

RON AHARONI

MATEMATIKA SZÜLŐKNEK

Felnőtteknek
az iskolás matematikáról

*Fordította
Dedinszky Zsófia*



TYPOTEX

Tartalom

Előszó	7
Bevezetés	11
Első rész: Elemek	17
Mi a matematika?	18
A gazdaságosság három módja a matemati- kában	23
A matematikai szépség titka	29
Egyik réteg a másikon	35
Egész számok	48
Jelentés és számolás	54
A tízes számrendszer	61
Mit tanulunk?	69
Második rész: Út az absztrakcióhoz – a tanítás alapelvei	77
Átadni az absztrakciót	78
Változatosság és hibás beidegződés	81
Miért nehéz tanítani?	84
Mediáció	87
A legnyilvánvalóbb dolgot is ki kell mondani .	90
Bűvös szavak	93
Számológép és más segédeszközök	98
Merjünk egyszerűek lenni	103
Harmadik rész: Számтан az elsőtől a hatodik osz- tályig	105
A. Jelentés	106

Az összeadás jelentése	107
A kivonás jelentése	113
A szorzás jelentése	118
Az osztás két jelentése	131
Jelentés és szöveges feladatok	144
B. Számolás	145
Az összeadás kiszámolása	147
Kivonás: kölcsön vagy újrarendezés?	157
A szorzás kiszámolása	164
Memorizáljuk, vagy számoljuk ki újra?	174
Az osztás kiszámolását balról kezdjük	177
C) Törtek	186
Osztás és törtek	188
Törtek szorzása és osztása	199
Beszélgetés a törtekkel való osztásról	211
Törtes feladatok megoldásokkal	215
A közös nevező	218
A legkisebb közös többszörös	224
Vegyes törtek	228
D. Tizedes törtek	233
Tizedes törtek	235
Számolás tizedes törtekkel	243
Százalék – a törtek univerzális nyelve	254
E. Arányok	260
Arányosság	261
További arányossági problémák	269
Utószó	276
Függelék: Fordulópontok a modernkori matematikaoktatás történetében	278

Előszó

A felnőttek többsége gondosan eltemeti magában a matematikaoktatás emlékét. A legfőbb vágyuk: feledni a traumát. Múltbéli ügyetlenségüket fájdalmas, de megbocsátható tényként könyvelik el. „Igazából nincs is szükség a matekra” – vigasztalják magukat. Míg nem egy szép napon mégiscsak szükségük lesz rá, és akkor az egykori félelmek újból felszínre kerülnek. Ez általában olyankor történik, amikor saját gyermekük szembesül ugyanazokkal a problémákkal.

Sokan szívesen segítenének gyermeküknek a matektanulásban, de túlságosan rettegnek a találkozástól azzal a tárggyal, ami annyi szenvedést okozott nekik fiatalkorukban. Arra nem gondolnak ilyenkor, hogy iskoláskoruk óta számos új képességgel gazdagodtak. Egy felnőttnek sokkal nagyobb az önuralma, jobbak az absztrakciós képességei, ügyesebben küzd meg az összetett állításokkal, és van türelme kivárni, amíg a részletekből az egész kirajzolódik. Ezen képességek birtokában egyszerűbben és gyorsabban meg tud küzdeni az általános iskolai matematika problémáival.

E könyv célja útmutatást nyújtani mindehhez. Segítséget kínál a szülőnek, aki aktív részese szeretne lenni gyermeke matektanulásának. A könyv ötlete tulajdonképpen így fogant: a fiam iskolájában a többi szülő megkért arra, hogy írjak össze néhány ötletet,

miként segíthetnék gyermeküket a számtanban. Ám a néhány szerény vázlatpontból lassanként egy teljes könyv nőtt ki magát.

Csakhogy a könyveknek, akárcsak az ötleteknek, megvan a maguk élete. Néha nem csak írjuk alakítja őket, ők is alakítják az írókat. Ez most sem történt másként: a könyv lassanként átalakult. Az egyik felismerés, amit az általános iskolai tanítás során tettem, ez volt: az elemi matek csöppet sem „elemi”. Nagyon is mély és csodaszép. És ez a gondolat lassanként ebbe a könyvbe is átszüremlett, új irányt adva neki: az elemi matematika – és általánosságban az egész matematika – szépségének a leírása lett belőle. Ezáltal az eredeti célközönség is kiszélesedett, és immár azokhoz is szól, akik szeretnének visszatérni az iskolás matematikához, de friss szemmel tekinteni rá. Itt a második esély azon olvasók számára, akik megtanulták, hogyan kell írásban törteket szorozni vagy osztani, de sohasem értették, miért pont úgy: ők most új, felnőtt perspektívából tekinthetnek vissza ezekre az ismeretekre.

De van egy harmadik, hasonlóan fontos csoportja könyvem célközönségének: a tanárok és oktatók. Számukra a könyv a következő fontos üzenetet hordozza: a matematika helyes oktatása nem tanári trükkökkel, hanem a matematikai alapok maradéktalan megértetésével érhető el. Ismerni kell, hogyan épülnek egymásra a matematika legapróbb alapkövei is, és a legjobb, ha az elméletet közvetlen példák útján, nem pedig közvetetten sajátítjuk el.

A könyv első része, az *Elemek*, az elemi matematika alapjait ismerteti. Azokkal a kérdésekkel foglalkozik, hogy mi a matematika, mit kell megtanulni általános iskolában, és miért vetekszik szépségében a matematika a művészetekkel.

Annak a szülőnek, aki segíteni akar gyermekének, a matematikán felül tisztában kell lennie alapvető pedagógiai elvekkel is: például, hogy miként jussunk el a konkrét példától az absztrakt megfogalmazásig – ezekkel a könyv második részében foglalkozom. Ezen túl ismernie kell a gyermek iskolájában uralkodó oktatási elveket, irányzatokat is. Éppen ezért, a könyv függelékében dióhéjban ismertetem az elmúlt ötven év matematikaoktatásának főbb fejleményeit.

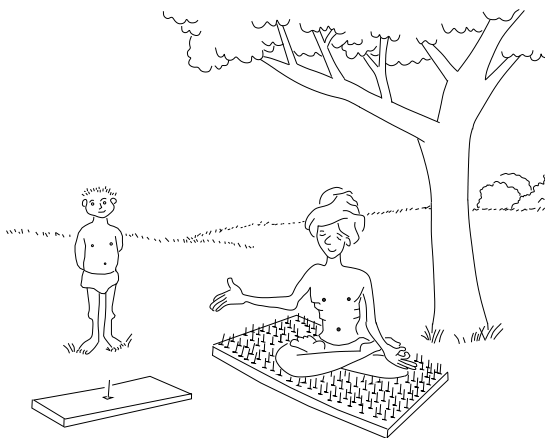
A harmadik részben az elemi matematika jelentéktelenebbnek tűnő apróságait tárgyalom, az iskolai tananyag részleteit, szintenként haladva. Bár a mértan a tanterv 10–20%-át alkotja, e könyvben figyelmen kívül hagytam, és csak a számtanra – azaz a számok tulajdonságaival foglalkozó tudományterületre – koncentráltam. Nemcsak a tantervben betöltött központi szerepe miatt döntöttem így, hanem azért is, mert a számtan olyan egységes és csiszolt, mint egy gyémánt – és méltó arra, hogy egy könyvet egyes-egyedül neki szenteljenek.

Első lecke

*Sohasem kapsz második
esélyt a jó első benyomásra*
Amerikai közmondás

Az oktatásban ugyanúgy, mint az életben, nagyon fontos az első benyomás. Bevezetésének mikéntje nagyban befolyásolja a tárgy és a tanuló jövőbeli viszonyát. Kellemes emlék lesz-e, vagy inkább fájdalmas? Az „értem!” vagy a „jaj, ez nehéz!” érzését kelti az emberben?

Ebből az okból a könyvben elszórva gyakran találkozhatnak *Első lecke a...* kezdetű részekkel. Ezekben javaslatokat kínálok arra, miként vezessünk be egy-egy témát. Soha sincs egyetlen üdvözítő módszer, de segíthet, ha van néhány ötlet a tarsolyunkban. A javaslatokat tanároknak szóló útmutatásként adom elő, de azok a szülők számára ugyanolyan hasznosak lehetnek.



Bevezetés

Amit az általános iskolában tanultam

*Egy költőnek mindig közel
kell maradnia gyermekkorához.*
Theodore Roethke, költő

Egy barátom a negyvenes éveiben döntött úgy, hogy feladja a technológiai iparban betöltött vezetői pozícióját, és az oktatásban keresi élete új értelmét. És nem is csak úgy általában az oktatásban, hanem épp a matematikaoktatásban. 2000 szeptemberében, nem sokkal a tanév kezdete előtt hívott fel, és számolt be egy új kezdeményezésről Ma'alotban, amely a matematikaoktatást kívánta népszerűsíteni, és ösztökélt, hogy csatlakozzak én is. (Ma'alot Izrael északi csücskében fekvő település, egyike azoknak, amelyeket az 1950-es években építettek fel az új bevándorlók fogadására – és amelyeket máig is viszonylag elmaradottnak szokás tartani.)

Jómagam egyetemen tanítok matematikát, de mindig is érdekelt az oktatás, és az évek során sok ifjúsági programban vettem részt. Többek közt például általános és középiskolás diákok tehetséggondozását is végeztem. Ám a hatodik osztály elvégzése óta nem léptem át általános iskola kapuját. Így aztán tanácsot kértem mindenkitől, akitől csak lehetett. A tanács

többé-kevésbé egybehangzóan így szólt: el sem tudod képzelni, mibe vágod a fejszédet. A tehetséges gyerekek tanítása teljesen más, mint az átlagos gyerekéké. Általános iskolában tanítani: hivatás. Ostobaság azt hinni, hogy az egyetemi oktatásban megismert alapelveket használni tudod majd. (Akkoriban ugyanis azt hittem, azokat legalább tényleg ismerem.)

Kétségeimet megosztottam egy tapasztalt tanárral is, akinek a véleményére mindig sokat adtam. Amikor meghallotta, mire készülök, tőle soha nem tapasztalt dührohamban tört ki. „Ne merészed! – kiáltott rám. – Az ilyen emberek, mint te teszik tönkre az általános iskolai oktatást. Ugyanolyan leszel, mint a többi egyetemi tudós, akinek fogalma sincs arról, hogyan kell tanítani, de elmegy továbbképzést tartani, hogy a tanárokat a fantazmagóriáival traktálja. Ha elmész Ma’alotba, mindenkit csak össze fogsz zavarni, és miután veled úgy megégették magukat, még a hideg vizet is kerülni fogják.”

Visszatekintve nem is értem, hogyan vághattam mégis bele. Talán az egyetemi professzor ártatlan önhittségével azt gondoltam, én mégiscsak jobban tudom, mi a tanítás, mint ők, akik végeredményben csak egyszerű tanárok. Visszatekintve rá kell jönnöm, hogy ha hallgattam volna a tanácsokra, életem legizgalmasabb kalandjáról maradtam volna le.

* * *

A jelszó, amit lobogómra tűztem: „Hagyd őket kísérletezni!” Elhatároztam: arra fogom készíteni a gyerekeket, hogy játsszanak a matematikai fogalmakkal, és miután konkrét példákon keresztül megismerkedtek velük, könnyebben megértik majd őket absztrakt formában is. Először magasabb osztályokban – negyedikben és ötödikben – kezdtem tanítani. Kivitettem a

gyerekeket a játszótérre, ahol megmértük a fák, épületek és póznák árnyékát. Kiszámoltuk a gyerekek valódi magasságának és árnyékának az arányát, majd ezen információ birtokában kiszámoltuk a fák magasságát az árnyékuk hosszából. (Az ötletet Thalészról kölcsönöztem, aki e módszer segítségével számolta ki a piramisok magasságát. Az i. e. VII. században élt Thalész volt az első olyan matematikus, akinek fennmaradt a neve.) Köröket rajzoltunk a földre, és megmértük a sugarukat, átmérőjüket és területüket, majd összehasonlítottuk az adatokat. Megmértük a terem hosszát és szélességét különböző módokon. Rájöttünk, hogy mennyi csempe fér el egy méterben, abból, hogy tudtuk a terem hosszát méterben és csempében, és kiszámoltuk ezek arányát.

Önhittségemért súlyos árat fizettem. Nagyon kevés érdemleges tudást tudtam így átadni: a tanórák nagy része maga volt a zűrzavar.

Emlékszem az első napra, amikor mindezt megértettem. Kivittem a negyedikeseket a játszótérre, hogy körök átmérőjét és területét méregessék a betonra rajzolt ábrákon. Az osztályfőnök türelmesen figyelte, ahogy kibontakozik az elkerülhetetlen káosz, mert a gyerekek azonnal kihasználták, hogy szabadon garázdálkodhatnak. Egy idő után a tanárnő azt javasolta, hogy térjünk vissza a terembe. Az iskolában aztán a táblán folytattuk a körrajzolást, majd megvitattuk a terület és az átmérő arányát. Teljesen ledöbbsentem, hogy milyen egyszerű volt értelmes diskurzust folytatni a gyerekekkel. Rájöttem, hogy alábecsültem a gyerekek absztrakciós képességét, és a szavak, valamint az együttgondolkodás erejét.

Szerencsére ugyanekkor kezdtem el elsősökkel is foglalkozni. Roppant izgalmas élmény volt. Első osz-

tályosokkal találkozni igazi megvilágosodás. Még teljesen romlatlanok: bíznak benned, és követnek, akármerre vezeted őket. Teljesen spontán reagálnak, és azonnal közlik, mi működik számukra, és mi nem. Nincs jobb hely megtanulni a tanítást, mint az elsők körében. Ugyanitt találkoztam egy kiváló tanárral, Marcel Granottal, aki csatlakozott hozzám, hogy együtt vegyünk részt ebben a csodálatos kalandban. Általában én kezdtem az órát, Marcel pedig közbeszólt, amikor úgy érezte, didaktikai hibát véték. Erre legtöbbször akkor került sor, amikor nem ütemeztem jól az anyagot, azaz kihagytam egy lépést.

Az első naptól kezdve folyamatosan és intenzíven tanultam magam is, minden tanórán és minden tanártól, akit megismerhettem. A félresikerült órákból éppoly sokat tanultam, mint a tökéletesekből. A legtöbbet mégis azokból az órákból, amelyek akadozva indultak, de a megfelelő módszert megtalálva szárnyra kaptak.

* * *

Hogy mit tanultam? Rengeteget a tanításról, arról, hogy hogyan közelítsek a gyerekekhez, hogy miként gondolkoznak ők maguk. Megtanultam a rendszeresség fontosságát – ez kezdetben teljességgel hiányzott belőlem. Ráébredtem, hogy azok a fogalmak, amelyeket a felnőtt egy egészként fogad el, valójában sok apró részletből állnak össze, amelyek egymásra épülnek, és egyik sem hagyható el. Személyes tapasztalatból kellett rájönnöm, hogy az általános iskolában a magyarázatok vajmi keveset érnek. A fogalmakat a gyermek saját élményeiből kell levezetni. Igazam volt az elején a kísérletezés fontosságával kapcsolatban, csupán annyi volt a baj, hogy nem tudtam, miként építsem be a tanórákba. A kísérletezésnek nem csak a bonyolultabb elméleteknél van jelentősége.

A legalapvetőbb fogalmak bevezetésénél is kulcsfontosságú: például a számfogalom magyarázatakor vagy a „kisebb, mint”, „nagyobb, mint” fogalmak értelmezésénél.

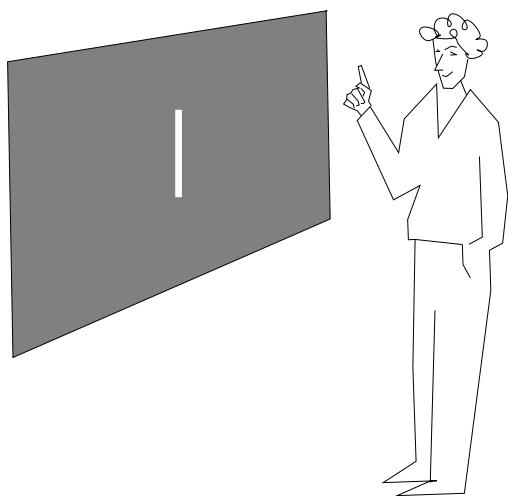
És mindezek mellett nagyon sok meglepetés is ért. Ha valaki azt mondta volna nekem, hogy amikor visszatérek az általános iskolába, én magam fogok matematikát tanulni, nem hittem volna neki. De a legnagyobb döbbenetemre pontosan ez történt: rengeteg matematikát tanultam. Mondhatni a legfőbb dolog, amit megtanultam, maga a matematika volt. Ha gimnáziumba mentem volna tanítani, valószínűleg nem ez történt volna. Egy matematikus tökéletesen tisztában van a középiskolás matematikával, ám az általános iskolában újdonságok várnak rá. Itt rajzolódnak ki a legalapvetőbb elméletek: a számok és a számtani műveletek fogalma. Azok az építőkockák, amelyeken egy egyetemet végzett matematikus ritkán kezd el gondolkodni.

Az itt megtanult ismereteimnek a nagy része nem új tény volt, hanem valami egészen más: új részletek. Olyan érzés volt, mintha egy darab szövetet néznék: távolról simának és egyszínűnek tűnik, de közelről kiderül, hogy finom, egymásba fonódó szálak rendszere. Amiről korábban azt hittem, egy darabból áll, most kiderült, hogy elgondolások érzékenyen összefonódó elege. És ami a legfontosabb, rájöttem, hogy a jó tanárnak tökéletesen tisztában kell lennie ezekkel az apró részletekkel, és ismernie kell, miként fonódnak össze. „Lépésről lépésre” – figyelmeztetett állandóan Marcel.

Ez a könyv javarészt azokról a részletekről szól, amelyek a matematikát és annak szépségét alkotják, a részletekről, amelyek miatt érdemes tanítani.

Első rész

Elemek



Mi a matematika?

*A természet könyve
a matematika nyelvén íródott.*
Johannes Kepler, csillagász

A természettudományok királynője

*A matematika a természettudományok
királynője, a számtan pedig
a matematika királynője.*
Carl Friedrich Gauss, matematikus

Második osztályban megpróbálom elmagyarázni a gyerekeknek, miért olyan fontosak a számok. Elmesélek egy történetet egy királyról, aki annyira gyűlölte a számokat, hogy betiltotta a használatukat a királysága területén. A gyerekekkel együtt igyekszünk elképzelni, milyen lehet a világ számok nélkül, és arra jutunk, hogy komoly korlátokba ütköznénk ott. Mivel nem lehetne rákérdezni a tanulók életkorára, különböző korú gyerekek járnának az első osztályba, nem tudnánk fizetni a boltban, és nem lehetne találkozót megbeszélni, mert az időpont – az órák és a percek számának – említése tabu volna.

Ez csak egy példa arra, milyen fontos szerepet játszik a matematika életünkben. Ahogy a civilizáció és a technika fejlődik, egyre jobban és jobban támaszko-

dunk a matematikára. Steven Weinberg, Nobel-díjas fizikus *Álmodozások egy végső elméletről* című könyvében két fejezetet is a fizikán kívül eső témáknak szentel: a matematikának és a filozófiának. Azt írja, hogy időről időre újra megdöbben azon, mennyire hasznos a matematika, és mennyire mulandó a filozófia.

Ahhoz, hogy megértsük, miért is van ez így, meg kell értenünk, mi a matematika. Ez nem egyszerű kérdés – még a matematikusok sem tudják rá mindig a választ. Bertrand Russell egyszer azt mondta a matematikusokról, hogy „fogalmuk sincs, mit csinálnak”. (A filozófusokról alkotott véleménye még ennél is keményebb volt: a filozófus szerint nem más, mint egy „vak ember, aki egy sötét szobában egy olyan fekete macskát keres, ami nincs is ott”). Ez bizonyos szempontból valóban így van: a legtöbb matematikus nem fárasztja magát azzal, hogy azt firtassa, pontosan mit is csinál.

A kérdés megválaszolásához kezdjük egy egyszerű példával. Mit jelent az, hogy $3 + 2 = 5$?

Az első osztályosokat arra szoktam kérni, hogy nézzék meg, hány ceruzájuk lesz, ha három ceruzához hozzáadnak két ceruzát. Azt már tudják, hogy a hozzáadás ugyanaz, mint az összetevés. Így aztán egymás mellé tesznek három ceruzát meg két ceruzát és megszámlálják: összesen öt ceruza. Ezután megkérdezem:

– És hány gombotok lesz, ha összeadtok három gombot meg két gombot?

– Öt gomb! – vágják rá erre.

– Honnan tudjátok? – próbálkozom.

– Az előző kérdésből.

– De az előző kérdés a ceruzákra vonatkozott. Mi van, ha a gombokkal másképp van?

Erre nevetni kezdenek. De nem azért, mert értelmetlen a kérdés, éppen ellenkezőleg. A matematika egyik nagy titka rejtőzik a mélyén: az absztrakció. Nem számít, hogy ceruzákról, gombokról vagy almákról van szó. A válasz minden esetben ugyanaz. Ezért tudjuk teljesen absztraktnan kijelenteni: $3 + 2 = 5$.

Ez egy nagyon elemi, de nagyon jellemző példa arra, hogyan absztrahálja a matematika a gondolkodási folyamatokat. Persze bizonyos fokig minden elgondolás absztrakt. De a matematika különleges abban, hogy a legegyszerűbb gondolkodási folyamatokat is képes absztrakttá tenni. A $3 + 2 = 5$ esetében a folyamat annyi, hogy összekapcsolunk három tárgyat meg két tárgyat. Az ember számos kérdést fel tud tenni ezekkel a tárgyakkal kapcsolatban: mik ezek – almák vagy ceruzák? A kezünkben vannak, vagy az asztalon? Ha az asztalon vannak, milyen alakzatban helyezkednek el? A matematika figyelmen kívül hagyja ezeket a részleteket, és csak az a kérdés érdekli, ami nem a részletekre vonatkozik, hanem egyedül arra a tényre, hogy ezeket a tárgyakat összekapcsoljuk – a végeredmény nagyságára. Azaz, hogy mennyi tárgy lesz végül.

Az absztrakt gondolkodásra való képesség volt az a titok, ami biztosította az ember győzelmét környezete fölött. Az absztrakció ereje abban áll, hogy növeli a hatékonyságunkat, azaz erőfeszítéstől kímél meg minket. Lehetővé teszi, hogy az „itt és most” korlátaitól megszabaduljunk, mert amire itt és most rájövünk, azt képesek leszünk hasznosítani máskor és más helyen is. Ha három ceruza meg két ceruza összesen öt ceruza, ugyanez igaz lesz almákra is, és ugyanez igaz lesz holnap is. Egyszeri erőfeszítéssel mindenütt hasznosítható információt nyertünk.

Ha az absztrakció általában véve hasznos, akkor ez hatványozottan igaz a matematikára, amely az absztrakciót a végsőkéig viszi. Így aztán nem meglepő, hogy a matematika olyan hasznos.

Mindenki tanuljon matematikát?

Amikor az emberek meghallják, hogy matematikus vagyok, szájuk gyakran legörbül, és arcukon alig palástolt fájdalmas grimasz jelenik meg: „A matematika sohasem volt az erősségem.” Sokak számára a matematikatanulás olyan gyötrelmes emlék, hogy újra meg újra felvetődik a kérdés: mivégre? Miért szükséges ez a kínszenvedés? Nem kellene a legtöbb embernek eleve feladni, és nem is próbálkozni matematikával? Ma-napság, amikor a zsebszámológépek egy szempillantás alatt elvégzik a matematikai műveleteket, mi értelme van megtanulni a szorzótáblát vagy az írásbeli osztást?

Az egyik válasz az, hogy a matematika a kulcs minden olyan foglalkozáshoz, amely egzakt természettudományos ismereteket vár el – és ilyenből igen sok van. De a matematika nem csak a való világ megértéséhez segít hozzá. Sokkal többet kínál ennél: akkurátusan és módszeresen tanít meg az absztrakt gondolkodásra. Alapvető gondolkozásformákat fejleszt, a lényeges és a lényegtelen közötti különbségtételre tanít, és a konklúziós képességünket gazdagítja.

De egy kérdés nyitva marad: miért olyan nehéz mégis? A matematikának feltétlenül kínokkal kell járnia? A szokásos válasz az, hogy nem, csak éppen rosszul tanítják. A legdivatosabb felfogás az, hogy a legtöbb gyerek, aki tanulási nehézségekkel küzd, valójában „tanítási nehézségek” miatt szenved. De ez nem ilyen egyszerű. A tanárokat hibáztatni leegyszerűsítés

és oktalanság. Aki azt állítja, hogy a matematikatanárok évszázadok óta pocsék munkát végeznek, magyarázza meg azt is, hogy miért csak a matematikával van így, a többi tárggyal miért nem?

A matematikatanítás különleges nehézsége abban áll, hogy az absztrakciót képtelenség átadni. Megtaníthatod bárkinek, hogy mi Chile fővárosa, de nem absztrahálhatsz helyette. *Ezt a folyamatot mindenkinek magának kell elsajátítania.* A konkrétól az absztraktig minden egyes gondolati lépést egyedül kell megtennünk. A tanár feladata ebben a folyamatban csupán annyi, hogy irányítsa a diákot, hogy a lépéseket a helyes sorrendben tapasztalja ki. Ez nem egyszerű művelet, és nem könnyű megtanulni sem. De nem lehetetlen. E könyv egyik célja az, hogy átadjon néhány elvet, hogy miként „bábáskodhatunk” a tanulóink fölött – ahogy azt Szókratész mondotta.