

Mátrixalgebra
Optimumszámítás

Ábrahám István

Mátrixalgebra Optimumszámítás

Egyszerűen, érthetően



A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap támogatta.



Nemzeti Kulturális Alap

© Ábrahám István, Typotex, Budapest, 2015
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta: Kocsis Péter főiskolai adjunktus

ISBN 978 963 279 677 2

Témakör: *matematika*

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról, akcióinkról

a www.typotex.hu és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado)
oldalakon értesülhet.



Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Főszerkesztő: Horváth Balázs

Műszaki szerkesztő: Csépany Gergely

A szöveget gondozta: Marsi Mónika

Borítóterv: Szalay Éva

Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában

Felelős vezető: Kajtor István

Tartalomjegyzék

Bevezetés	7
1. Mátrixalgebra	13
1.1. A mátrix fogalma	13
1.2. Speciális mátrixok	14
1.3. Relációk mátrixok között	19
1.4. Műveletek mátrixok között	20
1.5. Mátrixműveletek alkalmazásai	28
1.6. A diadikus szorzat. Mátrixok hatványozása	33
1.7. Műveletek blokkokra bontott mátrixokkal	35
1.8. Gyakorlati alkalmazások	36
2. A lineáris tér	43
2.1. A lineáris tér fogalma	43
2.2. Generátorrendszer	45
2.3. Lineáris függetlenség	46
2.4. Bázis	48
2.5. Dimenzió	49
2.6. A vektorrendszer rangja, a mátrix rangja	50
3. Bázistranszformáció	53
3.1. Elemi bázistranszformáció	53
3.2. A bázistranszformáció alkalmazásai	59
4. Operációkutatás	73
4.1. A lineáris programozás fogalma	73
4.2. A normál feladat matematikai modellje	73
4.3. A normál feladat megoldása geometriai módszerrel	76
4.4. A lineáris programozási feladatok algebrai megoldása	85
4.5. A szimplex módszer	90
4.6. A kétfázisú szimplex módszer	99

6 *Tartalomjegyzék*

5. A dualitás	109
5.1. A normál feladat duálja, a dualitás definíciója	109
5.2. Az általános LP feladat duálja	115
6. Ellenőrzés, variánsszámítás, érzékenységvizsgálat	119
6.1. Az ellenőrzés módszerének elméleti alapjai	119
6.2. Variánsszámítás	125
6.3. Érzékenység vizsgálat	126
7. Szállítási feladat	133
7.1. A szállítási feladat matematikai modellje és megoldása szimp- lex módszerrel	134
7.2. A disztribúciós módszer	138
8. Matematikai modellezés	151
8.1. A modellek típusai	151
Melléklet	161
A. Gráfok	163
B. Mátrixműveletek számítógépen	173
C. Optimumkeresés számítógépen	179

Bevezetés

A bennünket körülvevő világ leírásához ősidők óta számokat is alkalmazunk. Tekintsük át a számfogalom kiépülésének logikai-történeti folyamatát, amely minden valószínűség szerint a legkorábban megjelent természetes számoktól a törtek, a negatív számok, majd az irracionális számok alkalmazásáig vezetett, illetve további általánosítással megjelentek a komplex számok, a vektorok és a mátrixok.

A természetes számok körében az **összeadást** tekinthetjük úgy, mint ismételt továbbbszámlálást: ha bármely természetes számhoz egyet hozzáadunk, újabb természetes számot kapunk. Ez azt is jelenti, hogy minden természetes szám egyesek összegéből áll. Ha tehát az **a** természetes számhoz hozzáadjuk a **b** természetes számot, akkor a **b**-ben lévő egyesekkel ismételt továbbbszámlálást végzünk, azaz újabb természetes számot kapunk: $\mathbf{a + b = c}$, ahol $\mathbf{c \in \mathbb{N}}$, a művelet nem vezet ki a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazából.

A természetes számok körében a kéttényezős szorzás ismételt összeadás: az $\mathbf{a \cdot b}$ azt jelenti, hogy **b** darab **a**-t adunk össze, vagy ami ugyanaz: **a** darab **b**-t adunk össze. Az $\mathbf{a \cdot b = d}$ szorzat eredménye is mindig természetes szám: $\mathbf{d \in \mathbb{N}}$.

Közben láthattuk, hogy mind az összeadás, mind a szorzás **kommutatív**, azaz $\mathbf{a + b = b + a}$, valamint $\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$. Mindkét direkt művelet tetszőlegesen sok tagra megismételhető, azaz érvényes az **asszociatív** tulajdonság: $\mathbf{a + b + c = (a + b) + c}$, illetve igaz: $\mathbf{a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c}$, tehát először mindig csak két tagot-tényezőt adunk egymáshoz, szorzunk össze. A két műveletre együtt érvényes a **disztributív** azonosság („részekre bontás, szétosztás”): $\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$.

Az azonos tényezőkkel ismételt szorzás a hatványozás: ha **b** darab **a**-t szorzunk össze, akkor hatványt kapunk: $\mathbf{a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^b = c}$. (Az **a** az alap, **b** a kitevő, **c** a hatványérték. Nyilván: $\mathbf{c \in \mathbb{N}}$.) A kommutativitás ebben az esetben általában nem igaz, azaz: $\mathbf{a^b \neq b^a}$. Például $\mathbf{2^3 = 8 \neq 3^2 = 9}$. A hatványozás egyszerű azonosságait az „ismételt szorzás” definícióval könnyű belátni: 1.) $\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$; 2.) $\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$; 3.) $\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$. A harmadik azonos-

ság igen érdekes: ismételt hatványozással nem kapunk új műveletet, megint hatvány lesz az eredmény. Például $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

Az eddig felsorolt „direkt” műveletekben, ha természetes számokból indulunk ki, az eredmény is természetes szám lesz. Új típusú számokhoz akkor jutunk, ha a műveletben szereplő két tag-tényező közül az egyiket, valamint az eredményt ismerjük, és keressük a műveletben szereplő másik számot, azaz indirekt műveletet végzünk. *Összeadás esetén:* az $a + x = c$ -ből az ismeretlen szám *kivonással* adódik: $x = c - a$. Ha a és c természetes számok, akkor a különbség nem lesz mindig az. Ha azt akarjuk, hogy a kivonás minden természetes számra elvégezhető legyen, be kell vezetni a negatív számokat, így a kivonásra az alaphalmaz az egész számok Z halmaza: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Megjegyezzük, hogy elég hosszú idő kellett ahhoz, hogy a negatív számok elfogadottakká váljanak, a létjogosultságukat alapvetően a velük való, alapvetően egyszerű számolási lehetőség biztosítja. Láttuk, hogy az összeadás kommutatív, így mindegy, hogy az eredmény ismerete mellett az összeadandó két tag közül az első vagy a második adott, a kivonást egyféleképpen végezzük el.

Szorzás esetén: az $a \cdot x = c$ -ből az ismeretlen osztással adódik (ha az a nem nulla), tehát: $x = c/a$. Nyilvánvaló, hogy ha az a és a c egész számok, akkor a hányadosuk nem lesz mindig egész. Ha azt akarjuk, hogy az osztás minden egész számra elvégezhető legyen, be kell vezetni a tört számokat, így az osztásra az alaphalmaz a racionális számok (két egész szám hányadosaként felírható számok) Q halmaza, azaz: $Q = \{x | x = p/q, \text{ ahol } p \text{ és } q \text{ egész számok, és } q \neq 0\}$. A szorzás is kommutatív, így mindegy, hogy az eredmény ismerete mellett a két tényező közül az első vagy a második adott, az osztást egyféleképpen végezzük el.

A *hatványozás esetén* bonyolultabb a helyzet az indirekt művelettel. A hatványozás nem kommutatív, így ha az eredményt, a hatványértéket ismerjük, akkor egészen más műveletet kell végezni, ha az alap adott és a kitevőt keressük (logaritmálás), illetve, ha a kitevő adott és az alapot keressük (gyökvonás). Például $2^x = 64$ -ből $x = 6$, amit, tudjuk, így is írhatunk: $\log_2 64 = 6$. Viszont az $x^2 = 64$ -ből $x = \pm 8$, aminek szintén ismert az x -re kifejezett (explicit) alakja: $x = \pm \sqrt{64} = \pm 8$. Mind a kitevőkeresés, mind a gyökvonás elvégezhetőségéhez új típusú számokat kell bevezetnünk, a nem szakaszos végtelen tizedes törteket, az irracionális számokat. Bebizonyítható, hogy például a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, azaz szakaszos tizedes törtként. Sokáig ezt a tényt ésszerűtlennek, irracionálisnak tartották. Úgy

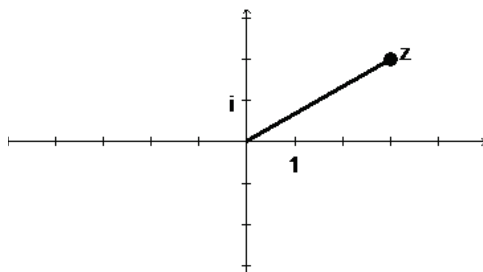
képzelték, hogy minden tizedes tört egyszer majd csak szakaszos lesz, ha elég hosszú a szakasz. Egyszerű ellenpéldát találni: a $0,1001000100001\dots$ szám (azaz ha az egyesek közé jobbra haladva mindig eggyel több nullát írunk) soha nem lesz szakaszos tizedes tört, ez egy irracionális szám. Ugyanakkor ezek a számok racionálisan nem elképzelhetetlenek, például az 1 cm oldalhosszúságú négyzet átlója $\sqrt{2}$ cm. Az irracionális számok is a számegyenesen ábrázolhatók, és a racionális számokkal együtt alkotják a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát.

De a valós számok sem elegendők arra, hogy a hatványozás inverz műveleteit minden esetben végre tudjuk hajtani. Gondoljunk például az $x^2 - 2x + 5 = 0$ egyenlet megoldására. Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \sqrt{-4}.$$

A valós számok körében ennek a másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen olyan valós szám, amelynek a négyzete -4 lenne, nem létezik. Vezessünk be egy „képzetes” (imaginárius) számot, amelynek a négyzete -1 , és ezt jelöljük i -vel. Ekkor a $\sqrt{-4}$ így írható: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$. A másodfokú egyenletünknek így már van megoldása: $x_{1,2} = 1 \pm 2i$, tehát az egyik gyök: $x_1 = 1 + 2i$, a másik: $x_2 = 1 - 2i$. A számfogalomnak ezzel a bővítésével a gyökvonás bármilyen valós számból elvégezhető, a másodfokú egyenleteknek mindig van megoldása. Az így adódó számokat **komplex számoknak** nevezzük. Gauss (1777–1855) vezette be és használta először a komplex számokat, amelyek általános alakja: $z = a + b \cdot i$, ahol a és b valós számok.

Megjegyzés: felvetődik a kérdés, hogy mire jó mindez, hogyan tudjuk elképzelni a komplex számokat? Gondoljunk arra, hogy kezdetben a negatív számokat is csak mesterkélten („hiány”, a számegyenesen a nullától balra lévő számok, stb.) magyarázták, vagy az irracionális számokat ma is ezen a néven nevezzük (lexikon: irracionális = az értelem számára felfoghatatlan, észellenes.). Ma már ezeket a számokat az általános iskolákban is használják. A komplex számok mai, eléggé széles körű alkalmazási területei a matematikán kívül főként a műszaki tudományokban találhatók. Elképzelni pedig úgy lehet a komplex számokat, hogy azok nem a számegyenesen, hanem egy ún. számsíkon helyezkednek el, amelyen adott egy vízszintes tengely, amin a valós számok találhatók, a függőleges tengely egysége pedig az i imaginárius szám:



A rajzunkon a $z = 3 + 2i$ komplex számot ábrázoltuk.

A $z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ komplex számban az a -t tehát mindig eggyel, a b -t pedig mindig i -vel szorozzuk, ezért a komplex szám megadásakor elegendő az a -t és a b -t feltüntetni, tehát egy valós számpárral adjuk meg a komplex számot: $z = [a \ b]$. Így a számfogalom újabb általánosításaként olyan „számot” kapunk, amely 2 valós számmal adható meg. A komplex számokkal is műveleteket lehet végezni, a műveleteknek azonosságai vannak, ezeket nem részletezzük.

A valóságban a dolgok mennyiségi jellemzésére régóta használnak több számból álló számsorokat, számoszlopokat. Gondoljunk például arra, hogy egy egészségügyi vizsgálatkor általában megméri az illető testsúlyát, magasságát, vérnyomását, hőmérsékletét és egyebeket és ez a számsor (vektor) fejezi ki az a vizsgált személy állapotát. Tágabb értelemben tehát ez a mennyiségi adat is „számszerű”, a több emberről felvett hasonló adatokkal (vektorokkal) műveleteket lehet végezni, ezekre a műveletekre bizonyos szabályok, azonosságok lehetnek érvényesek.

Tovább mehetünk: a mennyiségi adatok gyakran nemcsak számsorokban, vektorokkal, hanem táblázatokban adottak. Vannak olyan jelenségek, eljárások, amelyek kvantitatív megadásához a vektor kevés. Például tekintsünk egy egyszerű termelési folyamatot, ahol 3 erőforrás (ami lehet élőmunka, anyag és energia) felhasználásával négyféle terméket gyártanak. Ismeretes a technológiai szerkezet, ami azt jelenti, hogy az egy-egy darab termékekbe az erőforrásokból mennyi épül be. Konkrétan: jelöljük az erőforrásokat A, B és C betűkkel, a termékeket római számokkal, a technológiai táblázat legyen a következő:

	I	II	III	IV
A	4	3	3	1
B	2	1	0	5
C	0	1	2	3

Ha hasonló adatoknál a termékek mindig oszlopfőn találhatók és az erőforrások mindig sorkezdők, akkor az adott termelés jellemzéséhez elegendő megadni egy számtáblázatot, egy mátrixot, tehát magát a „számtéglalapot”.

A vektor is és a mátrix is tulajdonképpen a számfogalom általánosítása, velük a számokhoz hasonlóan műveleteket lehet végezni és igen hasznos célokat érhetünk el alkalmazásukkal. A vektorokat speciális számtáblázatoknak (mátrixoknak) tekinthetjük, olyanoknak, amelyeknek egy soruk, vagy egy oszlopuk van. Így a mátrixokkal kezdünk el foglalkozni és az eredményeinket megfogalmazzuk vektorokra is. Több esetben viszont a vektorokra kimondott állításokat általánosítjuk mátrixokra.

Látni fogjuk, hogy a mátrixokkal hogyan végezhetünk műveleteket és milyen zseniális alkalmazásokhoz vezet el a mátrixalgebra, ilyen például az optimumszámítás. Nem lesz túl könnyű dolog megismerni ezt a területet, újszerű dolgokról lesz szó. Viszont a cél, optimumszámítás az élet sok területén alkalmazható és jelentős eredményekhez vezet.