek is mondják (néha **A** és **B** szorzatának).

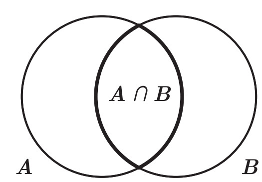
Példák két halmaz metszetére:

– a páros számok halmazának és a páratlan számok halmazának metszete az üres halmaz,
– a 15-nél nagyobb számok halmazának és a 0-nál nagyobb számok halmazának a metszete a 15-nél nagyobb számok halmaza,
– a 15-nél nagyobb számok halmazának és a 30-nál kisebb számok halmazának metszete a 15 és 30 közé eső számok halmaza.

A halmazműveleteket és a velük kapcsolatos összefüggéseket jól szemléltetik az ún. *Venn-diagramok* (ezeket J. Venn angol matematikusról nevezték el); a halmazokat körlapokkal ábrázoljuk. Következő ábráinkon az eredményül kapott halmaz határát vastag vonallal jelöltük (1.3.1. és 1.3.2. ábra).



1.3.1. ábra. Halmazok uniója



1.3.2. ábra. Halmazok metszete

Az unióművelet és a metszetképzés definíciója alapján (de a Venn-diagramok segítségével is) könnyen igazolhatók a következő azonosságok:

Unió:

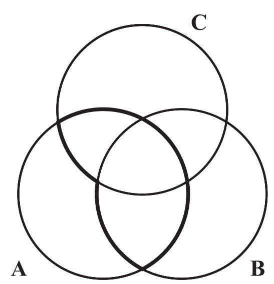
$$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}\cup\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cup\emptyset=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cup\mathbf{C}.$$

Metszet:

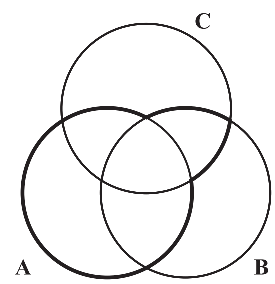
$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{B}\cap\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cap\emptyset=\emptyset,$$
$$\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C}.$$

Megjegyezzük, hogy a halmazműveleteket – ugyanúgy, mint a számok körében értelmezett műveleteket – tetszőleges számú halmazra is kiterjeszthetjük az utolsó ún. *asszociatív* tulajdonság alapján.

Az **A** és **B** közös elem nélküli halmazokra jellemző, hogy metszetük üres, azaz $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\emptyset$, az ilyen halmazokat *diszjunkt halmazoknak* (néha: *idegen halmazoknak*) mondjuk.



1.3.3. ábra.
$\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})$

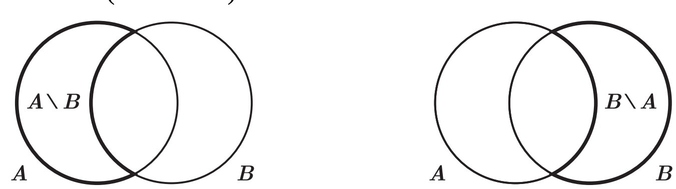


1.3.4. ábra.
$\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})$

A most bevezetett két művelet összekapcsolásával jönnek létre az ún. *disztributív szabályok* (1.3.3. és 1.3.4. ábra)

$$\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C}),$$
$$\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap(\mathbf{A}\cup\mathbf{C}).$$

Az **A** halmaz és a **B** halmaz *differenciáját* (ebben a sorrendben!) az **A** halmaznak azok az elemei alkotják, amelyek nem elemei **B**-nek; **A** és **B** differenciájának jele: $\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}$ (olv.: **A** mínusz **B**). Az $\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}$ halmazok nem azonosak (1.3.5. ábra).



1.3.5 ábra. $\mathbf{A}\setminus\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}\setminus\mathbf{A}$

Ha pl. **R** a valós számok halmaza, $\mathbf{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 1\}$ jelenti azt a halmazt, amely a valós számok halmazából a $-1,\ 0,\ 1$ számok elhagyásával keletkezett.

Nyilván teljesülnek a következő azonosságok:

$$\mathbf{A} \setminus \emptyset = \mathbf{A}, \qquad \emptyset \setminus \mathbf{A} = \emptyset, \qquad \mathbf{A} \setminus \mathbf{A} = \emptyset.$$

Következő műveletünk tartalmát tekintve eltér az eddigiektől, az eddig tárgyalt esetekben ugyanis a művelettel nyert halmaz elemei a kiindulásul vett halmazok elemeiből állnak össze, a meghatározott szabályok szerint. Új műveletünknél azonban az eredményként kapott halmaz elemei már jellegükben eltérnek az eredeti halmazok elemeitől.

Az **A** és **B** halmazok *direkt szorzatán* az összes olyan $(a;b)$ rendezett pároknak a halmazát értjük, amelynél a $a \in \mathbf{A}$ és $b \in \mathbf{B}$; a rendezettség azt jelenti, hogy a páron belül az **A**-hoz tartozót tekintjük elsőnek és a **B**-hez tartozót másodiknak. **A** és **B** direkt szorzatának jele: $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (olv.: **A** kereszt **B**). $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tehát általában nem azonos $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$-val. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ más elnevezése: **A** és **B** *Descartes-féle* (olv. dékart-féle) *szorzata* (R. Descartes francia matematikus-filozófusról).

Legyen pl. $\mathbf{A} = \{1,\ 2,\ 3\}$, $\mathbf{B} = \{4,\ 5\}$, akkor

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5)\},$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \{(4,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5)\}.$$

Az $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ Descartes-féle szorzat elnevezése onnan származik, hogy ha **A** a valós számok halmaza, $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ a sík pontjainak Descartes-féle koordinátáiból áll.

1.4. A halmazok ekvivalenciája

Tegyük fel, hogy az **A** és **B** halmazok olyanok, hogy **A** minden eleméhez hozzárendelhető **B**-nek egy és csakis egy eleme úgy, hogy minden **B**-beli elem **A**-nak pontosan egy eleméhez van hozzárendelve. Ezt a hozzárendelést, kapcsolatteremtést, az **A** és **B** közötti *kölcsönösen egyértelmű* (más elnevezéssel: *egy-egy értelmű*) *hozzárendelésnek* nevezzük.

A kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés azt is jelenti, hogy a két halmaz elemeiből elempárokat képezünk úgy, hogy minden elempárban szerepel egy-egy elem mindkét halmazból, és mindkét halmaz valamennyi eleme pontosan egy elempárban fordul elő.

Legyen pl. **A** a pozitív egészek, **B** pedig a pozitív páros egészek, **C** pedig a páratlan pozitív egészek halmaza.

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{A}: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots, & n,\ n+1, \ldots \\
\mathbf{B}: & 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots, & 2n,\ 2n+2,\ \ldots \\
\mathbf{C}: & 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots, & 2n-1,\ 2n+1,\ \ldots
\end{array}$$

Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető **A** és **B** elemei között úgy, hogy **A** minden eleméhez a **B**-beli kétszeresét (az egymás alatt álló számokat) rendeljük hozzá, ily módon minden **B**-beli elemhez pontosan egy **A**-beli tartozik, ti. éppen a fele.

Az **A** és **C** halmaz elemei között is létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés; itt is minden **A**-beli elemhez az alatta levőt rendeljük hozzá, azaz az n pozitív egészhez az n-edik páratlan számot, $2n-1$-et.

Viszont a **B** és **C** halmazok elemei között is van kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, **B** minden eleméhez rendeljük hozzá az előtte állót, azaz a nála eggyel kisebb számot, általában a $2n$ alakú számhoz $2n-1$-et.

Ha két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor a két halmazt *ekvivalensnek* (*egyenértékűnek*) mondjuk.

Előbbi megállapításunk szerint tehát a pozitív egész számok halmaza ekvivalens a páros és a páratlan pozitív egészek halmazával is; ugyanakkor a páros és páratlan egészek halmaza egymással is ekvivalens.

Ha két véges halmaz ekvivalens, akkor azonos az elemszámuk, ez közvetlenül következik az ekvivalencia fogalmából.

A halmazok ekvivalenciája tehát annak a fogalomnak a kiterjesztése a halmazok körében, amit a véges halmazok esetén úgy fejezünk ki, hogy azonos az elemszámuk. A mi fogalomalkotásunknak következménye a végtelen halmazok körében, hogy egy végtelen halmaz ekvivalens lehet valódi részhalmazával; pl. mint láttuk, a pozitív egészek halmaza ekvivalens a pozitív páros számok vagy a pozitív páratlan számok halmazával.

A pozitív egészek halmazával ekvivalens halmazokat *megszámlálható halmazoknak* nevezzük.

Bebizonyítható, hogy megszámlálható az egész számok halmaza is, sőt a racionális számoké is. Nem igaz azonban, hogy bármely végtelen halmaz megszámlálható; a valós számok halmaza vagy egy egyenes pontjainak a halmaza nem megszámlálható.

Az **A**, **B**, **C** halmazok vizsgálatakor a megszámlálható halmazokról szemléletes képet is nyerhetünk; az, hogy a megszámlálható halmaz elemei a pozitív egészek elemei „alá írhatók”, azt jelenti, hogy sorozatba rendezhetők, bizonyos egymásutániság, sorrend állapítható meg közöttük. *A megszámlálhatóság és a (végtelen) sorozatba való rendezhetőség egy halmaznál tehát ugyanazt jelenti.*

1.5. A matematikai logika elemei; az ítéletkalkulus

A matematikának jellegzetessége, hogy tételeit, eredményeit más tételekből levezeti, azaz bizonyos megszabott módon már meglévő tételekből, állításokból újabb tételekre következtet. A helyes matematikai következtetések szerkezeti törvényeivel a *matematikai logika* foglalkozik.

A legáltalánosabb következtetési módok (következtetési sémák) alapját a *logikai ítéletek* alkotják.

Logikai ítéletnek nevezünk egy kijelentő mondatot, ha egyértelműen eldönthető, hogy a benne foglalt állítás igaz vagy hamis.

A logikai ítéletet az egyszerűség kedvéért csak ítéletnek fogjuk nevezni; az ítélet fogalmát szokás még az „állítás”, „kijelentés” szavakkal is jelölni.

A matematikai logika az ítéleteknél eltekint azok tartalmától, jelentésétől, csupán igaz vagy nem igaz (azaz hamis) voltukkal foglalkozik; az ítélet „igaz” vagy „hamis” voltát az ítélet *logikai értékének* nevezzük. Nézzünk most néhány egyszerű ítéletet.

A: A háromszög síkidom.

B: A háromszög szögeinek összege 180°.

C: 1990 egész szám.

D: 1990 páratlan szám.

E: 1990 páros szám.

Az A, B, C, E ítéletek logikai értéke igaz, a D ítéleté hamis.

A fenti egyszerű ítéletből új ítéletet alkothatunk pl. úgy, hogy tagadjuk valamelyik ítéletet, vagy pedig két ítéletet valamilyen formában összekapcsolunk. Ezt az eljárás szokás az ítéletek körében végzett műveletnek nevezni, feltéve, hogy az új ítélet logikai értékét az eredeti ítélet (vagy ítéletek) logikai értéke egyértelműen meghatározza.

A matematikai logika ítéletműveletekkel foglalkozó része az *ítéletkalkulus*, más elnevezéssel: *kijelentéskalkulus* vagy *állításkalkulus*.

A legegyszerűbb ítéletművelet a *negáció (tagadás)*; a P ítélet negációján a *„Nem igaz, hogy P”* ítéletet értjük. Jele: $\neg P$, olvasása: nem P. Ez azt jelenti, hogy *ha P igaz, akkor* $\neg P$ *hamis, ha P hamis, akkor* $\neg P$ *igaz*.

Előző példáinkban pl. $\neg C$: „nem igaz, hogy 1990 egész szám”, vagy egyszerűen: „1990 nem egész szám” hamis állítás, mivel C igaz volt. Viszont $\neg D$: „1990 nem páratlan szám”, ítélet igaz, mivel D hamis volt.

A negáció az egyetlen olyan ítéletművelet, amelynél csak egy ítéletből alkotunk új ítéletet; a többi műveletnél már legalább két ítéletből indulunk ki.

A P és Q ítélet *konjunkcióján* a „P és Q” ítéletet (vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját) értjük. P és Q konjunkciójának jele: $P \wedge Q$, olvasása: P és Q. Definíció szerint $P \wedge Q$ *akkor és csakis akkor igaz, ha P is és Q is igaz.*

Előző példáinkban $A \wedge B$: „A háromszög síkidom és szögeinek összege 180°” igaz állítás, mert A is és B is igaz; viszont a $C \wedge D$ ítélet: „1990 egész szám és páratlan” hamis állítás, mert D hamis volt.

Hasonlóan kapjuk, hogy pl. $A \wedge C$, $B \wedge C$ igaz; $A \wedge D$, $B \wedge D$ hamis ítéletek.

A P és Q ítéletek *diszjunkcióján* „a megengedő vagy”-gyal összekapcsolt „*P vagy Q*” ítéletet értjük. P és Q diszjunkiójának jele: $P \vee Q$, olv.: P vagy Q. *$P \vee Q$ akkor és csakis akkor hamis, ha P is és Q is hamis.* A $P \vee Q$ ítélet nyelvtanilag pontos megfogalmazása nem mindig egyszerű, mert lényegében azt jelenti, hogy $P \vee Q$ akkor igaz, ha P és Q közül legalább az egyik igaz (de lehet, hogy mind a kettő is).

Pl.: $D \vee E$ igaz, mert E igaz, de D nem; $C \vee D$ is nyilván igaz.

A P és Q ítéletek *implikációján* a *„ha P, akkor Q”* alakú ítéletet nevezzük, ami *akkor és csakis akkor hamis, amikor P igaz, de Q hamis*. Jele $P \to Q$, olv.: ha P, akkor Q (vagy P implikálja Q-t).

Pl. $A \to B$ igaz, $C \to D$ hamis, $D \to C$ igaz. (Ezt az utóbbit megállapodás szerint igaznak tekintjük, bár hétköznapi értelemben nem használjuk.)

Észrevehetjük, hogy a konjunkcióval és a diszjunkcióval ellentétben az implikációnál már nem cserélhető fel az ítéletek sorrendje.

A matematikai levezetések egyik leggyakoribb ítéletművelete az *ekvivalencia* (egyenértékűség). A P és Q ítéletek ekvivalenciáján a „*P akkor és csakis akkor, ha Q*” ítéletet nevezzük; jele $P \leftrightarrow Q$, olvasása: P akkor és csakis akkor, ha Q, vagy P ekvivalens Q-val. *$P \leftrightarrow Q$ akkor és csakis akkor igaz, ha P és Q egyszerre igazak vagy egyszerre hamisak.*

Pl.: $A \leftrightarrow B$ igaz, $B \leftrightarrow A$ igaz, $C \leftrightarrow D$ hamis.

1.6. Logikai műveletek

Észrevehetjük, hogy példáinkban ítéletműveleteink leegyszerűsített nyelvi megfogalmazásai sokszor „sántítanak”, nem érezzük pontosnak a tartalmukat, s ezt a látszólagos ellentmondást csak hosszabb körülírással tudjuk feloldani. Az igazság az, hogy a műveletek eredményeként kapott ítéletek igazságértékét definícióknak kell tekintenünk, a műveletek lényegében azt jelentik, hogy a logikai értékek (igaz, hamis) rendezett párjaihoz (negáció esetén egyetlen logikai értékhez) egy logikai értéket rendelünk. Ha az *igaz* értéket i-vel, a *hamis* értéket h-va1 jelöljük, akkor pl. $i \wedge h = h$, $i \leftrightarrow i = i$.

A logikai értékekkel végzett műveletek – az ún. *logikai műveletek* – értéktáblázata ezek szerint a következő (p és q ún. *logikai változók*, az i és h értékek valamelyikét jelölik):

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

Ezeken kívül még más logikai műveletek is használatosak.

A műveletek összekapcsolásával – ugyanúgy, mint a számok körében – itt is kaphatunk azonosságokat, olyan egyenlőségeket, amelyek a bennük szereplő logikai változók bármely értékeire fennállnak. Néhányat a nevezetesebb azonosságok közül:

$$\neg(\neg p) = p, \tag{1.6.1}$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r), \tag{1.6.2}$$

$$p \vee \neg p = i, \; p \wedge \neg p = h, \tag{1.6.3}$$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q, \tag{1.6.4}$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q, \tag{1.6.5}$$

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q), \tag{1.6.6}$$

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p). \tag{1.6.7}$$

Ezeknek a bizonyítása a bennük szereplő logikai változók minden lehetséges értékének a vizsgálatával történhet. Ha pl. $p = i$, $q = h$, az (1.6.5) azonosság bal oldala:

$$p \vee q = i \vee h = i, \quad \neg i = h, \quad \neg(p \vee q) = h,$$

a jobb oldala:

$$\neg p = h, \quad \neg q = i, \quad h \wedge i = h, \quad \neg p \wedge \neg q = h.$$

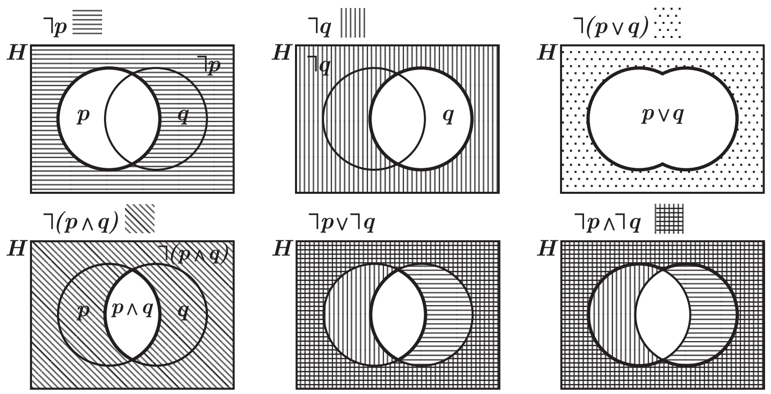
Az (1.6.6) azonosság szerint a konjunkció kifejezhető negáció és diszjunkció segítségével; ez egyébként nemcsak a konjunkcióra, hanem valamennyi logikai műveletre igaz. Az implikáció ilyen jellegű kifejezése pl.:

$$p \to q = \neg p \vee q.$$

Az ítéletkalkulus műveleteinek és így a logikai műveletek szemléltetésére jól használhatók a Venn-diagramok (1.3. szakasz) ezek segítségével kapcsolatot találhatunk a halmazműveletek és a logikai műveletek között. Legyen a **H** alaphalmaz képe egy téglalap, **H** valódi részhalmazai pedig a körlemezekkel ábrázolt p és q halmazok. Feleltessük most meg a p és q logikai változóknak a p és q részhalmazokat, a p-vel és q-val végzett logikai műveleteknek pedig halmazműveleteket, méghozzá:

$\neg p$-nek, ill. $\neg q$-nak	p, ill. q **H**-beli komplementerét,
$p \vee q-$nak	p és q unióját,
$p \wedge q$-nak	p és q metszetét.

Könnyen beláthatjuk, hogy ennél a megfeleltetésnél minden halmazműveleti azonosságnak egy, a logikai változók és műveleteik körében érvényes azonosság felel meg. Szemléltessük pl. az (1.6.4), (1.6.5) azonosságokat, amiket egyébként *De Morgan-azonosságnak* szokás nevezni (1.6.1. ábra):



1.6.1. ábra. De Morgan-azonosságok

A matematikai logika tárgykörébe tartozik két szövegrövidítési szimbólum: A „*Minden x-re*” szöveg szimbolikus jelölése: $\forall x$. A „*Van olyan x, hogy*” szöveg szimbolikus jelölése: $\exists x$.

Pl.: Jelöljön **A** és **B** halmazokat.

– Az **A** a **B** részhalmaza, ha $\forall x \in \mathbf{A}$-ra $x \in \mathbf{B}$ is igaz $\big($vagy $\forall x\ (x \in \mathbf{A} \to \to x \in \mathbf{B})\big)$.

– Ha $\exists x \in \mathbf{A}$, amelyre $x \in \mathbf{B}$ is igaz, akkor $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$.