

Rózsa Pál:

Bevezetés a mátrixelméletbe

EGERVÁRY JENŐ

emlékének ajánlom e könyvet

halálának ötvenedik évfordulója alkalmából

Alkalmazott matematika

A sorozat kötetei:

- Kóczy T. László – Tikk Domonkos: Fuzzy rendszerek (2000)
Elliott, J. R. – Kopp, P. E.: Pénzpiacok matematikája (2000)
Michelberger – Szeidl – Várlaki: Alkalmazott folyamatstatisztika
és idősor-analízis (2000)
Gömöri András: Információ és interakció (2001)
Baxter, M. – Rennie, A.: Pénzügyi kalkulus (2002)
Karsai János: Impulzív jelenségek modelljei (2002)
Simonovits András: Nyugdíjrendszerek: Tények és modellek (2002)
Medvegyev Péter: Sztochasztikus analízis (2004)
Szirtes Tamás: Alkalmazott dimenzióanalízis (2006)
Vizvári Béla: Egészértékű programozás (2006)
Vizvári Béla: Operációkutatási modellek (2009)

RÓZSA PÁL

BEVEZETÉS
A MÁTRIXELMÉLETBE



TYPOTEX

Budapest, 2009

© Rózsa Pál, Typotex, 2009

ISBN 978 963 279 028 2

ISSN 1586-4413

Témakör: *alkalmazott matematika*

Kedves Olvasó!

Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a *TypoKlubba*, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a *www.typotex.hu* címen érhet el. Honlapunkon megismerkedhet kínálatunkkal is, egyes könyveinknél pedig új fejezeteket, bibliográfiát, hivatkozásokat találhat, illetve az esetlegesen előforduló hibák jegyzékét is letöltheti.

Észrevételeiket a *velemeney@typotex.hu* e-mail címen várjuk.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított

Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

A könyvet gondozta: Oláh Judit

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 33,3 (A/5 ív)

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	9
1. Mátrixalgebra	13
1.1 Elnevezések és jelölések	13
1.2 Műveletek mátrixokkal	17
1.2.1 Mátrixok összeadása és számmal való szorzása	17
1.2.2 Mátrixok szorzása	19
1.2.3 Speciális mátrixszorzatok	26
1.2.4 Az inverz mátrix	33
1.3 A mátrix rangja	38
1.3.1 A rang fogalma; mátrixok minimális diadikus felbontása	38
1.3.2 Vektorok lineáris függetlensége	46
1.3.3 Rangra vonatkozó tételek	50
1.3.4 Elemi transzformációk, ekvivalens transzformációk, mátrix normálalakja	52
1.3.5 A nullitás fogalma; a Sylvester-féle nullitási tétel	60
1.4 Speciális tulajdonságú mátrixok	62
1.4.1 Speciális mátrixok	62
1.4.2 Szimmetrikus egyenletes kontinuáns mátrix invertálása	70
1.4.3 Nilpotens és ciklikus mátrix polinomjának invertálása	75
1.5 Hiper mátrixok	77
1.5.1 Hiper mátrixok szorzása és faktorizációja	77
1.5.2 Szimmetrikusan particionált másodrendű hiper mátrix faktorizálása, determinánsa, inverze	80
1.5.3 Módosított mátrix és minormátrix inverze	85
1.6 Projektorok	100
1.6.1 Projektorokra vonatkozó tételek	101
1.6.2 Mátrixok általánosított inverze	108
1.7 Lineáris egyenletrendszerek	113
1.7.1 Homogén lineáris egyenletrendszer	114
1.7.2 Inhomogén lineáris egyenletrendszer	117
1.7.3 Lineáris egyenletrendszer kvadratikus együtthatómátrixszal	127
2. A lineáris algebra alapjai	145
2.1 A lineáris tér	146
2.2 Az euklideszi tér	152
2.3 Lineáris függvények, bilineáris és kvadratikus alakok	166
2.4 Lineáris transzformációk	174

2.5	A bázisvektorok transzformációja	186
2.5.1	A koordináták transzformációja új bázisra való áttérés esetén	186
2.5.2	Bilineáris alak mátrixának transzformációja új bázisra való áttérés esetén (kongruens transzformáció)	191
2.5.3	Az \mathbf{x} és $A\mathbf{x}$ vektorok koordinátái közötti összefüggés	193
2.5.4	A lineáris transzformáció mátrixának transzformációja új bázisra való áttérés esetén (hasonlósági transzformáció)	194
2.6	Lineáris transzformáció sajátvektorai és sajátértékei	206
2.7	Adjungált lineáris transzformációk	214
2.8	Diagonalizálható transzformációk, transzformációpárok, általánosított sajátérték-feladat	216
2.8.1	Önadjungált transzformációk	216
2.8.2	Unitér transzformációk	218
2.8.3	Felcserélhető és normális transzformációk	220
2.8.4	Pozitív definit transzformációk	226
2.8.5	Főtengelytétel és általánosítása	230
2.8.6	Sajátértékek extrémális tulajdonsága	235
2.9	Lineáris transzformációk a valós lineáris térben	239
2.9.1	Lineáris transzformáció normálmátrixra	239
2.9.2	Szimmetrikus és ortogonális transzformációk	242
2.9.3	Kvadratikus alakok	251
3.	Mátrixfüggvények	255
3.1	Egyszerű struktúrájú mátrixok spektrális tulajdonságai	256
3.1.1	Mátrix spektrálfelbontása	256
3.1.2	Projektormátrix spektrálfelbontása	260
3.1.3	Unitér transzformációval diagonalizálható mátrixok	262
3.1.4	Mátrixok szinguláris értékek szerinti felbontása	267
3.2	A mátrixfüggvény fogalma és előállítása a minimálpolinom egyszeres gyökei esetén	272
3.2.1	A Cayley–Hamilton-tétel és élesítése	272
3.2.2	A mátrixfüggvény értelmezése és redukciója mátrixpolinomra	275
3.2.3	A Lagrange-féle mátrixpolinomok tulajdonságai	278
3.2.4	Mátrixfüggvény spektrálfelbontása	280
3.2.5	Lagrange-féle mátrixpolinomok előállítása a karakterisztikus mátrix adjungáltjával	287
3.3	Kommutatív blokkokból álló hipermátrixok	298
3.3.1	A hipermátrix determinánása	298
3.3.2	Mátrixok direkt szorzata	301
3.3.3	Hipermátrix spektrálfelbontása	304
3.3.4	Kronecker-polinomok	307
3.4	Mátrixfüggvény előállítása a minimálpolinom többszörös gyökei esetén	311
3.4.1	Mátrixfüggvény előállítása Hermite-féle mátrix-polinomok segítségével	311
3.4.2	Az Hermite-féle mátrixpolinomok tulajdonságai	318
3.4.3	Mátrixok kváziagonalizálása	322

3.4.4 Nilpotens mátrixok transzformációja Jordan-féle normálalakra	326
3.4.5 Mátrixfüggvények kanonikus előállítás	341
3.5 Elemi osztók elmélete	347
3.5.1 A determinánsosztó invarianciája	347
3.5.2 A determinánsosztó invarianciája speciális esetben	349
3.5.3 A determinánsosztó invarianciája általános esetben	351
3.5.4 Az elemi osztók és a Jordan-féle normálalak	353
3.6 Lineáris differenciálegyenletrendszerek	358
3.6.1 Explicit alakban megadott lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerek	359
3.6.2 A differenciálegyenlet-rendszer megoldása a rezolvensmátrix ismeretében	362
3.6.3 A rezolvensmátrix meghatározása	364
3.6.4 A rezolvensmátrix előállítás a felcserélhetőségi reláció teljesülése esetén	366
3.6.5 Állandó együtthatómátrixú differenciálegyenlet-rendszerek megoldása	369
3.6.6 Elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer periodikus megoldása	378
3.6.7 Rezgő rendszerek stabilitásvizsgálata	380
3.6.8 Explicit alakban megadott másodrendű rendszerek	385
4. Nemnegatív elemű mátrixok	401
4.1 Irreducibilis mátrixok	402
4.1.1 Út a Frobenius-tételekhez	402
4.1.2 A Frobenius-tételek	407
4.1.3 A Frobenius-tételek következményei	416
4.2 Reducibilis mátrixok	421
4.2.1 A reducibilis mátrixok alaptétele	421
4.2.2 Reducibilis nemnegatív elemű mátrix normálalakja	424
4.3 Primitív és imprimitív mátrixok	428
4.4 Sztochasztikus mátrixok	430
4.4.1 Alapfogalmak és alapvető tételek	431
4.4.2 Markov-láncok ergodicitása; a sztochasztikus mátrixok osztályozása	437
4.4.3 Bolyongási feladatok	443
4.4.4 Spektrálfelbontás meghatározása generátorfüggvény segítségével	456
Irodalomjegyzék	465
Névmutató	471
Tárgymutató	473

ELŐSZÓ

*A természet nagy könyvében csak az tud olvasni, aki ismeri azt a nyelvet,
amelyen e könyv írva van, és ez a nyelv: a matematika.
(G. Galilei: Párbeszéd a két legnagyobb világrendszerrel,
a ptolemaiosziról és a kopernikusziról)*

E könyv előzményének tekinthető „Lineáris algebra és alkalmazásai” című könyvem, amely 1973-ban és 1975-ben a Műszaki Könyvkiadó, majd átdolgozás után 1991-ben a Tankönyvkiadó gondozásában jelent meg. A könyv címének megváltoztatásával egyrészt arra utalok, hogy ez a kiadás a lineáris algebrának a korábbinál szűkebb területére korlátozódik, másrészt a címében is kifejezésre szeretném juttatni azt a törekvésemet, hogy olyan könyvet adjak az Olvasó kezébe, amelynek segítségével az elméleti ismeretek megalapozása mellett kellő rutint szerezhet a mátrixokkal való számítások elvégzésében is. Ezért néhány fejezetet, amelyek alkalmazására a tapasztalat szerint kisebb az igény, elhagytam, és ugyancsak kihagytam a lineáris algebra numerikus módszereivel foglalkozó önálló fejezetet. Ennek anyagát részben beépítettem a korábbi fejezetekbe, illetve úgy ítélt meg, hogy az óriásira duzzadt anyag már nem olvasható egybe az alapozó fejezetekkel. Helyette inkább megnöveltem a kidolgozott példák számát, amelyek hozzásegítik az Olvasót az anyag jobb megértéséhez.

A könyv négy fejezetre tagolódik. Az első fejezet a mátrixalgebra elemeit tartalmazza és egyúttal itt ismerkedhet meg az Olvasó olyan speciális tulajdonságú, ún. strukturált mátrixokkal, amelyek az alkalmazások számos területén előfordulnak. A fejezetet a mátrixalgebra legfontosabb alkalmazási területe, a lineáris egyenletrendszerek elmélete és megoldása zárja. A második fejezet a lineáris algebra alapjaival foglalkozik, amely azt az elméleti hátteret szolgáltatja, amelybe a mátrixelmélet beágyazható. Ez a fejezet tartalmazza a sajátérték-feladatot és a lineáris transzformációk elméletét. A harmadik fejezet a mátrixfüggvények definíciójával és előállításával foglalkozik. Ennek keretében tárgyalja a mátrixok felosztását diagonalizálható és nemdiagonalizálható mátrixok osztályára és ennek kapcsán a Jordan-féle normálalakra való

transzformálásukat. Itt kapott helyet mátrixok szinguláris értékeinek az értelmezése és szinguláris értékek szerinti felbontásuk. Végül a mátrixfüggvények legfontosabb alkalmazási területe, a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elmélete és megoldása zárja a fejezetet. A negyedik fejezet a mátrixelmélet egy speciális területével, nemnegatív elemű mátrixokkal foglalkozik, ezen belül sztochasztikus mátrixokkal és ezek alkalmazásával bolyongási feladatok megoldására. A fejezet végén egy speciális bolyongási feladattal kapcsolatos Sylvester–Kac-mátrix sajátérték-feladatának generátorfüggvény segítségével nyerhető megoldása található.

A könyv egy egységes szemléletű és felépítésű bevezetést kíván nyújtani a mátrixelméletbe, amely tartalmában és módszereiben figyelembe veszi a tárgyalt anyag műszaki és természettudományokban való alkalmazásának az igényét. Az anyag felépítésében központi helyet foglalnak el a diádok és a projektorok. Mátrixok minimális diadikus előállításával vezet be a rang fogalmát, és ezen keresztül jut a lineáris egyenletrendszerek elméletéhez. Projektorok minimális diadikus előállítása automatikusan biortogonális vektorrendszert szolgáltat, és ez vezet a mátrixok spektrálfelbontásához. Mátrixok függvényének értelmezésével és előállításával mutat utat a mátrixok osztályozásához és lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre való alkalmazásához. Itt felismerhető az Egerváry-iskola által megteremtett módszer, amely ma már hagyományosnak tekinthető a hazai mátrixelméleti kutatásokban. A könyv ebben eltér a legtöbb külföldi szakirodalomban követett – klasszikusnak mondható – iránytól. A bizonyítások során, amikor csak lehet, konstruktív módszerek szerepelnek, ezzel lehetővé válik, hogy egyúttal a megoldási módszereket is megismerje az Olvasó. Példa erre a Jordan-féle normálalak bevezetése, vagy a Kronecker-polinomok spektrálfelbontása. A 103 kidolgozott példa megválasztásánál fontos szempont volt, hogy a legkülönbözőbb alkalmazási területeken előforduló típusok forduljanak elő. Sok esetben a vizsgált rendszer szabályos tulajdonságai strukturált mátrixokra vezetnek. Ilyenek pl. a tridiagonális és a ciklikus mátrixok, perturbált mátrixok, vagy a kommutatív blokkokból álló hipermátrixok. Ezek invertálása, illetve spektrálfelbontásuk előállítása során számos ötletet ismerhet meg az Olvasó és ezzel egyúttal rutint szerezhet bonyolultabb feladatok megoldásához.

A könyv elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak, doktoranduszoknak, tudományos kutatóknak és azoknak az érdeklődőknek kíván bepillantást nyújtani a mátrixok világába, akiknek korábbi tanulmányaik során erre nem volt alkalmuk, vagy fel kívánják frissíteni régebben szerzett ismereteiket. Véleményem szerint eredményesen forgathatják a könyvet azok a matematikusok, fizikusok, mérnökök, informatikusok és közgazdászok, akik munkájuk során olyan matematikai kérdésekkel találkozhatnak, amelyek kapcsolatba hozhatók mátrixelméleti problémákkal. Az anyag összeállítása és felépítése

során az volt a cél, hogy szinte a nulláról kiindulva fokozatosan ismerkedjék meg az Olvasó a fogalmakkal és tételekkel, és ezek bizonyítása során elsajátítsa azt a gondolkodásmódot, amely elősegíti az újabb szakirodalom megértését, esetenként pedig új problémák felvetését és azok megoldását. Az anyag megértéséhez az Olvasónak szüksége van egy minimális ismeretre a matematika egyéb területeiről, így az analízisből ismernie kell függvények hatványsorba fejtését, algebrából a determináns fogalmát, az algebra alaptételét és a polinomok elméletének alapjait, a komplex számok algebráját és a lineáris differenciálegyenletek elemeit. A negyedik fejezetben szereplő sztochasztikus mátrixok tárgyalásánál jó, ha tisztában van a valószínűség-számítás alapfogalmaival és ismeri a komplex változós függvényekre vonatkozó reziduum-tételt.

A könyv formai szerkezetének kialakításában a matematikai irodalomban szokásos módszer követhető nyomon, amely az alapvető ismereteket „definíció – tétel – bizonyítás” hármas tagolásban közli; a bizonyítás végét a ■ jel, a példák végét pedig három csillag, * * * jelzi. Az egyes fogalmakat a könnyebb megkülönböztethetőségük céljából egymástól eltérő betűtípusok jelölik, így

a mátrixokat félkövér, álló nagybetűk: **A**, **B**, ...

az oszlop- és sorvektorokat félkövér, álló kisbetűk: **a**, **b**, ...

az absztrakt lineáris tér vektorait félkövér, dőlt kisbetűk: **a**, **b**, ...

a geometriai tér vektorait félkövér, groteszk kisbetűk: **a**, **b**, ...

a lineáris tér transzformációit groteszk nagybetűk **A**, **B**, ...

Remélhetőleg ezek a formai megoldások megnövelik az anyag áttekinthetőségét.

Ezen a helyen szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik kritikai észrevételeikkel és megjegyzéseikkel segítettek kijavítani a könyv korábbi kiadásaiban található hibákat. Mindenekelőtt Lee Annának, a könyv korábbi lektorának szeretném megköszönni gondos munkáját és értékes észrevételeit, amelyekkel sokat segített a könyv szerkezetének javításában és számos következetlenség kiküszöbölésében. Köszönet illeti volt tanítványaimat, akik 40 év alatt aktív jelenlétükkel, az előadásra való reagálásukkal segítettek az anyag didaktikai felépítésének formálásában – nem is beszélve arról a segítségről, amelyet a konkrét hibák összegyűjtésével nyújtottak. Nagy segítségemre volt Stubnya Gusztávné, elsősorban a példák kiválasztásával és megoldásukkal. Külön köszönet illeti Erő Zsuzsát az anyag gondos nyomdai előkészítéséért, dr. Tegze Juditot az ábrák precíz elkészítéséért, Oláh Juditot, aki az előző kiadáshoz hasonlóan elvállalta a könyv szerkesztését és számos hasznos tanácsával hozzájárult az egységes szerkezet kialakításához. Végül köszönetemet fejezem ki a Typotex Könyvkiadó valamennyi munkatársának, elsősorban Votisky Zsuzsának, lelkiismeretes munkájukért és támogatásukért, amellyel lehetővé tették a könyv megjelenését.