

KEMÉNY SÁNDOR – DEÁK ANDRÁS –
LAKNÉ KOMKA KINGA – KUNOVSZKI PÉTER

KÍSÉRLETEK TERVEZÉSE ÉS ÉRTÉKELÉSE

További olvasnivaló a kiadó kínálatából:

Detrekői Ákos – Szabó György: Térinformatika

Geszti Tamás: Kvantummechanika

Hraskó Péter: A relativitáselmélet alapjai

Horváth Dezső: A Higgs-bozon

Patkós András: Bevezetés a kvantumfizikába

Leonard Susskind – George Hrabovsky – Art Friedman:

Az elméleti minimum I–II.

Tettamanti Tamás – Varga István – Csikós Alfréd: Közúti mérések

KEMÉNY SÁNDOR
DEÁK ANDRÁS
LAKNÉ KOMKA KINGA
KUNOVSZKI PÉTER

KÍSÉRLETEK TERVEZÉSE ÉS ÉRTÉKELÉSE

BŐVÍTETT, JAVÍTOTT KIADÁS

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



Copyright © Kemény Sándor, Deák András,
Lakné Komka Kinga, Kunovszki Péter, Typotex, 2017
© Typotex, Budapest, 2017
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 279 912 4

Témakör: matematika, kémia, mérnöki tudomány

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Kunovszki Péter

Borítóterv: Szalay Éva

Nyomta és kötötte: László András és Társa Nyomdaipari Bt.

Felelős vezető: László András

Tartalomjegyzék

Előszó.....	10
I. Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapok.....	12
1. A szükséges valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek összefoglalása	12
1.1. Alapfogalmak	12
1.2. A legfontosabb diszkrét eloszlások	18
1.3. A legfontosabb folytonos eloszlás: normális eloszlás.....	19
1.4. Eloszlások közelítése.....	23
2. A statisztikai következtetés.....	25
2.1. A minta statisztikai jellemzői	25
2.1.1. A számtani középérték	26
2.1.2. A centrális határeloszlási tétel.....	27
2.1.3. A normális eloszlású minta szórásnégyzetének eloszlása: χ^2 - (khi-négyzet-) eloszlás	28
2.1.4. t -eloszlás (Student-eloszlás).....	31
2.1.5. F -eloszlás	33
2.2. Paraméterbecslés	34
2.2.1. A becslések tulajdonságai	35
2.2.2. Becslési módszerek	40
2.2.2.1. Legkisebb négyzetek módszere	40
2.2.2.2. Maximum-likelihood- (legnagyobb valószínűség) módszer	41
2.2.2.3. Momentumok módszere.....	43
2.2.3. A becslés kivitelezése	44
2.3. Hipotézisvizsgálat, statisztikai próbák	48
2.3.1. z -próba.....	48
2.3.2. Első- és másodfajú hiba	54
2.3.3. χ^2 -próba a variancia vizsgálatára.....	61
2.3.4. Két szórásnégyzet összehasonlítása (F -próba)	64
2.3.5. A t -próba	66
2.3.5.1. Egymintás t -próba	66
2.3.5.2. Kétmintás t -próba.....	70
2.3.5.3. Páros t -próba	72
2.3.6. Több szórásnégyzet összehasonlítása: a varianciák azonosságának (homogenitásának) vizsgálata.....	75
2.3.6.1. Bartlett-próba	76
2.3.6.2. Cochran-próba.....	76
2.3.6.3. Levene-próba	76
2.3.7. Próba és konfidenciaintervallum.....	78
2.3.8. Másodfajú hiba és szükséges mintaelemszám, a nem-centrális t -eloszlás	80
2.3.9. A két egyoldali t -próba (TOST).....	83
2.4. Illeszkedésvizsgálat	89
2.4.1. Illeszkedésvizsgálat statisztikai próbával.....	90

2.4.2.	Illeszkedésvizsgálat grafikus módszerrel	94
2.5.	Statisztikai intervallumok	97
2.5.1.	Konfidenciaintervallum	97
2.5.2.	Jóslási intervallum	97
2.5.3.	Toleranciaintervallum	98
2.6.	Kiugró értékek azonosítása	101
3.	Több valószínűségi változó együttes eloszlása, korreláció	104
3.1.	Többváltozós eloszlás sűrűségfüggvénye	104
3.2.	Valószínűségi változók függetlensége	105
3.3.	Korreláció	107
II.	Lineáris regresszió	110
4.	A regresszióanalízis alapjai; egyváltozós lineáris regresszió	110
4.1.	A regresszióanalízis alapjai	110
4.2.	Lineáris regresszió, ismétlés nélküli mérések, σ_y^2 konstans	112
4.2.1.	Becslés a legkisebb négyzetek módszerével	112
4.2.2.	Maximum-likelihood-becslés	113
4.2.3.	A becslések tulajdonságai és alkalmazásuk vizsgálata	114
4.2.4.	Konfidenciasáv	119
4.2.5.	Az egyenes paramétereinek együttes konfidenciatartománya	124
4.2.6.	Jóslási sáv	127
4.2.7.	Kalibrációs egyenes: a regressziós egyenlet megoldása a független változóra	129
4.2.8.	A mérések sorrendje	132
4.3.	Lineáris regresszió ismételt mérések esetén, σ_y^2 konstans	133
4.3.1.	A paraméterek becslése	134
4.3.2.	A becsült paraméterek és a tapasztalati regressziós görbe konfidenciatartománya	138
4.3.3.	Jóslási sáv	139
4.3.4.	Kalibrációs egyenes: a regressziós egyenlet megoldása a független változóra	139
4.4.	Lineáris regresszió ismételt mérések esetén, ha σ_y^2 nem konstans	144
4.4.1.	A paraméterek becslése	145
4.4.2.	A becslések tulajdonságai	146
4.4.3.	Jóslási sáv	153
4.4.4.	Kalibrációs egyenes: a regressziós egyenlet megoldása a független változóra	154
5.	Többváltozós lineáris regresszió	162
5.1.	Ismétlés nélküli mérés, σ_y^2 konstans	162
5.2.	Többváltozós lineáris regresszió ortogonális változók esetén	166
5.3.	Többváltozós lineáris regresszió: ismételt mérések, σ_y^2 nem konstans	167
5.4.	Az egyes változók szignifikanciájának vizsgálata	168
5.5.	Regresszió polinomokkal	170
5.6.	Regresszió más, a független változóban nemlineáris, de a paraméterekben lineáris függvényekkel	175

5.7. Regresszió a paraméterekben nemlineáris függvényekkel, ha a függvény transzformációval lineárisra alakítható	175
6. Regresszió, ha a független változó is valószínűségi változó.....	179
6.1. Egyváltozós lineáris függvény regressziója	179
6.2. Egyváltozós nemlineáris függvény regressziója	183
6.3. Regresszió az egyetlen függő változó transzformáltjára	184
6.4. Megjegyzés a számítások megszervezéséhez.....	185
7. A hibaterjedési törvény és alkalmazása	186
7.1. A hibaterjedési törvény	186
7.2. A hibaterjedési törvény alkalmazása: metrológiai elemzés	188
8. A regressziós problémák megoldásának előkészítése és a feltételezések utólagos ellenőrzése.....	198
8.1. A tapasztalati regressziós függvény típusának kiválasztása	198
8.2. A σ_y^2 becslésének lehetőségei	198
8.3. A regresszió feltételeinek ellenőrzése; a reziduumok vizsgálata	200
III. Varianciaanalízis (ANOVA).....	206
9. Varianciaanalízis: egy faktor szerinti osztályozás	206
9.1. A modell	209
9.2. A modell paramétereinek becslése	211
9.3. Az eltérés-négyzetösszeg fölbontása.....	212
9.4. Hipotézisvizsgálat és ANOVA-tábla.....	214
9.5. Konfidenciaintervallum az egyes csoportok várható értékére	216
9.6. A varianciák azonosságának (homogenitásának) vizsgálata.....	217
9.7. A függő változó transzformációja	222
9.7.1. Box-Cox-transzformáció.....	222
9.7.2. Diszkrét függő változók transzformációja	228
10. Összehasonlítások egy faktor két vagy több szintjére (a digitális melléklet anyaga).....	229
11. Mennyiségi faktorok kezelése (a digitális melléklet anyaga)	230
12. Két faktor szerinti keresztosztályozás.....	231
12.1. Modell és varianciaanalízis két faktor szerinti keresztosztályozásra	232
12.2. Nem kiegyensúlyozott tervek esete: a súlyozatlan átlagok módszere	239
12.3. Többszörös összehasonlítások (a digitális melléklet anyaga).....	246
12.4. Mennyiségi faktor kezelése (a digitális melléklet anyaga)	246
12.5. Összehasonlítás kontrollcsoporttal (a digitális melléklet anyaga)	246
13. Varianciaanalízis véletlen faktor esetén.....	247
13.1. Egy véletlen faktor szerinti varianciaanalízis.....	248
13.2. A Satterthwaite-közelítés	254
13.3. Keresztosztályozás két véletlen faktor szerint	256
13.4. Keresztosztályozás egy rögzített és egy véletlen faktor szerint: véletlen blokk	259
13.5. Keresztosztályozás egy rögzített és két véletlen faktor szerint: latin négyzet.....	262
14. Hierarchikus osztályozás	265

15. Általános tervek és általános megfontolások (a digitális melléklet anyaga)	270
16. Kovarianciaanalízis (a digitális melléklet anyaga)	271
17. A regresszioanalízis és a varianciaanalízis kombinációja (a digitális melléklet anyaga)	272
18. A kísérleti tervek időbeli és térbeli struktúrája (a digitális melléklet anyaga)	273
IV. Faktoros kísérleti tervek	274
19. Bevezetés a kísérlettervezésbe	274
19.1. A kísérlettervezés célja	274
19.2. Többfaktoros kísérletek	275
19.3. Mennyiségi és minőségi változók, mérési skálák a kísérlettervezés szempontjából	277
19.4. A függő változó megválasztása	278
19.5. Többszörös célfüggvény	278
20. Kétszintes kísérleti tervek	283
20.1. 2^p típusú teljes faktoros kísérleti tervek	283
20.2. Grafikus és robusztus eszközök a tervek kiértékelésére	299
20.2.1. Pareto-ábra	299
20.2.2. Gauss-háló	299
20.2.3. Lenth módszere	300
20.3. 2^{p-f} típusú részfaktortervek	307
20.4. A kétszintes tervekkel kimutatható hatások nagysága	314
20.5. A kísérletek menete	316
20.6. Critical mix	320
20.7. Centrumponyi kísérlet minőségi faktorra	324
20.8. Split-plot tervek a faktoros kísérleteknél (a digitális melléklet anyaga)	325
21. A válaszfelület módszere	326
21.1. Box és Wilson módszere az optimum megközelítésére	326
21.2. Másodfokú kísérleti tervek	329
21.2.1. 3^p típusú tervek	329
21.2.2. Kompozíciós tervek	334
21.3. Az optimum megközelítése szimplex módszerrel	338
21.4. Elegytervek	343
22. A kísérlettervezés megvalósítása	349
22.1. A kísérletes problémamegoldás lépései	349
22.2. Megfontolások a kísérletek tervezéséhez és értékeléséhez	352
V. Minőségjavító kísérlettervezés	359
23. Taguchi módszere a minőség kísérletes javítására	359
23.1. A Taguchi-féle minőségfogalom és a négyzetes veszteségfüggvény	361
23.2. A kétlépcsős optimalizálás	365
23.2.1. A kétlépcsős optimalizálás elve	365
23.2.2. A kétlépcsős optimalizálás gyakorlata	368
23.3. A minőségjavító kísérlettervezés célfüggvényei	369

23.3.1. Névleges a legjobb (Nominal the best) eset.....	369
23.3.2. Minél kisebb, annál jobb (Smaller the better) eset.....	370
23.3.3. Minél nagyobb, annál jobb (Larger the better) eset.....	370
23.3.4. A veszteségfüggvény alkalmazása diszkrét változókra	372
23.4. A fejlesztési-tervezési folyamat fázisai	375
23.5. Ortogonális kísérleti tervek a Taguchi-módszerben (a digitális melléklet anyaga)	376
23.6. Faktorok a minőségjavító kísérlettervezésnél (a digitális melléklet anyaga)	376
23.7. Ellenőrző kísérletek (a digitális melléklet anyaga)	376
23.8. Split-plot tervek a Taguchi-kísérleteknél (a digitális melléklet anyaga)	377
VI. Komplex alkalmazási példák (a digitális melléklet anyaga).....	378
24. Gyógyszerkészítmények stabilitásvizsgálatának statisztikai értékelése (a digitális melléklet anyaga).....	378
25. Az analitikai validálás statisztikai eszközei (a digitális melléklet anyaga) ...	379
26. Az ingadozásforrások kvantitatív elemzése (a digitális melléklet anyaga)...	380
27. A kísérlettervezési eredmények további elemzése (a digitális melléklet anyaga).....	380
28. A split-plot tervvariánsok további elemzése (a digitális melléklet anyaga).....	380
Irodalomjegyzék.....	381
Függelék	386
Tárgymutató	406

Előszó

A műszaki és természettudományos kutató-fejlesztő munka költségeinek döntő része a kísérletek költsége, így ennek csökkentése kívánatos. Ez azt jelenti, hogy a kísérleti adatokban rejlő információt minél teljesebb mértékben ki kell nyerni, amire a matematikai statisztikai módszerek alkalmazása ad lehetőséget. Ennél is nagyobb a jelentősége a kísérletek gondos megtervezésének, ami nem egyszerűen átgondolt munkát jelent, hanem szintén a matematikai statisztika segítségével felépített olyan kísérleti terveket, amelyek lehetővé teszik, hogy a kívánt információt minél kevesebb kísérleti munkával szerezzük be.

Ebben a témakörben legutóbb 2000-ben jelentettünk meg könyvet, „Kísérletek tervezése és értékelése” címmel, a Műszaki Könyvkiadónál, ez a könyv többszöri utánnyomás után is sok évvel ezelőtt elfogyott, érdeklődő olvasóink hiába keresik. Ezért merült föl a könyv újrakiadása. Ahogy az idő múlt, és a klasszikus eszközök továbbélése mellett új módszerek is használatba kerültek, magunk is további tapasztalatokat szereztünk, ezért egyre kevésbé tartottuk megfelelő megoldásnak a többé-kevésbé változatlan utánnyomást, ezért döntöttünk a teljes átdolgozás mellett.

Az új részek és új hangsúlyok a következők:

A statisztikai alapok témakörében

- a) az egyoldali próbák hangsúlyozása
- b) próba és konfidenciaintervallum ekvivalenciája, ill. a táblázatból vett kritikus érték, kiszámított p , konfidenciaintervallum viszonya és haszna
- c) TOST (két egyoldali t -próba)
- d) hibaterjedési elemzés mérésekre: GUM-EURACHEM-módszer

Az ANOVA és a faktoros tervek témakörében

- e) több ingadozásforrás figyelembevétele nagyobb hangsúllyal
- f) split-plot, nehezen változtatható faktorok
- g) critical mix, rossz pont

Változatlanul igyekeztünk nem statisztikai könyvet írni, hanem mérnököt. Az a tapasztalatunk, hogy a valóságos problémák, amelyekkel a felhasználó szembekerül, bonyolultak, és nem is egyszerűsíthetők, több eszköz felhasználását igénylik, de tanulnitanítani csak az egyszerű eszközöktől kezdve lehet, spirálisan haladva fölfelé. Ezért iktatunk be komplex példákat új fejezetekként.

A példákat a Statistica programmal dolgoztuk ki, de más programok is kiválóan használhatók. Mivel az ilyen programok általában angol nyelven kommunikálnak a felhasználóval, a szakkifejezések angol nevét is megadjuk a legtöbb helyen. Tapasztalatunk szerint a vállalatok jelentős része az angol és magyar nyelvet is használja az adatelemzési jelentésekben, és súlyos következményekkel jár a tizedespont és tizedesvessző nem következetes használata. Ezért a magyar szabvány szerinti tizedesvessző helyett a könyvben mindenütt tizedespontot használunk.

Anyagunkat négy évtizedes oktatási tapasztalat csiszolta: fakultatív, majd választható kötelező és kötelezően választható tantárgyak a BME Vegyészmérnöki Karán, továbbképző kurzusok a BME Mérnöki Továbbképző Intézetében és iparvállalatoknál, 6 szigma számos vállalatnál. Ez az oktatási tapasztalat egyben megközelítési módunkat is megszabja: mivel könyvünket elsősorban mérnököknek és mérnökhallgatóknak

szánjuk, a tételek kifejtésében, levezetésében a szokásos matematikai tárgyalás helyett szemléletességre törekedtünk; helyenként bizonyítás helyett is csak szemléletet kívántunk adni.

A statisztikai módszereknek sokféle felhasználója van. Van, aki csak végrehajtandó utasításokat, követendő eljárásokat kíván, és némi segítséget az eredmények értelmezéséhez. Más el akar mélyedni, érteni akarja a módszerek hátterét is, mert csak így biztos az alkalmazhatóságukban. A csak alkalmazni kívánó felhasználót is meg kell attól óvni, hogy egy módszert az alkalmazhatósági határain kívül akarjon használni, illetve segíteni kell, hogy problémája megoldására alkalmas módszert válasszon. Minthogy azonban úgy éreztük, hogy a piac nem bír el különböző könyveket a különböző felhasználóknak, igyekeztünk mindezeket egyben megoldani. Elkerülhetetlennek tartottuk az alapok gondos tárgyalását, kézzel végigszámolott példákkal, de a számolásigényes nagyobb feladatoknál a számítógép szolgáltatta eredményekre hagyatkoztunk. Bőségesen adunk számpéldákat és gyakorlati alkalmazási példákat, útmutatásokat.

Mikor átdolgozásról van szó, a szerzők nem tudnak ellenállni a bővítés vágyának, ennek pedig a terjedelmi korlátok határt szabnak. A Typotex Kiadó tapasztalataira építve az anyag egy részét digitálisan bocsátjuk csak olvasóink rendelkezésére. Ezek a digitális részek szervesen a könyvhöz tartoznak, de a nyomtatott változatot használható alaptankönyvvé akartuk formálni, a további fejezetek kerültek a digitális részbe.

Az elméletileg nehezebb fejezeteket, alfejezeteket, amelyek nélkül hitünk szerint még jól boldogulhat az elméleti megalapozottságra kevésbé igényes felhasználó, teljes egészében a digitális részbe utaltuk. Ugyanitt vannak a komplex alkalmazási példák. Igyekeztünk a könyvet úgy szerkeszteni, hogy e fejezetek nélkül is olvasható és használható legyen az anyag.

A számításokat többnyire a Statistica programmal /Dell Inc. (2016). Dell Statistica (data analysis software system), version 13. software.dell.com/ végeztük, de a ma használatos statisztikai programok hasonló eredményeket adnak, csak a külalak különbözik.

Köszönettel tartozunk egyetemi hallgatóinknak és az e témában tartott különböző tanfolyamaink résztvevőinek, akik érdeklődésükkel, kérdéseikkel segítettek hozzá bennünket a megértés öröméhez, társaikat – és remélhetően e könyv olvasóit is – a világosabb magyarázatokhoz és az anyag mérnöki szemléletnek megfelelő kifejtéséhez. Számos példánk kollégákkal való közös munka eredménye. Köszönjük nekik az együttműködést. Külön köszönjük Vágó Emese, Pusztai Éva és Mihalovits Máté részvételét.

Budapest, 2016. szeptember

A szerzők: Kemény Sándor, Deák András, Kunovszki Péter és Lakné Komka Kinga
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Kémiai és Környezeti Folyamatmérnöki Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
e-mail: kemeny@mail.bme.hu, deaka@mail.bme.hu, kunope@mail.bme.hu, komka@mail.bme.hu

I. Valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapok

1. A szükséges valószínűségelméleti és matematikai statisztikai alapismeretek összefoglalása

Az alkalmazott statisztikai módszerek tárgyalása, amely e kötet célja, feltételezi a valószínűségszámítás és matematikai statisztika alapvető fogalmainak és módszereinek ismeretét. A témakörnek magyar nyelven is tekintélyes és jól használható szakirodalma van (Vincze I.: Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal, 1975; Prékopa A.: Valószínűségelmélet, 1980; Lukács O.: Matematikai statisztika példatár, 1987; Reimann J.: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika mérnököknek, 1992; Rényi A.: Ars Mathematica, 2005; Meszéna Gy., Ziermann M.: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika, 1981; Kröpfel, B. et al.: Alkalmazott statisztika, 2000). Ebben és a következő fejezetben ezért csak áttekintjük a szükséges alapokat.

Az 1. fejezetben az alapfogalmakról és a gyakran használatos eloszlásokról lesz szó, a 2. fejezet tárgya a statisztikai következtetés, vagyis a hipotézisvizsgálat és a paraméterbecslés.

1.1. Alapfogalmak

Mennyiségi és minőségi változók, mérési skálák

Változóink nemcsak mennyiségi, hanem minőségi jellegűek is lehetnek. A következő ún. mérési skálákat szokás definiálni:

- a) névleges (nominal, categorical): eredendően nem szám, például férfi-nő, szakaszos vagy folyamatos technológia, melyik üzemben végezzük a gyártást, az A, B vagy C szállítótól származó nyersanyagból stb.. Még ha kódszámot adunk is az egyes szinteknek, sorrendjük nem értelmezhető (pl. a férfiak személyi száma 1-essel kezdődik, a nők 2-essel, de ez nem sorrend, mint tudjuk ☺!)
- b) sorrendi (ordinal, ordered categorical): eredendően ez sem szám, például hadnagy, főhadnagy, százados. Itt nincs értelme annak a kérdésnek, hogy a főhadnagy mennyivel magasabb rangú, mint a hadnagy. Illetve az a tény, hogy az alhadnagy és a főhadnagy között két rendfokozat van, míg a főhadnagy és a százados között csak egy, még nem mond semmit arról, hogy az alhadnagy és a főhadnagy között nagyobb-e a különbség, mint a százados és a főhadnagy között.

Ezt a két skálát együtt minőségi (qualitative, attributes) skálának nevezzük.

- c) intervallum- (interval): eredendően szám, például a °C-ban mért hőmérséklet. A 40 °C-os folyadék éppen 20 °C-kal melegebb a 20 °C-osnál, de nem kétszer olyan meleg.
- d) arányos (proportional): eredendően szám, például a K-ben mért hőmérséklet, tömeg, hosszúság stb. Természetes zéruspontja van, és a 4 kg cukor tömege éppen kétszerese a 2 kg-énak.

Ezt a két skálát együtt mennyiségi skálának nevezzük (quantitative, variables).

Véletlen jelenség

Ha egy gépről lekerülő termékpéldányok valamely jellemzőjét (pl. a konzervdobozokba töltött paradicsomsűrítmény tömegét) megvizsgáljuk, azt tapasztaljuk, hogy a jellemző

értékei különbözőek, és ez az ingadozás elkerülhetetlen. Ugyanígy ingadoznak az egy alkatrész (egy példány) valamely geometriai méretére kapott mérési adatok.

Minden jelenséget az okok egy bizonyos rendszere hoz létre. Ha az okok mindegyikét figyelembe tudnánk venni, a jelenség lefolyása azokból egyértelműen levezethető, kiszámítható volna. Ez azonban gyakorlatilag lehetetlen, vagy célszerűtlen, ezért az esetek túlnyomó többségében az ingadozást véletlenszerűnek nevezzük.

Sokaság és minta

Az egy gépről lekerülő alkatrészek méretadatai, a paradicsomkonzervek tömegadatai stb. sokaságot alkotnak. A vizsgálatok célja e sokaság megismerése. Mivel az alapsokaság teljes körű vizsgálatát nem lehet, vagy nem lenne gazdaságos elvégezni, ezért vizsgálatainkat csak az összesség egy kiragadott részére, az ún. mintára korlátozzuk. A minta adatai alapján a matematikai statisztika segítségével következtetünk az alapsokaságra.

Véges sokaság elemeinek meghatározása elvileg lehetséges, de esetleg igen nagy munka. A matematikai statisztika alkalmazása ezt szükségtelessé teszi. Végtelen sokaság esetén az egész sokaság elvileg sem mérhető meg. Például gondoljunk egy adott tárgy tömegének meghatározására. A tömegmérés eredménye a tárgy valódi tömegétől a véletlen hibával különbözik. A lehetséges mérési eredmények végtelen sokaságot alkotnak. Ha a tárgyat mérlegre tesszük, s megmérjük a tömegét, ezzel kiválasztottuk a sokaság egy elemét. A mérést többször megismételve véges számú adatot, a mintát kapjuk.

Valószínűségi változó

Azokat a mennyiségeket, amelyeknek értéke nem állandó, hanem esetről esetre más és más lehet, azonban meghatározható, hogy mekkora valószínűséggel esnek megadott határok közé, valószínűségi változóknak nevezzük.

Diszkrét a valószínűségi változó és annak eloszlása, ha egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemű készletből vehet fel értékeket. Diszkrét valószínűségi változó például az egy műszak alatt gyártott selejtes termékek száma. Lehetséges értékei $(0, 1, 2, \dots, N)$ véges sorozatot alkotnak, ahol N az egy műszak alatt gyártott termékek száma. Valamely gyártó gépsor egy műszak alatti üzemzavarainak száma szintén diszkrét valószínűségi változó. Az üzemzavarok lehetséges száma elvileg nem korlátozott, s ha a nagyon nagy számokhoz gyakorlatilag elhanyagolható (igen kicsi) valószínűségeket rendelünk, az üzemzavarok lehetséges száma végtelen sorozatot alkot.

Ha a valószínűségi változó a valós számok folytonos sokaságának értékeit veheti fel, folytonos valószínűségi változóról beszélünk. Folytonos valószínűségi változó pl. az acéltermék szakítószilárdsága, vagy a polimer sűrűsége.

A diszkrét valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye

Képzeljük el, hogy egy pénzérmét 10-szer földobunk. Az 1-1a) ábrán látható $p(x)$ sűrűségfüggvény „tűi” az egyes $x = k$ értékeknél annak valószínűségét mutatják, hogy a 10 földobás eredménye éppen k -szor fej:

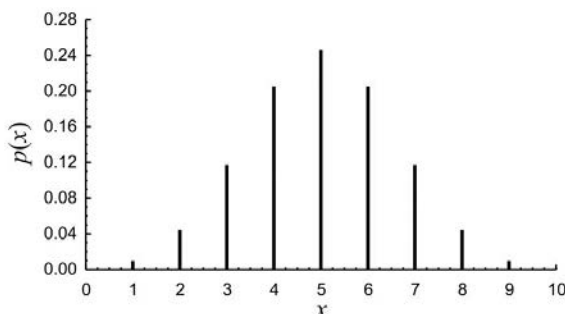
$$p(k) = P(x = k). \quad (1.1)$$

A $p(x)$ sűrűségfüggvény tulajdonságai:

$$p(x_i) \geq 0 \text{ minden } x_i \text{ helyen;}$$

$$\sum_i p(x_i) = 1. \quad (1.2)$$

A szummázás az összes x_i elemre végzendő.

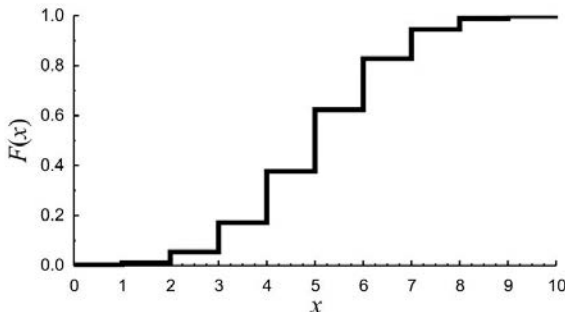


1-1a) ábra. Diszkrét valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Szokás a kumulált valószínűségeket is ábrázolni, ezt eloszlásfüggvénynek nevezik. Az 1-1b) ábra szerinti $F(x)$ eloszlásfüggvény értéke az $x = k$ helyen azt mutatja, hogy a fej eredményű dobások száma milyen valószínűséggel lesz 10 dobásból legfeljebb k :

$$F(k) = P(x \leq k) = \sum_{x_i \leq k} p(x_i). \quad (1.3)$$

Az irodalomban az $F(k) = P(x < k) = \sum_{x_i < k} p(x_i)$ konvenció is előfordul.

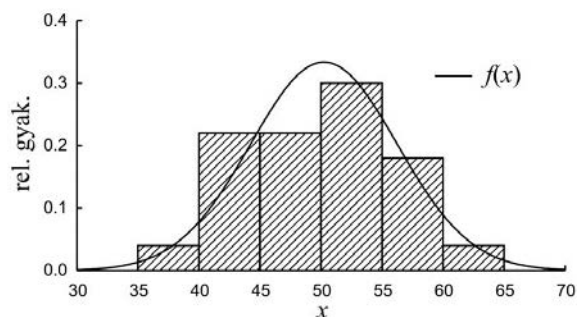


1-1b) ábra. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

A folytonos valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye

Ábrázoljuk a konkrét mintavétel során kapott értékeket olyan derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek abszcisszáján a valószínűségi változót osztályokba soroltuk.

A Δx intervallum az osztály szélessége, x_i pedig az osztály közepe, az ún. osztályindex. Az intervallumok mindegyike fölé téglalapot rajzolunk úgy, hogy a téglalapok területe az intervallumokbeli előfordulások relatív gyakoriságával (n_i/N) legyen arányos (1-2. ábra). Ez az ún. relatív gyakorisági hisztogram. Ha egyre több mérést végzünk és finomítjuk az osztályszélességet, az $f(x)$ valószínűség-sűrűségfüggvényt kapjuk, amelyet az ábrán folytonos vonal jelöl.

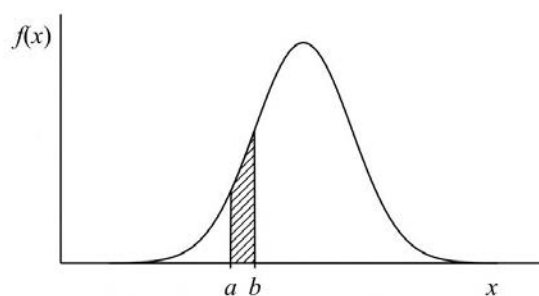


1-2. ábra. Hisztogram és sűrűségfüggvény

A sűrűségfüggvény értelmezése

Annak valószínűsége, hogy az x folytonos valószínűségi változó a és b közötti értéket vegyen föl (1-3. ábra):

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.4)$$



1-3. ábra. A folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értelmezése

Mivel x folytonos valószínűségi változó, nincs értelme egy-egy érték valószínűségéről beszélni, ugyanis $P(x = x_0) = 0$ (bár ez nem lehetetlen esemény).

Az $f(x)$ sűrűségfüggvény tulajdonságai:

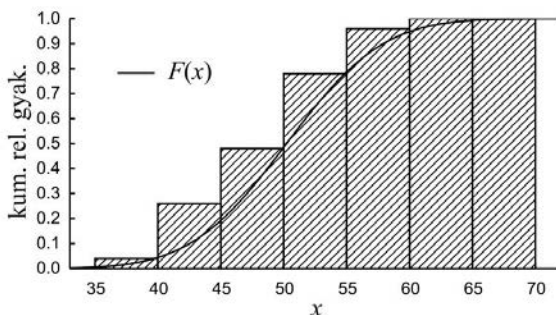
$$f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < \infty, \text{ vagyis } f(x) \text{ értéke nem lehet negatív,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ vagyis az egész görbe alatti terület egységnyi.}$$

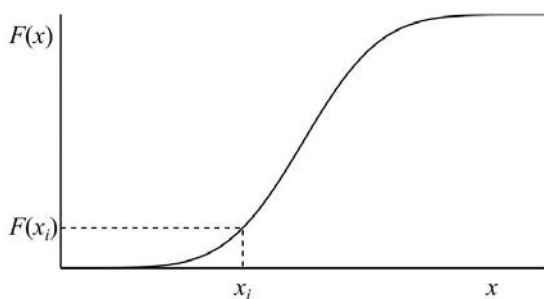
Ábrázoljuk a kumulált relatív gyakoriságokat (annak relatív gyakoriságát, hogy a valószínűségi változó x_i vagy annál kisebb értékeket vesz fel) x függvényében (1-4. ábra). Itt, ha egyre több mérést végzünk, az eloszlásfüggvényt kapjuk, ezért az előbbi kumulált relatív gyakorisági hisztogramot, ill. adatait tapasztalati eloszlásfüggvénynek is nevezzük. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja (l. az 1-5. ábrát):

$$F(x_i) = P(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx. \quad (1.5)$$

A sűrűség-, ill. eloszlásfüggvény alakjának és paramétereinek ismerete jelenti a sokaság ismeretét.



1-4. ábra. Folytonos valószínűségi változó kumulált relatív gyakorisági hisztogramja és eloszlásfüggvénye



1-5. ábra. A folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értelmezése

Paraméter és statisztika

A sokaságra vonatkozó valószínűségsűrűség-, ill. -eloszlásfüggvény konstansai, ill. ezek származékai (momentumok stb.) a paraméterek. A méréssel (mintavétellel) ezek értékeiről, azaz a sűrűség- és eloszlásfüggvényről akarunk információt szerezni. A paraméterek analogonjai a minta jellemzői, vagy más néven statisztikák. A paraméterek a sokaság tulajdonságai, míg a jellemzők (statisztikák) a mintáéi.

A legfontosabb paraméterek és statisztikák (jellemzők)

Várható érték

A várható érték definíciója folytonos valószínűségi változó esetén:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu, \quad (1.6)$$

ahol $f(x)$ a sűrűségfüggvény.

Diszkrét valószínűségi változóra:

$$E(x) = \sum_i x_i p(x_i). \quad (1.7)$$

A várható érték a sokaság tulajdonsága, tehát paraméter.
A mintára a várható értékkel analóg statisztika a számtani átlag:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (1.8)$$

A valószínűségi változó függvényének várható értéke

Ha $\varphi(x)$ az x folytonos valószínűségi változó egyértékű valós függvénye, $\varphi(x)$ várható értékén a következő kifejezést értjük:

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx. \quad (1.9)$$

Ennek alapján könnyen belátható, hogy $E(cx) = cE(x)$, és $E(c) = c$, ahol c konstans.

Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ valószínűségi változók (pl. egy veendő minta elemei), a definícióból belátható, hogy

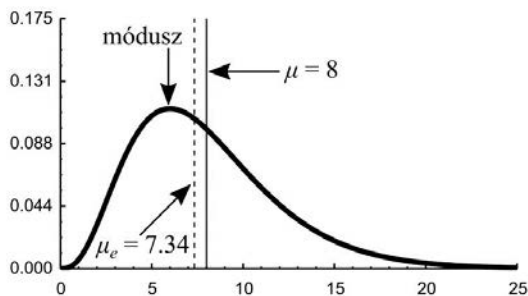
$$E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n). \quad (1.10)$$

Medián

A medián az az érték, amelynél nagyobb a valószínűségi változó ugyanolyan valószínűséggel vesz fel, mint kisebbet (1-6. ábra). A mediánt μ_e -vel jelölve ez a következőt jelenti:

$$F(\mu_e) = 0.5. \quad (1.11)$$

A tapasztalati medián a nagyság szerint rendezett mintaelemek közül a középső. Páros mintaelemszám esetén a két középső érték számtani átlaga.



1-6. ábra. Módusz, medián, várható érték

Módusz

A módusz a valószínűségi változó legnagyobb valószínűségű értéke (a sűrűségfüggvény maximumhelye). Egy eloszlásnak több módusza is lehet.

A tapasztalati módusz a legnagyobb gyakoriságú osztály (a hisztogram legmagasabb téglalapjának) osztályindexe. Ha több móduszt találunk, általában több sokaság összekeveredésére gyanakodhatunk. Egycsúcsos szimmetrikus eloszlás esetében a módusz és a medián egybeesik a várható értékkel, aszimmetrikus esetben nem (1-6. ábra).

A variancia definíciója

Az x folytonos valószínűségi változóra:

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx = E[(x - \mu)^2] = \sigma^2. \quad (1.12)$$

Diszkrét valószínűségi változóra:

$$\text{Var}(x) = \sum [x_i - E(x)]^2 p(x_i) = E[(x - \mu)^2], \quad (1.13)$$

azaz a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke. Szokás (a magyar nyelvű szakirodalomban is) a következő jelölés: $D^2(x)$.

Megjegyzendő, hogy a magyar szakirodalomban a variancia helyett a szórásnégyzet elnevezést használják. Az elméleti és a tapasztalati szórásnégyzet megkülönböztetése végett tartottuk szükségesnek, hogy könyvünkben más kifejezést használjunk.

A variancia a sokaság tulajdonsága (ezért paraméter), a sűrűségfüggvény „szélességét” adja meg. A definíció alapján könnyen belátható, hogy

$$\text{Var}(cx) = c^2 \text{Var}(x), \quad (1.14)$$

és független $x_1, x_2, \dots, x_n$ valószínűségi változókra (mint pl. egy minta elemeire):

$$\text{Var}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + \dots + \text{Var}(x_n). \quad (1.15)$$

A variancia mintabeli analogonja a szórásnégyzet (más néven tapasztalati szórásnégyzet vagy korrigált tapasztalati szórásnégyzet):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.16)$$

1.2. A legfontosabb diszkrét eloszlások

Számos diszkrét eloszlás ismeretes, közülük számunkra most a binomiális és a Poisson-eloszlás a legfontosabbak.

A binomiális eloszlás

Dobjunk föl egy pénzérmét n -szer. Legyen π annak valószínűsége, hogy egy földobás eredménye fej legyen (ez hibátlan érménél 0.5). Annak valószínűségét, hogy a sorozatban éppen x legyen a fej dobások száma, a következő sűrűségfüggvény adja meg:

$$p(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}. \quad (1.17)$$

Általánosabban a binomiális eloszlás akkor használható, ha a vett minta eleme kétféle lehet. A gyártmány- vagy gyártásellenőrzésnél p a sokaságbeli (tételbeli) selejtarány, x az n elemű mintában talált selejtes darabok száma. Szükséges, hogy a mintavétel visszatevéssel történjék, vagyis a k -adik mintaelem ugyanolyan eséllyel legyen selejtes, mint a $k+1$ -edik. Természetesen a gyakorlatban nem szokás a vett mintaelemeket visszatenni, ekkor a binomiális eloszlás csak közelítés, amely $n \ll N$ esetén teljesen jogos.

A binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke és varianciája:

$$E(x) = n\pi, \quad (1.18)$$

$$Var(x) = n\pi(1-\pi). \quad (1.19)$$

Ha a talált selejtes darabok száma helyett a mintabeli selejtarányt tekintjük valószínűségi változónak, ennek várható értéke és varianciája:

$$E\left(\frac{x}{n}\right) = \pi, \quad (1.20)$$

$$Var\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}. \quad (1.21)$$

A mintabeli selejtarány is diszkrét valószínűségi változó, bár lehetséges értékei nem egész számok. Például 20 elemű mintában a talált selejtarány lehet 0, 1/20, 2/20 és így tovább.

A Poisson-eloszlás

Ritka események eloszlásának modellezésére használható, pl. a ritkán előforduló selejtes darabok tételenkénti száma, a műszakonkénti fonalszakadások száma, az üzemi balesetek száma évente, a festési hibahelyek száma egy autón stb. A minőségbiztosításban elsősorban a termékegységen előforduló hibák eloszlásának modellezésére használják.

Annak feltételei, hogy a ritka esemény valamely idő-intervallumbeli, vagy adott egységbeli előfordulásainak száma Poisson-eloszlást kövessen:

- bármely egységben bekövetkező eseménynek függetlennek kell lennie a többi egységből;
- az esemény bekövetkezésének valószínűsége bármely egységben azonos, és arányos az egység méretével;
- annak valószínűsége, hogy két vagy több előfordulás következik be egy egységben, az egység méretének csökkentésével nullához tart.

Ha a binomiális eloszlásnál a π paraméter igen kicsi ($\pi \rightarrow 0$), a mintaelemszám pedig igen nagy ($n \rightarrow \infty$), de közben az $n\pi = \lambda$ szorzat véges konstans ($\lambda > 0$), a valószínűségi változó Poisson-eloszlású lesz.

A Poisson-eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}. \quad (1.22)$$

Várható értéke és varianciája:

$$E(x) = Var(x) = \lambda. \quad (1.23)$$

1.3. A legfontosabb folytonos eloszlás: normális eloszlás

A természetben akkor találkozunk normális eloszlással, ha sok, egymástól független, egyenként kis hatású tényező hatása összeadódik. Emiatt a közvetlenül mért, véletlenszerű ingadozásokat mutató adatok (tömeg, hőmérséklet stb.) jó közelítéssel normális vagy Gauss-féle eloszlású sokaságból vett mintának tekinthetők.

A Gauss-eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad (1.24)$$

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx. \quad (1.25)$$

A normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke és varianciája:

$$E(x) = \mu, \quad (1.26)$$

$$Var(x) = \sigma^2. \quad (1.27)$$

A normális eloszlás szokásos rövid jelölése $N(\mu, \sigma^2)$, pl. $N(0, 1)$.

Ha az eloszlásfüggvény értékeit táblázatba akarnánk foglalni, háromdimenziós táblázatra lenne szükség, mivel $F(x)$ az x változón kívül a μ és σ paramétereket is tartalmazza. Célszerű tehát transzformációt keresnünk.

Normalizált (standardizált) normális eloszlás: z-eloszlás

Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}. \quad (1.28)$$

Az új valószínűségi változó paraméterei:

$$E(z) = E\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(x) - \mu}{\sigma} = 0, \quad (1.29)$$

$$Var(z) = Var\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(x) = 1. \quad (1.30)$$

A két paraméter felhasználásával a normalizált (standardizált) normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \quad (1.31)$$

Mint hogy a sűrűségfüggvényben egyetlen paraméter sem szerepel, a normalizált normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékei kisméretű táblázatba foglalhatók (Függelék I. táblázat). E táblázat adatai bármilyen paraméterű normális eloszlásra használhatók a transzformációs képlet alkalmazásával.

Annak valószínűsége, hogy a $N(\mu, \sigma^2)$ eloszlású x valószínűségi változó nem haladja meg a értékét, a következő integrállal adható meg:

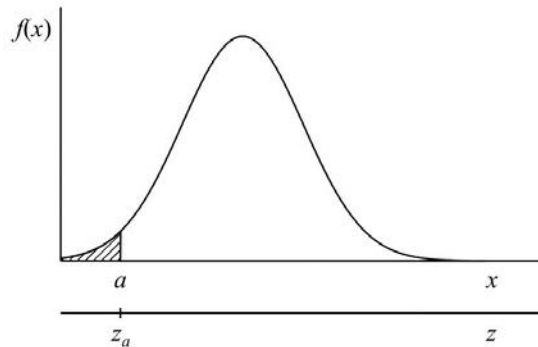
$$P(x \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = \int_{-\infty}^{z_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = F(z_a), \quad (1.32)$$

ahol $z_a = \frac{a - \mu}{\sigma}$.

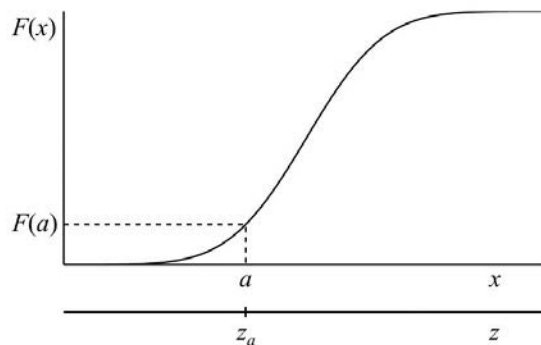
A $P(x \leq a)$ valószínűség értékét az 1-7a) ábrán a vonalkázott terület mutatja. A kettős vízszintes skála szemlélteti a transzformációt. Az 1-7b) ábra az eloszlásfüggvénnyel magyarázza ugyanezt.

Tehát annak valószínűsége, hogy $x \leq a$, megegyezik annak valószínűségével, hogy

$$z \leq z_a = \frac{a - \mu}{\sigma}.$$



1-7a) ábra. Standardizált normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye



1-7b) ábra. Standardizált normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

1-1. példa

Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az x normális eloszlású valószínűségi változó a $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ intervallumba eső értéket vesz fel!

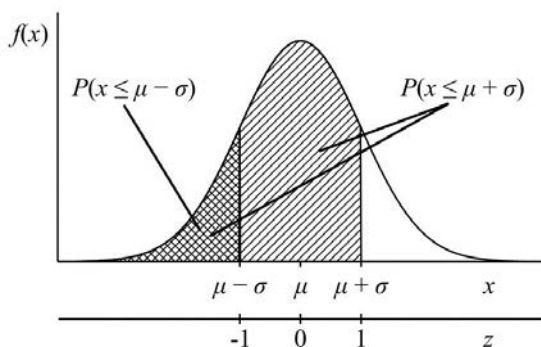
$$P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma)$$

Az összefüggést az 1-8a) és b) ábrák szemléltetik.

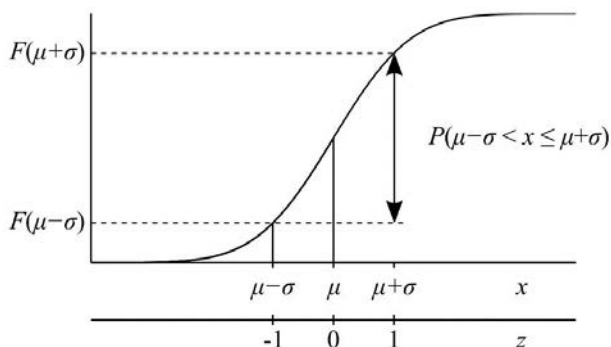
$$z_{\text{felső}} = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = 1 \quad z_{\text{alsó}} = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = -1$$

A Függelék I. táblázatából $F(1) = 0.84134$. Belátható, hogy mivel $f(x)$ szimmetrikus függvény és $F(\infty) = 1$, $F(-a) = 1 - F(a)$. Így $F(-1) = 1 - F(1) = 0.15866$.

$P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = 0.68268$; $P \approx 0.683$, azaz a valószínűség 68.3%.



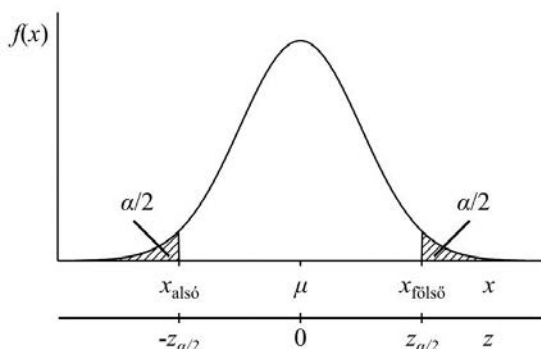
1-8a) ábra. A normális eloszlású valószínűségi változó $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ intervallumbeli előfordulásának valószínűsége a sűrűségfüggvényen szemléltetve



1-8b) ábra. A normális eloszlású valószínűségi változó $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ intervallumbeli előfordulásának valószínűsége az eloszlásfüggvényen szemléltetve

Hasonló számítással adódik:

intervallum szélessége	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
P	0.68268	0.9545	0.9973



1-9. ábra. A z-eloszlású valószínűségi változó $1-\alpha$ valószínűségű intervalluma