

Reiman István: Matematika

Reiman István

Matematika



Budapest, 2011

© Reiman István, Typotex, 2011
Az 1992-es kiadás alapján készült.

Lektorálták: Laczkó László, Pálmay Lóránt, Urbán János

ISBN 978 963 279 300 9

Témakör: *matematika*

A Typotex Kiadó további kézikönyvei:

Bronstejn – Musiol – Mühlig – Szemengyajev:

Matematikai kézikönyv

Holics István: *Fizika összefoglaló*

Tartalom

Előszó	13
1. Halmazok; a matematikai logika elemei	15
1.1. A halmaz fogalma; jelölések	15
1.2. Részhalmazok; komplementer halmaz	16
1.3. Halmazműveletek	17
1.4. A halmazok ekvivalenciája	20
1.5. A matematikai logika elemei; az ítéletkalkulus	21
1.6. Logikai műveletek	23
2. Valós számok	26
2.1. Természetes számok; egész számok	26
2.2. Racionális számok; törtműveletek	29
2.3. Egész kitevős hatványok	33
2.4. Tizedestörtek; a racionális számok végtelen tizedestört alakja	35
2.5. Irracionális számok; a valós számok halmaza	39
2.6. Számok közelítő értéke, kerekítés; a számok normálalakja	40
2.7. A valós számok abszolút értéke	42
3. Algebrai egész és törtkifejezések	44
3.1. Algebrai egész kifejezések és műveleteik	44

6 Tartalomjegyzék

3.2.	Fontosabb azonosságok a többtagú algebrai egész kifejezések körében	48
3.3.	Algebrai törtkifejezések és műveleteik	50
3.4.	Feladatok a racionális algebrai kifejezések körében végzett műveletekre és alkalmazásaikra	53
3.5.	Arányok, aránypárok; arányosság	54
4.	A számelmélet elemei	57
4.1.	A prímszámok; a számelmélet alaptétele; oszthatósági ismertetőjegyek	57
4.2.	Legnagyobb közös osztó; legkisebb közös többszörös	60
4.3.	Az egész rész; maradékos osztás; maradékosztályok	62
4.4.	Számrendszerek	64
4.5.	Egy bizonyítási módszer: a teljes indukció	65
5.	Négyzetgyökös kifejezések	69
5.1.	Számok négyzetgyöke	69
5.2.	Műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel	72
5.3.	Példák a négyzetgyökös kifejezések körében végzett műveletekre	74
6.	Racionális és valós kitevőjű hatványok; logaritmus	77
6.1.	Az n -edik gyök fogalma	77
6.2.	Racionális kitevőjű hatványok	78
6.3.	Valós kitevőjű hatványok	79
6.4.	A logaritmus fogalma	80
6.5.	A logaritmus azonosságai	82
6.6.	Kapcsolat különböző alapú logaritmusok között; logaritmusrendszerek	83
6.7.	A logaritmus mint számítástechnikai segédeszköz	85
7.	Egyenletek	86
7.1.	Az egyenlet fogalma; egyenletek ekvivalenciája	86
7.2.	Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek	89

7.3.	Elsőfokú egyenletrendszerek	92
7.4.	Egyismeretlenes másodfokú egyenlet	98
7.5.	Másodfokúra visszavezethető egyenletek	103
7.6.	Négyzetgyökös egyenletek	105
7.7.	Másodfokú egyenletrendszerek	107
7.8.	Egyenletekre vezető feladatok	108
7.9.	Diofantikus egyenletek	112
8.	Egyenlőtlenségek	114
8.1.	Az egyenlőtlenségek alaptulajdonságai	114
8.2.	Azonos egyenlőtlenségek	115
8.3.	Elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek és egyenlőtlenség-rendszerek	119
9.	Százalékszámítás	122
9.1.	A százalék fogalma; a százalékszámítás	122
9.2.	Százalékos növekedés; százalékos csökkenés	123
9.3.	Feladatok a százalékszámítás alkalmazására	124
10.	Két segédeszköz: a determináns és a mátrix	125
10.1.	A másodrendű determináns fogalma; általánosítható tulajdonságai	125
10.2.	Az n -edrendű determináns fogalma	126
10.3.	Többismeretlenes, elsőfokú egyenletrendszerek; Cramer-szabály	129
10.4.	A determinánsok általános tulajdonságai	131
10.5.	A mátrix fogalma; speciális mátrixok	132
10.6.	Műveletek a mátrixok körében	134
10.7.	Az inverzmátrix; kapcsolat az elsőfokú egyenletrendszerrel	136
11.	Komplex számok	139
11.1.	A komplex szám fogalma; műveletek komplex számokkal	139
11.2.	A komplex számsík	141
11.3.	A komplex számok trigonometriai alakja	144

11.4. A komplex számok exponenciális alakja	149
12. Egyhatározatlanú (egyváltozós) polinomok	151
12.1. Az egyhatározatlanú polinom fogalma; a Horner-módszer	151
12.2. A polinomok osztási algoritmusa	152
12.3. A polinomok gyöktényezőss alakja	154
12.4. Egész együtthatós polinomok racionális gyökei	155
13. Kombinatorika	159
13.1. Sorba rendezési problémák; permutációk, variációk	159
13.2. Részhalmaz-kiválasztási problémák; kombinációk	164
13.3. A binomiális tétel; binomiális együtthatók	166
13.4. A skatulyaelv és a logikaiszita-formula	168
13.5. Gráfok; a gráfokkal kapcsolatos alapfogalmak	172
13.6. Néhány egyszerűbb gráfelméleti összefüggés; a gráfok Euler-vonala	174
13.7. Síkbeli gráfok; fák, erdők; páros gráfok	176
14. Elemi síkgeometria	180
14.1. Síkgeometriai alapfogalmak. Konvex alakzatok	180
14.2. Szögek; szögpárok	181
14.3. Sokszögek; szögösszeg	185
14.4. Az egybevágóság; háromszögek egybevágósága	188
14.5. Tengelyes tükrözés; tengelyesen szimmetrikus alakzatok	191
14.6. Középpontos szimmetria; paralelogrammák	196
14.7. A kör. Kerületi és középponti szögek; Thalész tétele	199
14.8. Hasonlósági transzformációk; középpontos hasonlóság	203
14.9. Mértaniközép-tételek; Pitagorasz tétele	211
14.10. A sokszögek területe	216
14.11. A kör kerülete és területe; ívmérték	220
14.12. A háromszög geometriájából	225
14.13. Speciális négyszögek; sokszögek	233

15. A tér elemi geometriája	238
15.1. Egyenesek és síkok kölcsönös helyzete; párhuzamosság	238
15.2. Hajlásszögek és távolságok	240
15.3. Egybevágóság és hasonlóság a térben	243
15.4. Poliéderek: hasábok, gúlak; felszín és térfogat	245
15.5. Euler-féle poliédertétel; szabályos testek	253
15.6. Hengerek és kúpok	255
15.7. A gömb és részei	262
15.8. A gömbháromszög	267
16. Vektorok és alkalmazásai	270
16.1. A vektorok fogalma	270
16.2. Vektorok összeadása és kivonása	271
16.3. A vektorok szorzása számmal	275
16.4. Vektorok és pontok koordinátái	279
16.5. Osztópont, súlypont és alkalmazások	283
16.6. Trigonometrikus függvények	288
16.7. Skaláris szorzat	296
16.8. Trigonometriai összefüggések a háromszögben	304
16.9. Vektoriális szorzat	315
16.10. Vegyesszorzat; kifejtési tétel	322
16.11. A gömbháromszögek trigonometriája	325
17. Koordinátageometria	330
17.1. A pont eltolása és elforgatása; koordináta-transzformáció	330
17.2. Az egyenes egyenletei síkbeli koordináta-rendszerben	333
17.3. A kör egyenlete	348
17.4. A parabola és egyenletei	354
17.5. Az ellipszis és egyenletei	360
17.6. A hiperbola és egyenletei	366
17.7. Kúpszeletek és másodrendű görbék	371
17.8. Polárkoordináták	374

17.9. Egyenes és sík a térbeli koordináta-rendszerben	377
18. Szerkesztések	385
18.1. Az euklideszi alapszerkesztések és alkalmazásaik	385
18.2. Gyakorlati szerkesztések	396
19. Sorozatok	400
19.1. A sorozat fogalma, megadása	400
19.2. Számítási sorozatok	402
19.3. Mértani sorozatok	404
19.4. A mértani sorozat alkalmazásai; kamatoskamat-számítás	408
19.5. Konvergens sorozatok	411
19.6. Rekurziós sorozatok	418
19.7. Végtelen sorok	421
20. Függvények	425
20.1. A függvények fogalma, ábrázolása	425
20.2. A függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak	429
20.3. A függvény határértéke	434
20.4. Folytonos függvények	437
20.5. Racionális egész- és törtfüggvény	440
20.6. Hatványfüggvény	447
20.7. Exponenciális és logaritmusfüggvény; exponenciális és logaritmus egyenletek	448
20.8. Trigonometrikus függvények és inverzeik	452
20.9. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek	459
20.10. Hiperbolikus függvények és inverzeik	467
20.11. Néhány nevezetesebb függvény	470
21. Differenciál- és integrálszámítás	472
21.1. A differenciálhányados és a derivált függvény	472
21.2. Deriválási szabályok	475
21.3. Az elemi függvények deriválása	478
21.4. Közéértéktételek és következményeik	488

21.5. Magasabb rendű deriváltak; konvexitás, konkávitás	491
21.6. Függvényvizsgálat és alkalmazásai	494
21.7. A derivált alkalmazása határérték számítására; a l'Hospital-szabály	504
21.8. A Taylor-formula	507
21.9. Egyenletek közelítő megoldása	510
21.10. A primitív függvény	516
21.11. Az integrál fogalma	526
21.12. A Newton–Leibniz-tétel	532
21.13. Az integrálszámítás alkalmazásai	534
21.14. Közelítő módszerek az integrálszámításban	552
21.15. Néhány differenciálegyenlet megoldása	556
22. Valószínűség-számítás	565
22.1. A valószínűség-számítás tárgyköre; elemi események	565
22.2. A valószínűség alaptulajdonságai, a valószínűség klasszikus kiszámítási módja	568
22.3. A valószínűség geometriai kiszámítási módja	573
22.4. Feltételes valószínűség és függetlenség	577
22.5. Valószínűségi változók és eloszlásaik	580
22.6. A matematikai statisztika néhány alapfogalma	585
23. Táblázatok	589
Tárgymutató	600

Kiadói előszó

Egy könyv megjelenése a kiadó életében napi gyakorlat. Ám azt csak utólag, és akkor is csak nagyon nehezen lehet meghatározni, hogy a sok könyv közül melyik számított igazi állomásnak, melyik jelentett igazi változást, s terelt mindent új irányba.

Reiman István matematikai összefoglalója egy több évtizedes forradalmi mozgalom, az ún. „új matek” záró ékköve. Az „új matekosok”, függetlenül attól, hogy hol és kiket tanítottak, a matematika szépségét magukévá tették, és azon buzgólkodtak, hogy ezt a látásmódot továbbadják.

Reiman István nem foglalkozott didaktikával, hanem lenyűgözően tanított, mert nem csak teljes mélységében értette, amit mond, hanem ezt a megértést teljes mélységében át is tudta adni a tanítványainak. Jó volt az ő diákjának lenni, de ma már csak ezzel a könyvvel kárpótolhatja magát az olvasó. Örülök, hogy az a könyv, melynek ötlete több mint harminc éve merült fel bennem, szerkesztői pályám legelején, most a mi gondozásunkban jelenik meg.

Az 1992-es kiadás újratördelése közben hosszasan gondolkodtunk, átnevezzük-e a szövegekben a 100 forintos bankjegyet vagy Csehszlovákiát, ám végül úgy döntöttünk, megőrizzük mindent eredeti állapotában. Egyrészt a szövegezés a feladat lényegét nem érinti, másrészt pedig megvan ennek a maga bája.

Budapest, 2010. november 10.

Votisky Zsuzsa

Előszó

Könyvünk a matematikának azokat a fejezeteit tartalmazza, amelyeket általában a „középfokú” jelzővel szoktak megjelölni, kibővítve a felsőfokú oktatás néhány bevezető anyagrésztelével. Elsősorban a középiskolai tananyagban kíván segítséget nyújtani, de mindjárt hozzákapcsolja a matematikának azokat a tárgyköreit, amelyek átvezetnek a „magasabb” matematikába.

Az anyag összeállításával és tárgyalásmódjának a megválasztásával az volt a célunk, hogy az olvasó egységesen összefoglalva lásson egy-egy matematikai tárgykört az alkalmazásokkal együtt. E célból arra törekedtünk, hogy az adott szinten lehetőleg pontosan definiáljuk a felhasznált fogalmakat, szabatosan fogalmazzuk meg a tételeket, összefüggéseket, és ezek alkalmazásait egyszerűbb, ill. fokozatosan nehezedő példákön, feladatokon mutassuk be.

A könyv terjedelme nem teszi lehetővé, hogy minden tételünknek a bizonyítását is közöljük, ezek egy részének csak a gondolatmenetét adhattuk meg; a hiányzó bizonyítások megtalálhatók a tankönyvekben, kézikönyvekben. A példákat és a feladatokat úgy állítottuk össze, hogy azok lehetőleg ne használjanak fel a matematikán kívüli, kevésbé ismert fogalmakat, amik a megoldás megértését lényegesen megnehezítenék.

Az egyes fejezetek felépítése – éppen összefoglaló jellegük miatt – gyakran eltér az iskolában megszokott felépítésektől; itt többször egymás mellé kerülnek olyan szakaszok, amelyek az iskolai anyagban távol vannak egymástól, viszont esetleg különböző fejezetben található meg egymáshoz szorosan kapcsolódó anyagrészek. Az olvasás megkönnyítésére ezért gyakran hivatkozunk a kapcsolódó fejezet, ill. szakasz számára, pl. 20.5. a 20. fejezet 5. szakaszát jelenti; a többször felhasznált képleteket sorok jobb szélén három számmal jelöltük meg, pl. (16.5.8) a 16. fejezet 5. szakaszának a 8. képlete. A könyv végén található tárgymutatóban megkereshetjük, hogy egy-egy fogalom vagy tétel hol fordul elő, tehát hol található meg ezek definícióit, ill. megfogalmazásait. A könnyebb kezelhetőség érdekében néhány tételt, meghatározást többször is szerepeltetünk.

Szólnunk kell a könyvben használt matematikai jelölésekről. A jelölésrendszer napjainkban átalakulóban van. Igyekeztünk azokat a jelöléseket használni, amelyek ma hazánkban a legelterjedtebbek, de megadtuk a használatban levő más jelöléseket is. Általában arra törekedtünk, hogy csak a legszükségesebb jelöléseket használjuk, mert ezen a szinten a túl sok matematikai jelölés feleslegesen megnehezítheti a könyv olvasását.

A kézirat elkészítésében nyújtott nagy segítségükért köszönetet mondok a könyv szakmai lektorainak: Laczkó László vezető tanárnak, Pálmay Lóránt vezető szaktanácsadónak és Urbán Jánosnak, az OPI osztályvezetőjének; köszönettel tartozom P. Helvei Juditnak gondos és lelkiismeretes szerkesztő munkájáért és Vadas Istvánnak a kézirat gépeléséért és gondozásáért.